

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

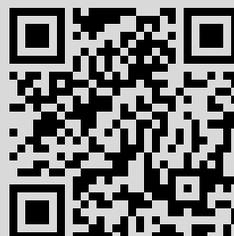
С. В. Курочкин, Численное нахождение краевого условия вблизи особенности, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1997, том 37, номер 5, 543–552

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 193.233.212.50

24 марта 2015 г., 13:44:02



УДК 519.624

ЧИСЛЕННОЕ НАХОЖДЕНИЕ КРАЕВОГО УСЛОВИЯ ВБЛИЗИ ОСОБЕННОСТИ¹⁾

© 1997 г. С. В. Курочкин

(Москва)

Поступила в редакцию 18.01.96 г.
Переработанный вариант 17.04.96 г.

Предложен численный метод, позволяющий выполнять отход от особенности для сингулярной краевой задачи для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, не используя аналитических разложений матрицы системы. Установлены условия сходимости, и получены оценки. Представлены результаты численных экспериментов.

1. ВВЕДЕНИЕ

Многие краевые задачи математической физики при разделении переменных приводят к краевым задачам для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$y'(x) = A(x, \dots)y(x), \quad 0 < x < 1, \quad (1.1)$$

где на одном или обоих концах интервала матрица A имеет особенность $\|A(x, \dots)\| \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 0$. В (1.1) функция $y(x)$ есть n -мерный вектор-решение, многоточием обозначена зависимость от спектрального параметра и физических параметров задачи. При постановке краевых условий (к. у.) для уравнения (1.1) нужно учитывать как требования исходной задачи, так и структуру особенности матрицы системы. Наиболее естественным является условие ограниченности решения вблизи особенностей. Однако для многих реальных задач такая постановка к. у. невозможна уже по той причине, что она не дает нужного числа условий на том или другом конце (обычно бывает заранее известно, сколько линейно-независимых условий должно быть на каждом конце; чаще всего – поровну). В связи с этим было введено понятие допустимого к. у. [1], которое адекватно описывает многие ситуации. Ряд задач, в том числе взятых из практики, не укладывается и в эту схему, что, в свою очередь, привело к введению более общего типа гладких к. у. [2]. Постановка задачи оказывается тем сложнее, чем сложнее структура особенности, и окончательных результатов здесь пока не получено. В то же время анализ всех имеющихся результатов, а также опыт решения практических задач выявляет определенные качественные закономерности, которым в каждом случае подчинено искомое к. у. (разумеется, если задача поставлена грамотно с физической точки зрения; сюда входит требование о том, чтобы число к. у. на каждом конце было указано верно). Среди всех к. у. фиксированной размерности для нужного характерно следующее:

а) удовлетворяющие ему решения системы (1.1) при $x \rightarrow 0$ растут наименее сильно (или убывают быстрее других; выполнение этого свойства, как правило, и берется в качестве критерия отбора к. у.);

б) подпространство в $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$, образованное значениями решений (1.1), удовлетворяющих этому к. у., при $x \rightarrow 0$ ведет себя (как функция x) наиболее гладким образом;

в) перенесение (например, по методу прогонки, см. ниже) какого-либо к. у. в направлении от особенности осуществляется наиболее устойчивым образом в окрестности искомого к. у.

Рассмотрим теперь методы, с помощью которых в конкретных задачах приближенно определяются линейные условия в некоторой близкой к особенности точке x_0 , выполнение которых эквивалентно выполнению сингулярного к. у. (так называемый отход от особенности), с тем чтобы после этого решать эквивалентную краевую задачу на более узком интервале, уже не содержащую особенностей. Во всех упомянутых случаях такие методы имеют аналитический характер и включают в себя предположение о том, что матрица $A(x)$ раскладывается в окрестности $x = 0$ в (сходящийся или асимптотический) ряд Лорана (если это не так, то заменой переменных пыта-

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-00951).

