ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 35, 1995 — N° 6, с. 850–866

УДК 519.852

© 1995 г. Ю.Г. ЕВТУШЕНКО, В.Г. ЖАДАН, А.П. ЧЕРЕНКОВ

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА НЬЮТОНА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ[1]

117967 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ РАН

(Пересмотрена 30 апреля 2002 г.)

Рассматриваются непрерывные и дискретные варианты барьерно-ньютоновского метода решения задач линейного программирования. Метод является прямо-двойственным, и в его основе лежит идея отыскания с помощью метода Ньютона тех точек в прямом и двойственном пространстве, которые удовлетворяют совместной системе условий оптимальности. Исследуются локальные и нелокальные свойства метода. Для дискретных вариантов метода предлагается использовать разные шаги в прямом и двойственном пространствах. Показано, что при специальных регулировках шагов метод сходится со сверхлинейной и квадратичной скоростью. Рассматривается вариант метода, в котором шаги выбираются из условия наискорейшего спуска, и выделена область начальных условий, при которых метод находит решение не более чем за две итерации.

## Введение

Метод Ньютона является одним из наиболее эффективных способов решения систем нелинейных уравнений и задач оптимизации [1, 2, 3]. В последнее время появились многочисленные варианты метода, предназначенные для решения задач линейного программирования (ЛП) (см., например, [4, 5, 6]). Подробный обзор таких методов содержится в [7], причем особый интерес среди них представляют прямо-двойственные алгоритмы, в которых методом Ньютона решается параметризованная система уравнений, дающих в пределе условия оптимальности для прямой и двойственной задач [8]–[12]. Эти методы позволяют сочетать достаточно высокую локальную скорость сходимости с полиномиальностью алгоритмов. В настоящей работе также предлагается прямо-двойственный метод, основанный на решении системы уравнений, задающих условия оптимальности в задаче ЛП, а именно: условия дополняющей нежесткости и условия допустимости (см. [13]).

Если воспользоваться преобразованием пространств для освобождения от требования неотрицательности переменных [14, 15] и применить метод Ньютона для отыскания точек,

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 93-012-450, 94-01-01379).

удовлетворяющих условиям Куна–Таккера, то можно получить целое семейство различных методов. Такие методы для общей задачи нелинейного программирования рассматривались в [15, 16] и для задачи ЛП — в [17].

Данная статья посвящена исследованию специального класса методов, соответствующих таким покомпонентным преобразованиям пространств, которые приводят к умножению правых частей систем обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих метод, на диагональные матрицы, играющие роль барьеров и не позволяющие траекториям пересекать границы положительных ортантов как в исходном пространстве, так и в пространстве двойственных дополнительных переменных. В отличие от [17], здесь основное внимание уделяется выбору шагов в прямом и двойственном пространствах, которые, как и в [18], могут быть различными. Рассматриваются отдельно варианты метода с малыми шагами, а также с шагами, близкими к единице или выбираемыми из решения вспомогательных оптимизационных задач.

## § 1. Постановка задачи, основные идеи метода

Пусть $x = [x^1, \dots, x^n]$ и $u = [u^1, \dots, u^m]$ — векторы из евклидовых пространств $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно. Рассмотрим прямую и двойственную задачи ЛП, заданные в следующей форме:

$$\min_{x \in X} c^\top x, \qquad X = \{x \in \mathbb{R}^n : b - Ax = 0_m, \quad x \geq 0_n\}, \tag{1.1}$$

$$\max_{u \in U} b^\top u, \qquad U = \{u \in \mathbb{R}^m : v = c - A^\top u \geq 0_n\}. \tag{1.2}$$

Здесь и ниже $A$ — матрица $m \times n$, в которой $m < n$, $0_i$ — нулевой $i$-мерный вектор, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$. Символ $0_{ij}$ будет обозначать нулевую матрицу $i \times j$.

Введем в рассмотрение следующие множества:

$$\begin{array}{lcllcl} \mathbb{R}^n_+ & = & \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0_n\}, & \mathbb{R}^n_{++} & = & \{x \in \mathbb{R}^n : x > 0_n\}, \\ \operatorname{int} U & = & \{u \in \mathbb{R}^m : v = \mathrm{c} - A^\top u > 0_n\}, & \operatorname{ri} X & = & \{x \in \mathbb{R}^n_{++} : Ax = b\}. \end{array}$$

Всюду предполагаем, что ранг матрицы $A$ равен $m$, множества $\mathrm{int} U$ и $\mathrm{ri} X$ непусты, задача (1.1) имеет единственное решение $x_*$, которое не вырождено. Тогда двойственная задача (1.2) также имеет единственное решение $u_*$ и оно не вырождено, вектор $x_*$ имеет $m$ ненулевых компонент, вектор $v_* = c - A^\top u_*$ имеет $m$ нулевых компонент. При этом выполняются условие дополняющей нежесткости $x^j_* v^j_* = 0$, $1 \leq j \leq n$, и условие строгой дополняющей нежесткости, т.е. из $x^j_* = 0$ следует, что $v^j_* > 0$.

Для решения задач линейного и нелинейного программирования в [16, 17] был использован метод Ньютона. В результате было получено целое семейство численных методов. Здесь ограничимся рассмотрением только одной численной схемы, в которой итерации строятся по формуле

$$W(x_k, u_k, \lambda_k) \begin{bmatrix} x_{k+1} - x_k \\ u_{k+1} - u_k \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \alpha_k D(x_k) v_k \\ \tau_k (A x_k - b) \end{bmatrix}. \tag{1.3}$$

Здесь нижний индекс $k$ обозначает номер итерации, $D(z)$ — диагональную матрицу, у которой на главной диагонали находится вектор $z$, $\alpha_k$, $\tau_k$, $\lambda_k$ — некоторые положительные коэффициенты, $\lambda_k = \alpha_k / \tau_k$, $n$-мерный вектор $v$ имеет вид $v = v(u) = c - A^\top u$, $W$ — квадратная матрица порядка $n + m$,

$$W(x, u, \lambda) = \begin{bmatrix} \lambda D(v) & -D(x) A^\top \\ A & 0_{mm} \end{bmatrix}.$$

В тех точках, где векторы $x_k$ и $v_k$ имеют все компоненты, не равные нулю, система (1.3) может быть записана в виде

$$x_{k+1} = D(x_k)[e_n + \tau_k(\eta_k - e_n)], \qquad u_{k+1} = u_k + \alpha_k \mu_k, \tag{1.4}$$

где $e_n$ есть $n$-мерный вектор, все компоненты которого равны единице, векторы $\eta \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}^m$ определяются по формулам

$$\eta(x,u) = D^{-1}(v) A^\top \mu(x,u), \qquad \mu(x,u) = M^{-1}(x,u) b. \tag{1.5}$$

Здесь $M(x,u) = AD(x)D^{-1}(v)A^\top\mathrm{M}$ — матрица Грама.

Используя связь $v = c - A^\top u$ между векторами $u$ и $v$, метод (1.4) можно переписать в переменных $x$, $v$:

$$x_{k+1} = D(x_k)[e_n + \tau_k(\eta_k - e_n)], \qquad v_{k+1} = D(v_k)(e_n - \alpha_k \eta_k). \tag{1.6}$$

Введем матрицу $\Lambda \in \mathbb{R}^{d\times n}$, где $d = n - m$ — дефект матрицы $A$. Столбцы матрицы $\Lambda^\top$ образуют базис нуль-пространства матрицы $A$, т.е. $A\Lambda^\top = 0_{md}$. Введем в рассмотрение множество $V = \{v \in \mathbb{R}^n : \Lambda(v-c) = 0_d\}$. Если $v \in V$, то вектор $v - c$ лежит в пространстве строк матрицы $A$ и для вектора $v$ существует такой $m$-мерный вектор $u$, что $v = c - A^\top u$. Из второго соотношения (1.6) следует $\Lambda(v_{k+1} - c) = = \Lambda(v_k - c) - \alpha_k \Lambda A^\top \mu_k = \Lambda(v_k - c)$. Таким образом, если $v_0 \in V$, то $v_k \in V$ для всех $k$ и соотношения (1.4) эквивалентны (1.6). Итерации можно проводить как в пространстве $x$, $u$, так и в пространстве $x$, $v$.

**Лемма 1.1.** *Пусть $x_*$ и $v_*$ — невырожденные решения задач* (1.1) *и* (1.2), *тогда матрица $W(x_*, u_*, \lambda)$ не вырождена,*

**Доказательство**. Не нарушая общности, считаем, что ненулевыми являются первые $m$ компонент вектора $x_*$. Тогда векторы $x_*$, $v_*$ и матрицы $A$ и $W$ можно представить в виде

$$x_* = \left[\begin{array}{c} x_*^B \\ x_*^N \end{array}\right], \qquad v_* = \left[\begin{array}{c} v_*^B \\ v_*^N \end{array}\right], \qquad x_*^B > 0_m, \quad x_*^N = 0_d, \quad v_*^B = 0_m, \quad v_*^N > 0_d, \tag{1.7}$$

$$A = [B|N], \qquad W(x_*, u_*, \lambda) = \left[\begin{array}{ccc} 0_{mm} & 0_{md} & -D(x_*^B)B^\top \\ 0_{dm} & \lambda D(v_*^N) & 0_{dm} \\ B & N & 0_{mm} \end{array}\right]. \tag{1.8}$$

Здесь $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $N \in \mathbb{R}^{m\times d}$.

Для доказательства достаточно показать, что следующая система однородных алгебраических уравнений имеет только нулевое решение:

$$D(x_*^B)B^\top \bar{u} = 0_m, \qquad \lambda D(v_*^N)\bar{x}^N = 0_d, \qquad B\bar{x}^B + N\bar{x}^N = 0_m,$$

где $\bar{x}^B \in \mathbb{R}^m$, $\bar{x}^N \in \mathbb{R}^d$, $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$. Но это очевидно, так как $B$ — невырожденная матрица. □

**Лемма 1.2.** *Для всяких $x \in \mathbb{R}^n_{++}$, $u \in \operatorname{int} U$, $\lambda \in \mathbb{R}^1_{++}$ матрица $W(x,u,\lambda)$ не вырождена.*

Поскольку на рассматриваемых множествах матрица $M(x,u)$ не вырождена, то доказательство леммы 1.2 следует из формулы Фробениуса для обратной матрицы:

$$W^{-1} = \left[\begin{array}{cc} \lambda^{-1}D^{-1}(v)[I_n - D(x)A^\top M^{-1}AD^{-1}(v)] & D^{-1}(v)D(x)A^\top M^{-1} \\ -M^{-1}AD^{-1}(v) & \lambda M^{-1} \end{array}\right].$$

Здесь и ниже $I_s$ — единичная матрица $s \times s$.

Объединим векторы $x$ и $u$ одним символом, положив $z^\top = [x^\top, u^\top] \in \mathbb{R}^{n+m}$. Согласно лемме 1.2 правые части соотношений (1.6) однозначно определены, если все компоненты векторов $x$ и $v(u)$ строго положительны. Векторы $z$, у которых $z \in \mathbb{R}^n_{++}$, $u \in \operatorname{int} U$, назовем *внутренними*. Те варианты метода (1.3), в которых на всех итерациях вектор $z$ остается внутренним, будем называть *методами внутренних точек*.

Введем в рассмотрение скаляр $\Phi_k = x_k^\top v_k$. Из (1.4), (1.6) следует, что

$$Ax_{k+1} - b = (1 - \tau_k)(Ax_k - b), \tag{1.9}$$

$$\Phi_{k+1} = (1 - \tau_k)\Phi_k + (\tau_k - \alpha_k)\mu_k^\top A x_k + \alpha_k \tau_k \mu_k^\top (Ax_k - b). \tag{1.10}$$

Пусть $x_k > 0_n$, $v_k > 0_n$. Тогда для того чтобы гарантировать неотрицательность векторов $x_{k+1}$ и $v_{k+1}$, шаги $\alpha_k$, $\tau_k$ должны удовлетворять условиям $e_n \geq a_k \eta_k$, $e_n \geq \tau(e_n - \eta_k)$. Легко видеть, что эти условия имеют место, если

$$\alpha_k \leq \alpha_k^* = \frac{1}{[\eta_k^*]_+}, \qquad 0 < \tau_k \leq \tau_k^* = \frac{1}{[1 - \eta_*^k]_+}, \tag{1.11}$$

где $[\alpha]_+ = \max[0, \alpha]$, $\eta_k^*$ и $\eta_*^k$ — соответственно максимальная и минимальная компоненты вектора $\eta_k$. Условимся считать, что $\alpha_k^* = +\infty$, если $\eta_k^* \leq 0$, и что $\tau_k^* = +\infty$, если $\eta_*^k \geq 1$.

Числа $\tau_k^*$ и $\alpha_k^*$ определяют максимально возможные шаги по прямым и двойственным переменным вдоль ньютоновского направления, сохраняющие неотрицательность всех компонент векторов $x$ и $v$ на $k$-й итерации.

**Лемма 1.3.** *Пусть $x_k > 0_n$, $v_k > 0_n$, $v_k \in V$ и $b \neq 0_m$, тогда $\eta_k^* > 0$. Если, кроме того, $x_k \in X$, множество $X$ ограничено и вектор $c$ не принадлежит пространству строк матрицы $A$, то $\eta_*^k < 1$.*

**Доказательство**. Предположим противное: пусть $\eta_k^* \leq 0$. Тогда из (1.5) следует $A^\top \mu_k \leq 0_n$ и согласно (1.4) – (1.6) выполняются неравенства

$$b^\top u_{k+1} - b^\top u_k = \alpha_k b^\top M^{-1}(x_k, u_k) b > 0, \qquad v_{k+1} > 0_n.$$

Таким образом, двигаясь вдоль ньютонова направления, получаем при $\alpha_k \to \infty$, что вектор $v_{k+1}$ имеет все неотрицательные компоненты и целевая функция двойственной задачи стремится к бесконечности. Это противоречит существованию ограниченного решения задачи (1.2). Поэтому $\eta_k^* > 0$ и, следовательно, максимальный шаг $\alpha_k^*$ ограничен.

Пусть $x_k \in X$. Тогда, согласно (1.9), точка $x_{k+1} \in X$. Если от противного предположить, что $\eta_*^k \geq 1$, то в случае, когда $\eta_k^* > 1$, должна существовать такая $j$-я компонента вектора $\eta_k$, что $\eta_k^j > 1$. Следовательно, в силу (1.4) $x_{k+1}^j \to \infty$ при $\tau_k \to \infty$. Но это невозможно из-за ограниченности $X$. Если $\eta_*^k = \eta_k^* = 1$, то $\alpha_k^* = 1$ и при $\alpha_k = 1$ из (1.6) следует, что $v_{k+1} = 0_n$, $c = A^\top u_k$, что противоречит условиям леммы. Поэтому $\eta_*^k < 1$. Лемма доказана. $\square$

Для полного описания численных методов (1.3) и (1.5) необходимо определить правила выбора шагов $\alpha_k$ и $\tau_k$. Укажем три класса методов, которые порождаются разными способами регулировки шагов.

1. Шаги $\alpha$, $\tau$ фиксированы и достаточно малы. В этом случае процесс (1.3) близок к непрерывному варианту метода, который будет рассмотрен в следующем параграфе.

2. Шаги $\alpha$ и $\tau$ близки к единице. В этом случае метод близок к методу Ньютона.

3. На каждой итерации шаги $\alpha_k$ и $\tau_k$ выбираются из решения вспомогательных оптимизационных задач. Эти варианты, можно называть *наискорейшим спуском.*

Ниже остановимся на некоторых вариантах методов из этих классов.

## § 2. Первый класс методов

В работе [17] метод (1.3) был получен из непрерывного варианта, в котором решение задач (1.1) и (1.2) сводилось к отысканию предельных точек (при $t \to \infty$) решений следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\lambda D(v)\frac{dx}{dt} - D(x)A^\top \frac{du}{dt} = -\alpha D(x)v, \tag{2.1}$$

$$A\frac{dx}{dt} = -\tau(Ax - b). \tag{2.2}$$

Здесь $x(t, z_0)$, $u(t, z_0)$ — решения задачи Коши (2.1), (2.2) с вектором начальных условий $z_0^\top = [x_0^\top, u_0^\top]$.