ются привести задачу к такому виду), исследование совместной жордановой структуры старшего члена в разложении Лорана и, вообще говоря, нескольких последующих членов, выписывание разложения искомого к. у. в виде (сходящегося или асимптотического) ряда по неотрицательным степеням x , оценку членов ряда и приближенную замену его частичной суммой.

К настоящему времени методы такого типа развиты для различных видов особенностей, в том числе и довольно сложных, и хорошо зарекомендовали себя при решении практических задач [3]. В то же время этот подход связан с целым рядом существенных ограничений, в частности таких:

1) точную постановку краевого условия и отход от особенности может проделать только специалист в этой области. Возможность того, что это мог бы сделать самостоятельно специалист в предметной области, практически исключена;

2) в любом случае эта процедура связана с большим объемом аналитических выкладок. При этом для каждой новой задачи всю работу нужно делать заново. Не для любой задачи это удается сделать;

3) упомянутое выше предположение о том, что особенность должна быть (или приводиться к) особенностью типа полюса; необходимость иметь в явном виде несколько (заранее неизвестно сколько) первых матричных коэффициентов разложения,

4) в реальных задачах матрица A обычно зависит от спектрального и ряда физических параметров. При буквальном следовании процедурам известных методов пришлось бы поступать так: брать конкретные числовые значения этих параметров, подставлять их в A и исследовать полученные числовые матрицы – коэффициенты ряда Лорана; для новых наборов значений – делать все заново (при этом жордановы структуры могут поменяться), и т.д. Естественно, что на практике стараются все проделать в символьном виде. В каких-то частных случаях это может получиться, однако попытка решить вопрос по существу неизбежно выводит на трудноразрешимые алгебраические вопросы.

Все эти обстоятельства делают очевидной необходимость разработки других методов решения рассматриваемой задачи, которые не включали бы в себя тонкую и трудную аналитическую часть, а были бы численными методами в строгом смысле этого слова. В разделе 2 этой работы предложен метод приближенного нахождения к. у. вблизи особенности, который в принципе не обращается ни к каким аналитическим представлениям матрицы A , а использует только ее значения для конкретных значений аргумента (и параметров). Таким образом, матрица может быть задана, например, просто подпрограммой на ФОРТРАНе. Доказана применимость метода, и получены оценки для случая иррегулярной особенности с отсутствием собственных значений (с. з.) на мнимой оси y главной матрицы. В разделе 3 представлены результаты расчетов по предложенному методу для ряда конкретных задач, начиная от простых и вплоть до не поддававшихся до сих пор исследованию.

2. ФОРМУЛИРОВКА И ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА

Итак, рассмотрим линейную систему о. д. у.

$$y'(x) = A(x)y(x), \quad 0 < x < 1, \quad (2.1)$$

где вещественная²⁾ $(n \times n)$ -матрица A непрерывно зависит от x (зависимость от параметров для дальнейшего не играет роли), причем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \|A(x)\| = \infty. \quad (2.2)$$

В точке $x = 1$ матрица A также может иметь особенность, которая исследуется аналогично, или не иметь ее, и тогда предполагается, что при $x = 1$ поставлены явные к. у. Сингулярное к. у. в точке $x = 0$ состоит в том, что удовлетворяющие ему вектор-решения $y(x)$ должны принадлежать некоторому (в данном случае – подлежащему отысканию) k -мерному подпространству в n -мерном пространстве всех решений системы (2.1). Для любого фиксированного $x_0 \in (0, 1)$ значения этих решений в точке $x = x_0$ образуют k -мерное подпространство в \mathbb{R}^n . Задача приближенного отыскания к. у. в окрестности особенности состоит в том, чтобы при x_0 , близком к нулю, приближенно найти это подпространство.

²⁾ Случай комплексной задачи вида (2.1) приводится к вещественному стандартным о вещественным (с удвоением размерности задачи). Голоморфность A по x и спектральному параметру, если она и имеет место, в данном методе не используется.