Пусть $\alpha > 0$, $\tau > 0$ и $\lambda = 1$, тогда метод (2.1), (2.2) обладает свойством локальной сходимости. В [17] доказана

**Теорема 2.1.** *Пусть $x_*$ и $u_*$ — изолированные невырожденные решения задач* (1.1) *и* (1.2). *Тогда пара $[x_*, u_*]$ является асимптотически устойчивым положением равновесия для системы* (2.1), (2.2). *Дискретный вариант метода* (1.3) *локально сходится по крайней мере линейно при фиксированных параметрах $\lambda_k$, $\alpha_k$ и $\tau_k$ таких, что $\lambda_k = 1$, $0 < \alpha_k < 2$ и $0 < \tau_k < 2$.*

Система (2.1), (2.2) обладает $n + m$ первыми интегралами:

$$D^\lambda(x(t, z_0))v(t, z_0) = \mathrm{e}^{-\alpha t} D^\lambda(x_0)v_0, \tag{2.3}$$

$$Ax(t, z_0) - b = \mathrm{e}^{-\tau t}(Ax_0 - b). \tag{2.4}$$

Отсюда следует, что на траекториях системы (2.1), (2.2) компоненты векторов $x$ и $v$ не меняют знак. Поэтому если $x_0 > 0_n$, $v_0 > 0_n$ и траектории (2.1), (2.2) ограничены и продолжимы при $t \to \infty$, то в предельных точках $x_*$, $v_*$ будут выполнены условия оптимальности Куна–Таккера для задачи (1.1):

$$Ax_* = b, \qquad x_* \geq 0_n, \qquad v_* \geq 0_n, \qquad D(x_*)v_* = 0_n.$$

Таким образом, для решения задач (1.1) и (1.2) можно либо отыскивать предельные точки решения задачи Коши для системы (2.1), (2.2) либо находить пределы решения нелинейной системы (2.3), (2.4) при $t \to \infty$. Ниже будем ориентироваться на первый подход. Если все компоненты векторов $x$ и $v$ ненулевые, то систему (2.1), (2.2) можно разрешить относительно производных, и мы получим эквивалентную систему

$$\frac{dx}{dt} = \tau D(x)[\eta(x, u) - e_n], \qquad \frac{du}{dt} = \alpha\mu(x, u). \tag{2.5}$$

Правые части системы (2.5) определены во всех тех точках, где вектор $z^\top(t, z_0) = [x^\top(t, z_0), u^\top(t, z_0)]$ внутренний. Вместе с тем правые части не определены в точке $z_*^\top = [x_*^\top, u_*^\top]$. Покажем, что если $z(t, z_0)$ приближается к $z_*$, оставаясь внутренним, то вектор-функции $\mu(x(t, z_0), u(t, z_0))$ и $\eta(x(t, z_0), u(t, z_0))$ имеют конечные пределы. Аналогично (1.7), (1.8) вектор $\eta$ представим в виде $\eta^\top = [(\eta^B)^\top, (\eta^N)^\top]$, $\eta^B \in \mathbb{R}^m$, $\eta^N \in \mathbb{R}^d$.

**Лемма 2.1.** *Пусть точки $x_*$ и $u_*$ являются невырожденными решениями соответственно задач* (1.1) *и* (1.2), *причем точка $x_*$ представима в виде* (1.7), (1.8). *Тогда для* *произвольных* $x > 0$ *и* $u \in \operatorname{int} U$ *имеют место представления*

$$\eta^B = e_m - D^{-1}(x_*^B)\delta x^B + s_1(\delta x), \tag{2.6}$$

$$\eta^N = D^{-1}(v_*^N)\delta v^N + s_2(\delta z), \tag{2.7}$$

$$\mu = -\delta u + s_3(\delta z), \tag{2.8}$$

*где* $\delta x = x - x_*$, $\delta u = u - u_*$, $\delta z^\top = [\delta x^\top, \delta u^\top]$, $\delta v = -A^\top \delta u$; $\|s_i(\delta z)\| = O(\|\delta z\|)$, $i = 1, 2, 3$; *разбиение векторов* $\delta x$ *и* $\delta v$ *на компоненты* $\delta x^B$, $\delta x^N$ *и* $\delta v^B$, $\delta v^N$ *соответственно осуществляется аналогично* (1.7), (1.8).

**Доказательство**. В соответствии с разбиением вектора $x_*$ матрицу $M(x,u)$ можно представить в виде

$$M(x,u) = M^B(x,u) + M^N(x,u). \tag{2.9}$$

Здесь

$$M^B(x,u) = BD(x^B)D^{-1}(v^B(u))B^\top, \qquad M^N(x,u) = ND(x^N)D^{-1}(v^N(u))N^\top. \tag{2.10}$$

Если $M^B(x,u)$ — невырожденная матрица, то наряду с (2.9) справедливо равенство

$$M(x,u) = M^B(x,u)\{I_m + [M^B(x,u)]^{-1}M^N(x,u)\}.$$

Поэтому

$$M^{-1} = [I_m + (M^B)^{-1}\mathrm{M}^N]^{-1}(\mathrm{M}^B)^{-1} = [M^B(x,u)]^{-1} + S(x,u), \tag{2.11}$$

где $S = -(\mathrm{M}^B)^{-1}\mathrm{M}^N[I_m - (M^B)^{-1}M^N + \ldots](M^B)^{-1}$.

На основании (2.10) имеем

$$[M^B(x,u)]^{-1} = (B^\top)^{-1}D(v^B(u))D^{-1}(x^B)B^{-1}. \tag{2.12}$$

Поскольку в силу невырожденности решений прямой и двойственной задач $x_*^N = 0_n$, $v_*^B = 0_m$, $v_*^N > 0_d$, то из (2.11) и (2.12) следует

$$[M(x_*, u_*)]^{-1} = [M^B(x_*, u_*)]^{-1} = 0_{mm}.$$

Имеют место очевидные представления

$$b = Bx_*^B = Bx^B - B\delta x^B \tag{2.13}$$

$$\delta v^N = -N^\top \delta u = N^\top (B^\top)^{-1}\delta v^B, \qquad \|S(x,u)\| = O(\|\delta z\|). \tag{2.14}$$

Подставляя (2.11) и (2.13) в выражения (1.5), получаем

$$\eta(x,u) = D^{-1}(v(u))A^\top M^{-1}(x,u)b = \eta_1(x,u) + s(\delta z). \tag{2.15}$$

Здесь $\eta_1(x,u) = D^{-1}(v(u))A^\top(M^B)^{-1}\mathrm{B}(\mathrm{x}^B - \delta x^B)$, $\|s(\delta z)\| = O(\|\delta z\|)$.

Если воспользоваться соотношением (2.12) и первым равенством (2.14), то приходим к (2.8) и к следующим формулам:

$$\begin{aligned}
\eta_1^B &= D^{-1}(v^B)B^\top(B^\top)^{-1}D(v^B)D^{-1}(x^B)B^{-1}B(x^B - \delta x^B) = \\
&= D^{-1}(x^B)(x^B - \delta x^B) = e_m - D^{-1}(x_*^B)\delta x_*^B + \theta^B(\delta z), \\
\eta_1^N &= D^{-1}(v^N)N^\top(B^\top)^{-1}D(v^B)D^{-1}(x^B)B^{-1}B(x^B - \delta x^B) = \\
&= D^{-1}(x^N)N^\top(B^\top)^{-1}v^B + \theta^N(\delta z) = D^{-1}(v^N)N^\top(B^\top)\delta v^B + \theta^N(\delta z) = \\
&= D^{-1}(v_*^N)\delta v^N + \theta_1^N(\delta z),
\end{aligned}$$

где $\|\theta^B(\delta z)\| = o(\|\delta z\|)$, $\|\theta_1^N(\delta z)\| = o(\|\delta z\|)$. Так как $v_*^B = 0$, то отсюда и из (2.15) заключаем, что справедливы равенства (2.6), (2.7). Лемма доказана. $\square$

Утверждение леммы объясняет, почему вектор $\eta(x,u)$ часто называют индикаторным (см., например, [19]). Все компоненты вектора $\eta(x_*,u_*)$ состоят из нулей и единиц, причем базисным компонентам вектора $x_*$ соответствуют единичные компоненты вектора $\eta(x_*,u_*)$. Нулевым компонентам вектора $x_*$ соответствуют нулевые компоненты $\eta(x_*,u_*)$.

Введем в рассмотрение функцию Ляпунова $F(x,u)$ и лебегово множество $\Omega_0$ по формулам

$$F(x,u) = \|D^\lambda(x)(c - A^\top u)\| + \|Ax - b\|,$$
$$\Omega_0 = \{[x,u] : F(x,u) \le F(x_0,u_0),\ \ x \ge 0_n,\ \ v \ge 0_n,\ \ b^\top u_0 \le b^\top u\}.$$

**Теорема 2.2.** *Пусть $[x_*,u_*]$ — пара невырожденных решений задач*(1.1) *и* (1.2). *Пусть, кроме того, лебегово множество $\Omega_0$ ограничено. Тогда для любого внутреннего вектора начальных условий $z_0$ имеют место следующие свойства:*

1) *матрица $M(x(t,z_0),u(t,z_0))$ не вырождена при любых $t \ge 0$,*

2) *$z(t,z_0) \in \Omega_0$ и $v(t,z_0) \in V$ при всех $t \ge 0$,*

3) *целевая функция двойственной задачи $b^\top u$ монотонно возрастает на траекториях системы* (2.5)*,*

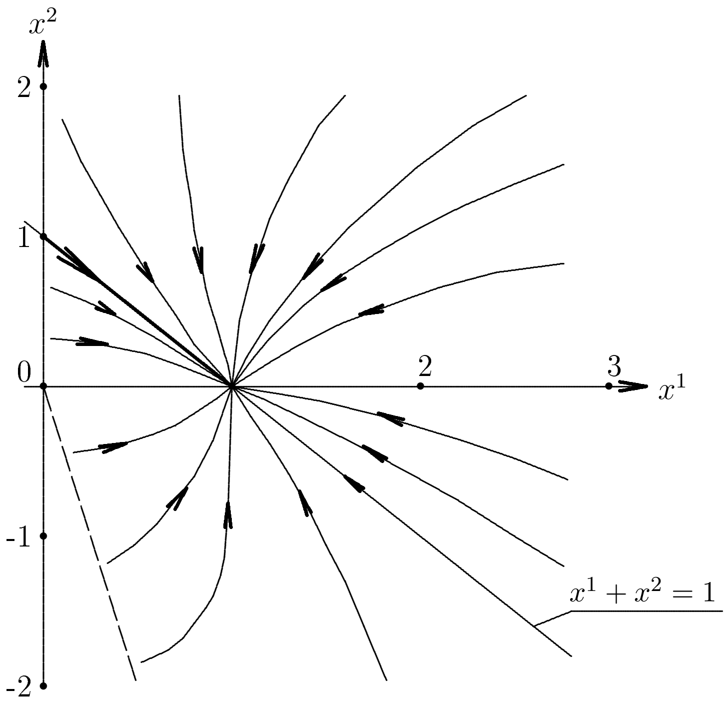
4) *пара решений $[x(t,z_0),u(t,z_0)]$ системы* (2.5) *ограничена, продолжима и сходится к паре $[x_*,u_*]$ при $t \to \infty$.*

Для иллюстрации свойств метода рассмотрим простейший пример, в котором $n = 2$, $m = 1$, $A = [1,1]$, $b = 1$, $c^\top = [-2,1]$. Очевидно, что $x_*^\top = [1,0]$, $u_* = -2$, $v_*^\top = [0,3]$, $f_* = c^\top x_* = -2$.

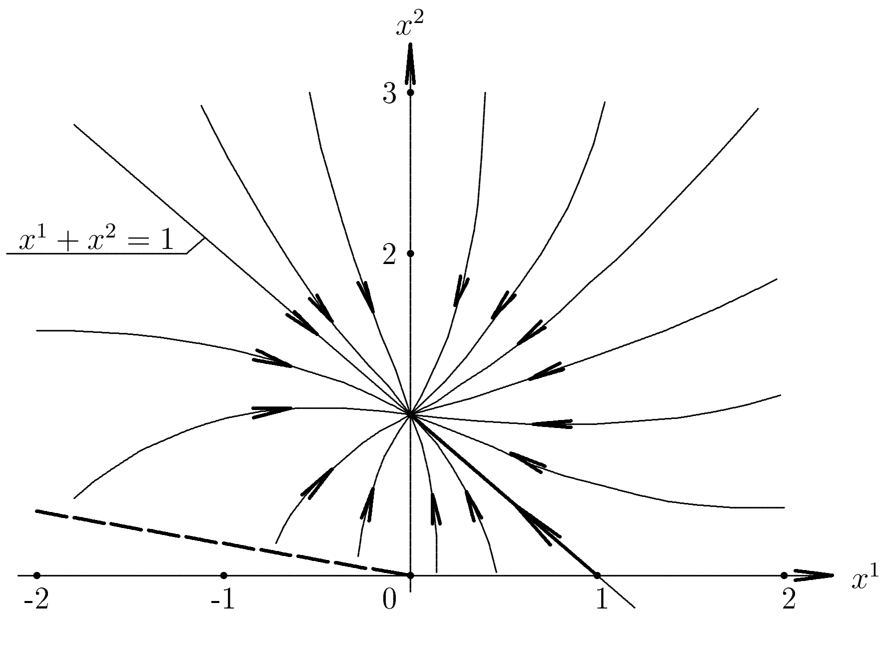
На фиг. 1 показаны фазовые траектории системы (2.1), (2.2) в плоскости $x^1$, $x^2$. В качестве начального вектора двойственных переменных взят $u_0 = -3$. При этом $v_0 = [1,4]$. Все траектории, начинающиеся из точек, имеющих строго положительные компоненты, сходятся к точке $x_*$. Штриховой линией обозначен луч $x^1v_0^1 + x^2v_0^2 = 0$, $x^1 \ge 0$, $x^2 \le 0$, соответствующий множеству точек, где матрица $M(x,u_0)$ вырождена. В процессе итераций $x$ и $v$ изменяются и этот луч вращается, приближаясь к вертикальной оси при $t \to \infty$. Из рисунка видно, что сходимость к $x_*$ имеет место при любых $x_0$, лежащих выше этого луча.

На фиг. 2 показан фазовый портрет в случае, когда $u_0 = 2$ и $v_0 = [-4,-1]$. Все траектории, начинающиеся из $\mathbb{R}^2_{++}$, сходятся к точке $x^* = [0,1]$, являющейся решением задачи поиска максимума функции $c^\top x$ на $X$. Точка $x_*$ в этом случае неустойчива, а точка $x^*$ является аттрактором.

Интегрируя систему (2.1), (2.2) по схеме Эйлера, приходим к методу (1.4). Итеративный процесс (1.4) будет близок к процессу, описываемому системой дифференциальных уравнений (2.1), (2.2), если шаги $\alpha_k$, $\tau_k$ достаточно малы. Свойства этого варианта методов были исследованы Г.В. Смирновым; в частности, он показал полиномиальность дискретного варианта метода при малых $\alpha_k$ и $\tau_k$. Вместе с тем очевидно, что метод (1.4) более эффективен, если шаги $\alpha_k$ и $\tau_k$ берутся достаточно большими. Анализ этих вариантов метода проведен ниже.




Фиг. 1




Фиг. 2

## § 3. Локальные свойства метода

Из формул (1.5) следует, что вектор $D(x)\eta$ является одним из решений системы линейных алгебраических уравнений $AD(x)\eta = b$. Если $x = x_*$, то у вектора $\eta$ компоненты, соответствующие базисным компонентам вектора $x_*$, будут равны единице, а компоненты, соответствующие небазисным компонентам, будут равны нулю. Поэтому $\eta_* = 0$, $\eta^* = 1$

$\alpha^* = \tau^* = 1$. Таким образом, в окрестности решения максимально допустимые шаги, гарантирующие неотрицательность $x$ и $v$, близки к единице. Рассмотрим простейший вариант выбора $\alpha_k$, $\tau_k$. Будем считать, что

$$\alpha_k = (1-\varrho_k)\alpha_k^*, \qquad \tau_k = (1-\varrho_k)\tau_k^*, \tag{3.1}$$

где $0 < \varrho_k < 1$. Укажем три правила выбора $\varrho_k$:

$$0 < \varrho_k < 1, \qquad \lim_{k\to\infty} \varrho_k = 0, \tag{3.2}$$

$$\varrho_k = \max\,[\varkappa\Phi_k, 1-\delta], \qquad 0 < \varkappa, \quad 0 < \delta < 1, \tag{3.3}$$

$$\varrho + k = \frac{\varkappa\Phi_k}{1+\varkappa\Phi_k}, \qquad \varkappa > 0. \tag{3.4}$$

При всех этих способах гарантируется, что $0 < 1-\varrho_k < 1$. Поэтому если $x_k > 0_n$, $v_k > 0_n$, то на следующей итерации эти векторы также строго положительны.