Множество всех k -мерных подпространств в \mathbb{R}^n имеет естественную структуру дифференцируемого многообразия. Оно называется многообразием Грассмана и обозначается $G(n, k)$. Некоторые недавно полученные результаты свидетельствуют о том, что прямое обращение к топологическим, метрическим и аналитическим свойствам $G(n, k)$ и его отображений, порожденных системой (2.1), позволяет решить ряд вопросов, касающихся краевых задач для линейных систем о. д. у., долгое время до того не поддававшихся решению (см. [2], [4], [5]). Этот аппарат будет использоваться и в настоящей работе. Первичные сведения о $G(n, k)$ можно найти, например в [6], более подробное изложение – в [7]. Сформулируем некоторые из свойств $G(n, k)$, необходимых для дальнейшего изложения. $G(n, k)$ – связное компактное многообразие размерности $k \times (n - k)$. Стандартный набор карт в $G(n, k)$ можно получить, выбрав в \mathbb{R}^n какой-либо базис e_1, \dots, e_n и рассмотрев множества $U_{i_1 \dots i_k} = \{L \in G(n, k): L \text{ проектируется на } \text{span}(e_{i_1} \dots e_{i_k}) \text{ вдоль остальных векторов базиса без вырождения}\}$. Элемент $L \in G(n, k)$ можно задать, взяв какие-нибудь k линейно-независимых векторов в L . Если $L \in U_{i_1 \dots i_k}$, то L однозначным образом может быть задано $(n \times k)$ -матрицей, где в строках $i_1 \dots i_k$ стоит единичная $(k \times k)$ -матрица, а в остальных строках – произвольная $[(n - k) \times k]$ -матрица α . В $G(n, k)$ можно ввести риманову метрику; например, в точке $\text{span}(e_{i_1} \dots e_{i_k})$

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n-k} \sum_{j=1}^k \alpha_{ij}^2.$$

Она будет инвариантна относительно ортогональных преобразований пространства \mathbb{R}^n , если базис $(e_1 \dots e_n)$ ортонормированный. Метрику в $G(n, k)$ можно ввести через геодезические или же взять в качестве расстояния между двумя подпространствами в \mathbb{R}^n раствор между ними (см., например, [8]). В силу компактности $G(n, k)$, все эти метрики эквивалентны.

Ключевую роль в дальнейшем играет следующая конструкция. Пусть τ, t – какие-то две точки интервала $(0, 1)$. Система (2.1) порождает диффеоморфизм Φ_τ многообразия $G(n, k)$ на себя:

$$\Phi_\tau(L) = \{y(t): y(\cdot) - \text{решения (2.1), удовлетворяющие условию } y(\tau) \in L\}. \tag{2.3}$$

С точки зрения численного решения задачи очень важным является то обстоятельство, что отображение Φ_τ может быть реализовано численно устойчиво. По существу, это хорошо известный факт, только обычно при его формулировке не упоминают явно многообразие $G(n, k)$, а говорят об устойчивом переносе к. у. (или подпространства решений). Для такого переноса разработаны различные методы дифференциальной прогонки (см., например, [9, гл. IX, § 6])³⁾.

Общая схема метода. Берем $\tau, t \in (0, 1)$ так, что $\tau < t$ и обе точки расположены близко к нулю (т.е. к особенности). Путем итераций ищем устойчивую неподвижную точку преобразования Φ_τ . Ее наличие и единственность (соответственно, отсутствие или неединственность) свидетельствуют о правильности (соответственно, неправильности) постановки сингулярной краевой задачи. Найденный элемент $L_{\tau t}^{\text{fix}} \in G(n, k)$ является приближенным результатом переноса к. у. из особенности в точку t .

Применение метода состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Взять программу какого-либо метода прогонки. Составить для нее процедуру, вычисляющую матрицу $A(x)$ в конкретной задаче.