**Теорема 3.1.** *Пусть выполнены предположения леммы* 2.1 *и на каждой итерации шаги* $\alpha_k$ *и* $\tau_k$ *выбираются согласно* (3.1) – (3.4). *Тогда метод* (1.4) *локально по меньшей мере сверхлинейно сходится к* $[x_*, u_*]$, *т.е.*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{|x_{k+1}-x_*|}{|x_k-x_*|} = 0, \qquad \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{|u^j_{k+1}-u^j_*|}{|u^j_k-u^j_*|} = 0, \qquad 1 \le i \le n, \quad 1 \le j \le m. \tag{3.5}$$

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_k^* = \lim_{k\to\infty} \tau_k^* = 1, \qquad \lim_{k\to\infty} \mu_k = 0_m, \quad \lim_{k\to\infty} \eta_k^* = 1, \quad \lim_{k\to\infty} \eta_*^k = 0. \tag{3.6}$$

*При использовании регулировок* (3.3) *или* (3.4) *имеет место квадратичная скорость сходимости.*

**Доказательство**. Обозначим $\Delta x_k = x_k - x_*$, $\Delta v_k = v_k - v_*$, $\Delta u_k = u_k - u_*$, $\Delta z_k = [\Delta x_k, \Delta u_k]$. Тогда метод (1.4) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
\Delta x_{k+1} &= [I_n - \tau_k D(e_n-\eta_k)]\Delta x_k - \tau_k D(x_*)(e_n-\eta_k), &(3.7)\\
\Delta v_{k+1} &= [I_n - \alpha_k D(\eta_k)]\Delta v_k - \alpha D(v_*)\eta_k, &(3.8)\\
\Delta u_{k+1} &= \Delta u_k + \alpha_k\mu_k. &(3.9)
\end{aligned}$$

Предположим, что пара векторов $[x_k, u_k]$ близка к $[x_*, u_*]$ и норма вектора $\Delta z_k$ является малой величиной порядка $\varepsilon$. Предположим также для определенности, что базис в точке $x_*$ образуют первые $m$ столбцов матрицы $A$, т.е. имеет место представление (1.7), (1.8). Из (2.6) и (2.7) тогда следует, что

$$\begin{aligned}
\eta_k^B &= e_m - D^{-1}(x_*^B)\Delta x_k^B + s_1(\Delta z_k), &(3.10)\\
\eta_k^N &= D^{-1}(v_*^N)\Delta v_k^N + s_2(\Delta z_k), &(3.11)\\
\mu_k &= -\Delta u_k + s_3(\Delta z_k), &(3.12)
\end{aligned}$$

где $||s_i(\Delta z_k)|| = O(\varepsilon^2)$, $i = 1,2,3$.

Подставляя эти соотношения в правые части (3.7) – (3.9), получаем

$$\begin{aligned}
\Delta x_{k+1} &= (1-\tau_k)\Delta x_k + \theta_1(\Delta z_k), &(3.13)\\
\Delta v_{k+1} &= (1-\alpha_k)\Delta v_k + \theta_2(\Delta z_k), &(3.14)\\
\Delta u_{k+1} &= (1-\alpha_k)\Delta u_k + \theta_3(\Delta z_k). &(3.15)
\end{aligned}$$

Здесь $||\theta_i(\Delta z_k)|| = O(\varepsilon^2),\ i = 1,2,3;$ $\alpha_k$ и $\tau_k$ определяются из условий (3.1). Имеем при сделанных предположениях

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_k^*} &= \eta_k^* = 2 - \min_{1\le i\le m}\left[\frac{x_k^i}{x_*^i}\right] + O(\varepsilon)^2, \\ \frac{1}{\tau_k^*} &= \eta_*^k = 2 - \min_{1\le i\le n}\left[\frac{v_k^i}{v_*^i}\right] + O(\varepsilon)^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\alpha_k^* = 1 + O(\varepsilon), \qquad \tau_k^* = 1 + O(\varepsilon). \tag{3.16}$$

Эти формулы и (3.1) подставим в правую часть (3.13) – (3.15), после ряда преобразований получим

$$\Delta x_{k+1} = \varrho_k \Delta x_k + \tilde{\theta}_1(\Delta z_k), \qquad \Delta u_{k+1} = \varrho_k \Delta u_k + \tilde{\theta}_2(\Delta z_k),$$

где $\|\tilde{\theta}_i(\Delta z_k)\| = O(\varepsilon^2),\ i = 1,2$. С учетом (3.2) приходим к (3.5). Равенства (3.6) следуют из (3.10) – (3.12) и (3.16).

Если имеет место регулировка (3.3) или (3.4), то вблизи решения

$$\varrho_k = \gamma\left(\sum_{i=1}^{m} x_*^i \Delta v_k^i + \sum_{i=m+1}^{n} v_*^i \Delta x_k^i\right) + O(\varepsilon^2).$$

Отсюда и из (3.13) – (3.15) заключаем, что $\|\Delta z_{k+1}\| = O(\varepsilon^2)$, т.е. имеет место квадратичная скорость сходимости. Теорема доказана. □

Важным свойством метода (1.4), является возможность в некоторых случаях решать задачи (1.1) и (1.2) за конечное число шагов. Рассмотрим это свойство. Введем индексные множества, зависящие от векторов $x$ и $v$:

$$\sigma(x) = \{1 \le i \le n : \mathrm{x}^i = 0\}, \qquad \sigma(v) = \{1 \le i \le n : v^i = 0\}.$$

Если все компоненты векторов $x$ и $v$ не равны нулю, то $\sigma(x) = \emptyset$, $\sigma(v) = \emptyset$.

Обозначим через $T_k$ множество начальных пар $[x_0, u_0]$ таких, что алгоритм (1.3) при $\tau_k = \alpha_k = 1$ дает решение обеих задач (1.1) и (1.2) за $k$ итераций. Определим множества

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{[x,u] : x = x_*,\ \ \sigma(x)\cap\sigma(v) = \emptyset\}, \\ \Omega_2 &= \{[x,u] : u = u_*,\ \ \sigma(x)\cap\sigma(v) = \emptyset\}, \\ \Omega_3 &= \{[x,u] : \sigma(x) = \sigma(x_*),\ \ \sigma(x)\cap\sigma(v) = \emptyset\}. \end{aligned}$$

**Теорема 3.2.** *Предположим, что задачи* (1.1) *и* (1.2) *имеют невырожденные решения* $x_*$ *и* $u_*$. *Предположим также, что в методе* (1.3) *параметры выбираются следующим образом:* $\lambda_k = \tau_k = \alpha_k = 1$*; тогда* $\Omega_1 \subseteq T_1,\ \Omega_2 \subseteq T_1,\ \Omega_3 \subseteq T_2$.

**Доказательство**. Метод (1.3) при $\lambda_k = \tau_k = \alpha_k = 1$ упрощается и имеет вид

$$D(v_k)x_{k+1} - D(x_k)A^\top u_{k+1} = -D(x_k)A^\top u_k, \qquad Ax_{k+1} = b.$$

Поэтому если пара $[x_0, u_0] \in T_1$, то должно выполняться равенство

$$D(v_0)x_* = D(x_0)A^\top(u_* - u_0). \tag{3.17}$$

Легко показать, что любая пара начальных условий $[x_0, u_0]$ из $\Omega_1$ или $\Omega_2$ удовлетворяет (3.17).

Докажем последнее утверждение — о том, что $\Omega_3 \subseteq T_2$. Пусть для точки $x_0$ имеет место представление, аналогичное (1.7), (1.8), т.е. $x_0^B \neq 0_m$, $x_0^N = 0_d$, тогда

$$D(v_0^B)x_1^B - D(x_0^B)B^\top u_1 = -D(x_0^B)B^\top u_0, \qquad D(v_0^N)x_1^N = 0_d, \qquad Bx_1^B + Nx_1^N = b.$$

Все компоненты вектора $v_0^B$ не равны нулю, поэтому

$$x_1^N = 0_d, \quad x_1^B = B^{-1}b = x_*^B, \quad u_1 = u_0 + (B^\top)^{-1}D^{-1}(x_0^B)D(v_0^B)x_*^B.$$

Таким образом, за один шаг получаем точный вектор $x = x_*$.

Полагая $k = 1$, находим

$$D(v_1^B)x_2^B - D(x_1^B)B^\top u_2 = -D(x_1^B)B^\top u_1, \qquad D(v_1^N)x_2^N = 0_d, \qquad Bx_2^B + Nx_2^N = b.$$

Решение этой системы очевидно:

$$\begin{array}{rcl} x_2^B & = & x_*^B, \quad x_2^N = 0_d, \quad u_2 = (B^\top)^{-1}c^B, \quad v_2^B = 0_m, \\ v_2^N & = & c^N - N^\top(B^\top)^{-1}c^B = v_*^N > 0_d, \end{array}$$

следовательно, найдено точное решение обеих задач. Теорема доказана. $\square$

Полученный результат имеет глобальный характер. Если, например, $[x_0, u_0] \in \Omega_2$, то вектор $x_0$ может иметь даже отрицательные компоненты.

## § 4. Метод внутренней точки с наискорейшим спуском

Правила регулирования шагов $\alpha_k$ и $\tau_k$ во внутренней точке $z_k^\top = [x_k^\top, v_k^\top]$ будем определять из решения вспомогательных задач. Чтобы точка $z_{k+1}^\top$ была внутренней, потребуем выполнения условий

$$0 \le \alpha_k \le \omega\alpha_k^* = \bar{\alpha}_k, \qquad 0 \le \tau_k \le \omega\tau_k^* = \bar{\tau}_k, \tag{4.1}$$

где $0 < \omega < 1$. Для простоты предположим, что $\alpha_k^*$ и $\tau_k^*$ конечны. Из (4.1) и (1.11) следует неравенство

$$\frac{1}{\bar{\alpha}_k} + \frac{1}{\bar{\tau}_k} \ge \frac{1}{\omega}\,. \tag{4.2}$$

Шаги $\alpha_k$ и $\tau_k$ при условии (4.1) целесообразно выбирать так, чтобы по возможности минимизировать величину $\Phi_{k+1}$ и норму невязки $\|Ax_{k+1} - b\|$, определяемые по формулам (1.10), (1.9). Опуская для упрощения записи индекс $k$ и вводя обозначения $L = \mu^\top Ax$, $M = \mu^\top b$, $N = ||Ax - b||$, приходим к двум критериям:

$$\varphi(\alpha, \tau) = \Phi - L\alpha + (L - \Phi)\tau + (L - M)\alpha\tau, \qquad \varphi_2(\tau) = N|1 - \tau|.$$

Объединим оба критерия в один, используя их линейную свертку. Получим вспомогательную задачу: найти

$$\varphi^0(\bar{\alpha}, \bar{\tau}) = \min_{0 \le \alpha \le \bar{\alpha},\ 0 \le \tau \le \bar{\tau}} \varphi(\alpha, \tau), \tag{4.3}$$

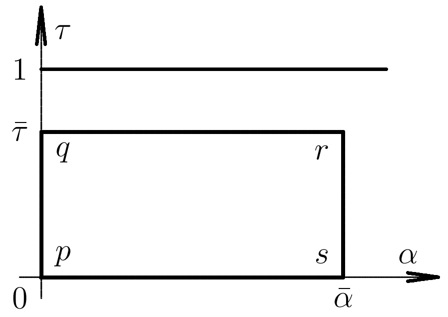
$$\varphi(\alpha, \tau) = \varphi_1(\alpha, \tau) + \varphi_2(\tau). \tag{4.4}$$

Решение задачи (4.3) обозначим $\alpha^0$, $\tau^0$. Считаем, что $b \neq 0_m$, поэтому $M > 0$. Кроме того, будем принимать во внимание, что на рассматриваемом множестве $\varphi_1(\alpha, \tau) > 0$.

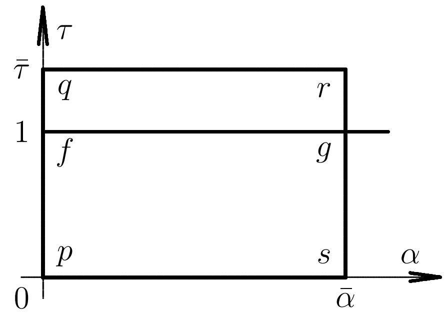
В общем случае функция $\varphi(\alpha,\tau)$ кусочно-билинейна. Поэтому среди экстремальных точек хотя бы одна будет вершиной одного из прямоугольников, являющихся областями ее билинейности.

В случае $\bar\tau < 1$ функция $\varphi(\alpha,\tau)$ билинейна и выражается формулой

$$\varphi(\alpha,\tau) = \Phi + N - L\alpha + (L - \Phi - N)\tau + (L - M)\alpha\tau, \tag{4.5}$$




Фиг. 3




Фиг. 4

областью ее определения является прямоугольник $pqrs$ (фиг. 3). Запишем значения $\varphi(\alpha,\tau)$ в его вершинах:

$$\varphi_p = \Phi + N, \qquad \varphi_q = (\Phi + N)(1 - \bar\tau) + L\bar\tau, \tag{4.6}$$

$$\varphi_r = (\Phi + N)(1 - \bar\tau) + L(\bar\tau - \bar\alpha) + (L - M)\bar\alpha\bar\tau, \qquad \varphi_s = \Phi + N - L\bar\alpha. \tag{4.7}$$

В точке $p$ не может достигаться $\min\varphi$, так как при $L > 0$ верно $\varphi_s < \varphi_p$, а если $L \le 0$, то $\varphi_q < \varphi_p$. Вид решения зависит от поведения функции $\varphi$ на отрезках $qr$ и $rs$. Учитывая, что

$$\frac{\partial\varphi(\alpha,\bar\tau)}{\partial\alpha} = -L(1-\bar\tau) - M\bar\tau, \quad \frac{\partial\varphi(\bar\alpha,\tau)}{\partial\tau} = -(\Phi + N + M\bar\alpha) + L(1+\bar\alpha),$$

находим решение задачи. Оно отражено в табл. 1, значения $\varphi^0(\bar\alpha,\bar\tau)$ определяются по формулам (4.6), (4.7).

Таблица 1

| | $(\partial\varphi)/(\partial\alpha)\vert_{\tau=\bar\tau} > 0$ | $(\partial\varphi)/(\partial\alpha)\vert_{\tau=\bar\tau} = 0$ | $(\partial\varphi)/(\partial\alpha)\vert_{\tau=\bar\tau} < 0$ |
|---|---|---|---|
| $(\partial\varphi)/(\partial\tau)\vert_{\alpha=\bar\alpha} < 0$ | точка $q$ | отрезок $qr$ | точка $r$ |
| $(\partial\varphi)/(\partial\tau)\vert_{\alpha=\bar\alpha} = 0$ | не реализуется | | отрезок $rs$ |
| $(\partial\varphi)/(\partial\tau)\vert_{\alpha=\bar\alpha} > 0$ | | | точка $s$ |

В случае $\bar\tau \ge 1$ при $\tau \le 1$ функция $\varphi(\alpha,\tau)$ имеет вид (4.5), а при $\tau \ge 1$

$$\varphi(\alpha,\tau) = \Phi - N - L\alpha + (L - \Phi + N)\tau + (L - M)\alpha\tau.$$

Функция $\varphi(\alpha,\tau)$ кусочно-билинейна. Подобластями билинейности являются прямоугольники $pfgs$ и $fqrg$ (фиг. 4). Найдем значения $\varphi(\alpha,\tau)$ в их вершинах:

$$\varphi_p = \Phi + N, \qquad \varphi_f = L, \qquad \varphi_q = (\Phi - N)(1 - \bar\tau) + L\bar\tau, \tag{4.8}$$

$$\varphi_r = (\Phi - N + L\bar{\alpha})(\bar{\tau} - 1) + (L - M\bar{\alpha})\bar{\tau}, \quad \varphi_g = L - M\bar{\alpha}, \quad \varphi_s = \Phi + N - L\bar{\alpha}, \tag{4.9}$$

Вершина $p$ не может быть точкой минимума $\varphi(\alpha, \tau)$, так как, ввиду $\varphi_1(\alpha, \tau) > 0$, должно быть $L > 0$ и поэтому $\varphi_s < \varphi_p$. Минимум $\varphi(\alpha, \tau)$ не может достигаться и в вершине $f$, так как $\varphi_g < \varphi_f$. Анализируя поведение $\varphi(\alpha, \tau)$ на сторонах $qr$ и $rs$, используя соотношения

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\right)_{\tau=\bar{\tau}} &= L(\bar{\tau} - 1) - M\bar{\tau}, \\
\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\right)_{\substack{\alpha=\bar{\alpha} \\ \tau>1}} &= L(1 + \bar{\alpha}) + N - (\Phi + M\bar{\alpha}) \geq \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\right)_{\substack{\alpha=\bar{\alpha} \\ \tau<1}} = \\
&= L(1 + \bar{\alpha}) - (\Phi + N + M\bar{\alpha}),
\end{aligned}$$

получаем возможные варианты решения задачи. Они отражены в табл. 2, значения $\varphi^0(\bar{\alpha}, \bar{\tau})$ находятся по формулам (4.8), (4.9).

Таблица 2

| | $(\partial\varphi)/(\partial\alpha)\vert_{\tau=\bar{\tau}} > 0$ | $(\partial\varphi)/(\partial\alpha)\vert_{\tau=\bar{\tau}} = 0$ | $(\partial\varphi)/(\partial\alpha)\vert_{\tau=\bar{\tau}} < 0$ |
|---|---|---|---|
| $(\partial\varphi)/(\partial\tau)\vert_{\alpha=\bar{\alpha},\tau>1} < 0$ | точка $q$ | отрезок $qr$ | точка $r$ |
| $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right\vert_{\substack{\alpha=\bar{\alpha}\\ \tau<1}} < 0 = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right\vert_{\substack{\alpha=\bar{\alpha}\\ \tau>1}}$ | точка $q$ | ломаная $qrg$ | отрезок $rg$ |
| $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right\vert_{\substack{\alpha=\bar{\alpha}\\ \tau<1}} = 0 = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right\vert_{\substack{\alpha=\bar{\alpha}\\ \tau>1}}$ | не реализуется | не реализуется | отрезок $rs$ |
| $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right\vert_{\substack{\alpha=\bar{\alpha}\\ \tau<1}} < 0 < \left.\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right\vert_{\substack{\alpha=\bar{\alpha}\\ \tau>1}}$ | $\arg\min\{\varphi_q, \varphi_g\}$ | точка $g$ | точка $g$ |
| $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right\vert_{\substack{\alpha=\bar{\alpha}\\ \tau<1}} = 0 < \left.\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right\vert_{\substack{\alpha=\bar{\alpha}\\ \tau>1}}$ | $\arg\min\{\varphi_q, \varphi_{sg}\}$ | отрезок $sg$ | отрезок $sg$ |
| $0 < (\partial\varphi)/(\partial\tau)\vert_{\alpha=\bar{\alpha},\tau<1}$ | $\arg\min\{\varphi_q, \varphi_s\}$ | точка $s$ | точка $s$ |

Таким образом, если следовать полученным оптимальным стратегиям выбора шагов $\alpha_k$ и $\tau_k$, то в любом случае шаг $\alpha_k$ можно принять равным 0 либо $\bar{\alpha}$. Шаг $\tau_k$ в случае $\bar{\tau} \geq 1$, помимо крайних значений 0 и $\bar{\tau}$, может также принимать промежуточное значение 1. Метод внутренней точки (1.4) с шагами $\alpha_k$ и $\tau_k$, выбираемыми из решения вспомогательной задачи (4.4), назовем *методом наискорейшего спуска.*

Оценим величину $\varphi^0(\bar{\alpha}, \bar{\tau})$ в предположении, что

$$||\eta_k||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |\eta_k^i| \leq C.$$

В этом случае согласно (1.11) и (4.1) имеем

$$\bar{\alpha} \geq \frac{\omega}{C}, \qquad \bar{\tau} \geq \frac{\omega}{1 + C}. \tag{4.10}$$

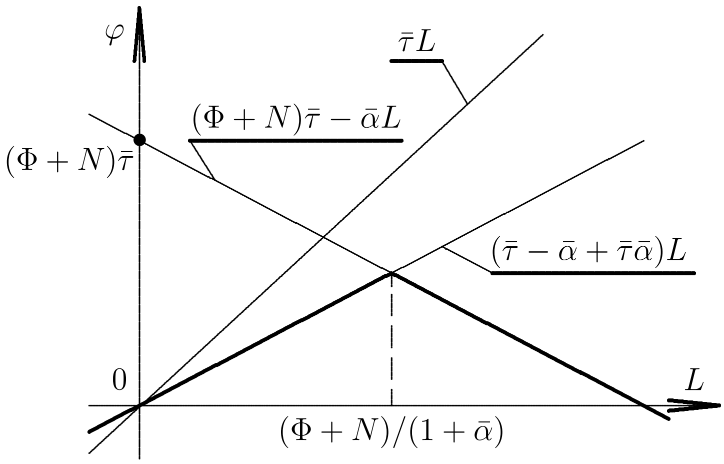
Найдем

$$\psi^* = \sup_{\bar\alpha \geq \omega/C,\ \bar\tau \geq \omega/(1+C)} \varphi^0(\bar\alpha, \bar\tau).$$

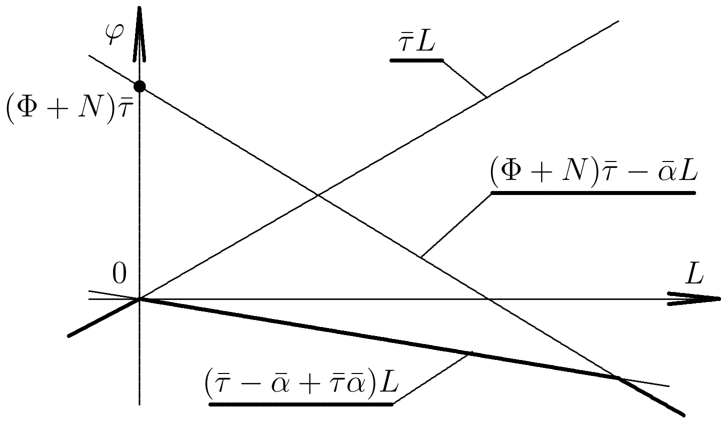
Воспользуемся тем, что $\varphi^0(\bar\alpha,\bar\tau)$ не должно превышать значение $\varphi(\alpha,\tau)$ в любой из допустимых точек $[\alpha,\tau]$.

Для случая $\bar\tau \geq 1$ в качестве таких точек возьмем $s$ и $f$:

$$\varphi^0(\bar\alpha,\bar\tau) \leq \min\{\varphi_s,\varphi_f\} \leq \max_L \min\{L, \Phi+N-\bar\alpha L\} = \frac{\Phi+N}{1+\bar\alpha}. \tag{4.11}$$




Фиг. 5




Фиг. 6

Для случая $\bar\tau < 1$ обратимся к точкам $q$, $r$, $s$. Так как $M > 0$, то $\varphi_r < (\Phi+N)(1-\bar\tau)+$ $+(\bar\tau-\bar\alpha+\bar\alpha\bar\tau)L$. Поэтому

$$\begin{aligned}\varphi^0(\bar\alpha,\bar\tau) &\leq \min\{(\Phi+N)(1-\bar\tau)+L\bar\tau, (\Phi+N)(1-\bar\tau)+(\bar\tau-\bar\alpha+\bar\alpha\bar\tau)L, \Phi+N-\bar\alpha L\} \\ &\leq (\Phi+N)(1-\bar\tau)+\max_L \min\{\bar\tau L, (\bar\tau-\bar\alpha+\bar\alpha\bar\tau)L, (\Phi+N)\bar\tau-\bar\alpha L\}.\end{aligned} \tag{4.12}$$

Из $\bar\tau \leq 1$ вытекает, что $\bar\tau-\bar\alpha+\bar\alpha\bar\tau \leq \bar\tau$. Таким образом, если $\bar\tau-\bar\alpha+\bar\alpha\bar\tau \geq 0$, то максимум по $L$ находится из условия $(\bar\tau-\bar\alpha+\bar\alpha\bar\tau)L = (\Phi+N)\bar\tau-\bar\alpha L$ и достигается в точке $L = (\Phi+$

$+N)/(1+\bar{\alpha})$, как показано на фиг. 5. Подставляя данное значение $L$ в правую часть (4.12), приходим к выводу, что оценка (4.11) сохраняется и при этом предположении. Случаю $\bar{\tau} - \bar{\alpha} + \bar{\alpha}\bar{\tau} < 0$ соответствует ситуация, изображенная на фиг. 6. Максимум определяется из условия $\bar{\tau}L = (\bar{\tau} - \bar{\alpha} + \bar{\alpha}\bar{\tau})L$ и достигается в нуле. Вместо (4.11) выполняется

$$\varphi^0(\bar{\alpha}, \bar{\tau}) \le (\Phi + N)(1 - \bar{\tau}). \tag{4.13}$$

Из (4.1), (4.11) и (4.13) следует, что

$$\varphi^* \le \nu(\Phi + N), \qquad \nu = \max\left\{\max_{\bar{\alpha}\ge\omega/C} \frac{1}{1+\bar{\alpha}}, \max_{\bar{\tau}\ge\omega/(1+C)} (1 - \bar{\tau})\right\} = 1 - \frac{\omega}{1+C}. \tag{4.14}$$

Полученная оценка недостижима и неулучшаема. Недостижимость ($\varphi^0(\bar{\alpha}, \bar{\tau}) < \varphi^*$) вытекает из предыдущих рассуждений, а неулучшаемость видна из следующего примера: полагая $\Phi = N = 1$, $L = 0$, $M \to 0$, $\omega = 0.8$, $C = 0.6$, $\alpha^* = 1.875$, $\tau^* = 0.625$ и убеждаясь, что выполнены условия (4.2), (4.10), $\bar{\tau} < 1$, что оптимальна точка $r$, с помощью (4.6), (4.7) и (4.14) находим $\varphi^0 = 1 - 3M/4$, $\nu(\Phi + N) = 1$, т.е. $\lim\limits_{M\to 0} = \nu(\Phi + N)$.

На основании (4.14), используя определение $\varphi^*$, получаем

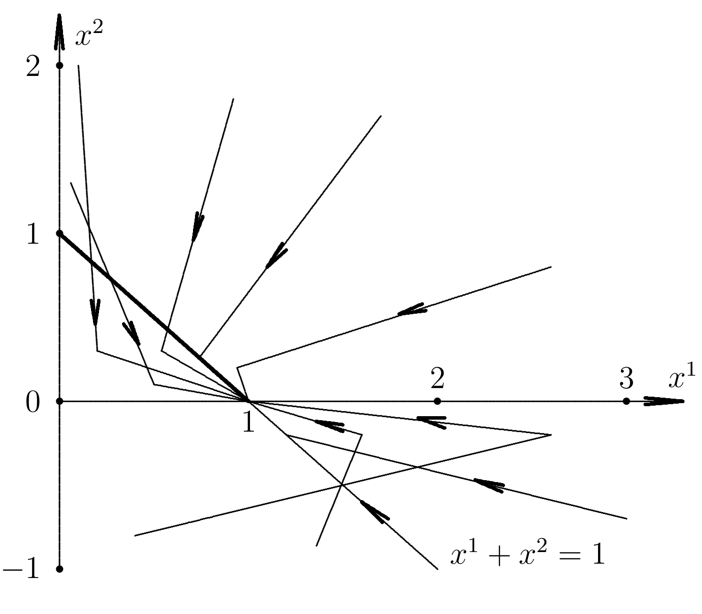
$$\Phi_{k+1} + \|Ax_{k+1} - b\| \le \nu(\Phi_k + \|Ax_k - b\|).$$

Это неравенство позволяет оценить число шагов, достаточных для попадания точки $[x_k, u_k]$ в некоторую окрестность решения задач (1.1) и (1.2).

**Теорема 4.1.** *Пусть $z_0 = [x_0, u_0]$ — внутренняя точка, и пусть последовательности $\{x_k\}$ и $\{u_k\}$, порождаемые методом наискорейшего спуска, таковы, что $\|\eta_k\|_\infty \le C$ для всех $k$. Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ функция $\Phi(x, u) = v^\top(u)x + \|Ax - b\|$ становится меньше $\varepsilon$ не более чем за*

$$K = \left\lceil \frac{1+C}{\omega} \ln \frac{\Phi(x_0, u_0)}{\varepsilon} \right\rceil$$

*итераций, где $\lceil a \rceil$ — наименьшее целое, приближающее число $a$ сверху.*




Фиг. 7

На фиг. 7 показано решение примера из § 2 методом наискорейшего спуска. Параметр $\omega$ полагался равным 0.9. Отметим, что при приближении $\omega$ к единице количество итераций, необходимых для решения задачи с заданной точностью, уменьшалось, доходя для некоторых начальных точек до двух.

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА


1. *Ортега Д., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975.

2. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980.

3. *Евтушенко Ю.Г.* Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982.

4. *Iri M., Imai H.* A multiplicative barrier function method for linear programming // Algorithmica, 1986, N° 1, pp. 455–482.

5. *De Ghellink G., Vial J.-P.* A polynomial Newton method for linear programming // Algorithmica, 1986, N° 1, pp. 425–453.

6. *Renegar J.* A polynomial-time algorithm, based on Newton's method for linear programming // Math. Program., 1988, v. 40, N° 1, pp. 55–94.

7. *Gonzaga C.C.* Path-following methods for linear programming // SIAM Rev., 1992, v. 34, N° 2, pp. 167–224.

8. *Kojima M., Mizuno S., Yoshise A.* A primal-dual interior point method for linear programming // Progress Math. Program. Interior Point and Relative Methods / Ed. N. Megiddo. Berlin: Springer-Veriag, 1989. Ch.2.

9. *Monteiro R.C., Adler I.* Interior path-following primal-dual algorithm, part I: Linear programming // Math. Program., 1989, v. 44, pp. 43–66.

10. *McShane K., Monma C., Shanno D.* An implementation of a primal-dual interior point method for linear programming // ORSA J. Comput., 1989, N° 1, pp. 70–83.

11. *Ye Y., Tapia R., Zhang Y.* A superlinear convergent $O(\sqrt{n}L)$-iteration algorithm for linear programming: Techn. Rept. TR91-22, 1991, Rice Univ., Houston, Texas.

12. *Jansen B., Roos C., Terlaky T., Vial J.-Ph.* Primal-dual target-following algorithms for linear programming. Techn. Rept. 93–107, Fac. Techn. Math. and Informatics, TU Delft, 1993.

13. *Еремин И.И., Астафьев Н.Н.* Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1976.

14. *Evtushenko Yu.G., Zhadan V.G.* The space transformation technique in mathematical programming // System Modelling and Optimizat., ed. P. Kall. Lect. Notes In Control and Information Sci. 180. Proc. 15th IFIP Conf. Springer-Veriag, 1991.

15. *Evtushenko Yu.G., Zhadan V.G.* Stable barrier-projection and barrier-newton methods in nonlinear programming // Optimizat. Meth. and Software, 1994, v. 3, pp. 237–256.

16. *Евтушенко Ю.Г., Жадан В.Г.* Барьерно-проективные и барьерно-ньютоновские численные методы оптимизации (случай нелинейного программирования) // Сообщ. по вычисл. матем., М.: ВЦ АН СССР, 1991.

17. *Евтушенко Ю.Г., Жадан В.Г.* Барьерно-проективные и барьерно-ньютоновские численные методы оптимизации (случай линейного программирования) // Сообщ. по вычисл. матем., М.: ВЦ РАН, 1991.

18. *Ye Y.* Line search in potential reduction algorithms for linear programming // Dept Management Sci. Iowa City, IA: Univ. Iowa, 1989.

19. *El-Bakly A.S., Tapia R.A., Zhang Y.* A study of indicators for identifing zezo variables in interior-point methods: Techn. Rept. TR91-15, 1991. Rice Univ., Houston, Texas.