Шаг 2. Взять точки τ, t , как сказано выше (см. также замечание 1). Выбрать начальное приближение для к. у. и записать его в том виде, который требуется для выбранного на шаге 1 метода прогонки. Для определенности будем считать, что к. у. задается ортонормированным базисом (u_1^0, \dots, u_k^0) в соответствующем подпространстве решений. Если из физических соображений известно какое-то, пусть даже грубое, приближение, следует взять его (от удачного выбора зависит скорость сходимости).

Шаг 3. С помощью прогонки перенести условие из точки $x = \tau$ в точку $x = t$. Пусть при этом получится базис (u_1^1, \dots, u_k^1) в соответствующем подпространстве. Затем поставить к. у., отвеча-

³⁾ Предлагаемый метод несложно переформулировать и для случая, когда краевая задача решается каким-либо разностным методом. Суть явления не зависит от того, какая прогонка – дифференциальная или разностная – используется для переноса к. у.

ющее (u_1^1, \dots, u_k^1) , опять в точке $x = \tau$ и снова перенести его в точку $x = t$; при этом получится базис (u_1^2, \dots, u_k^2) . Продолжать итерации, всякий раз вычисляя, насколько сильно отличаются друг от друга подпространства, полученные на текущей и на предыдущей итерациях. Здесь важно находить расстояние именно между подпространствами, натянутыми на (u_1^m, \dots, u_k^m) и $(u_1^{m-1}, \dots, u_k^{m-1})$, а не между самими векторами базисов⁴⁾. Кроме тех метрик в $G(n, k)$, о которых уже говорилось, можно использовать любую разумную меру близости двух подпространств. Например, можно находить ортогональный проектор P^m на подпространство, натянутое на (u_1^m, \dots, u_k^m) , и вычислять величину

$$\max_{i=1, 2, \dots, k} \|P^{m-1} u_i^m - u_i^m\|.$$

Шаг 4. Прodelать столько итераций, чтобы расстояние между подпространствами, полученными на двух последовательных итерациях, стало достаточно малым. Сингулярное к. у. можно теперь приближенно заменить на к. у. в точке $x = t$, соответствующее подпространству, полученному на последней итерации. Если же сходимости нет или результат неустойчив к шевелениям t и начального приближения, то следует уточнить постановку сингулярной краевой задачи.

Исследуем возможность и результаты применения метода в случае, когда матрица системы (2.1) имеет при $x \rightarrow 0$ особенность следующего вида:

$$A(x) = (A_0 + A_1 x + \dots)/x^r, \quad (2.4)$$

где r целое, $r \geq 2$, бесконечная сумма асимптотическая и матрица A не имеет с. з. на мнимой оси. Эта задача (с заменой особенности $x = 0$ на $x = \infty$) была исследована в работе [10], где доказана корректность постановки сингулярного к. у. ограниченности решения в окрестности особенности и получены формулы для аналитического "отгона" этого к. у. от особенности. Пусть суммарная кратность корневых подпространств матрицы A_0 , соответствующих с. з. с положительной мнимой частью, равна k , $0 < k < n$.

Предложение 1. При достаточно малых τ, t отображение $\Phi_\tau: G(n, k) \rightarrow G(n, k)$ имеет устойчивую неподвижную точку. Расстояние от соответствующего ей подпространства до подпространства, образованного значениями ограниченных решений (2.1) в точке t , есть $O(\tau^r)$.

В доказательстве будет использоваться следующая несложно доказываемая из линейной алгебры

Лемма. Пусть A – линейное преобразование в вещественном конечномерном линейном пространстве. Если все с. з. A имеют неотрицательные вещественные части, то для любого сколь угодно малого $\delta > 0$ в пространстве существует такая евклидова структура, что $(Ax, x) \geq -\delta \|x\|^2$ для любых x .

Доказательство предложения. Если базис в \mathbb{R}^n взят таким образом, что первые $n - k$ его векторов порождают корневое подпространство матрицы A_0 , соответствующее с. з. с отрицательными вещественными частями, а остальные $k - с$ положительными, то при переходе в этот базис матрица примет вид

$$A_0 = \begin{pmatrix} A_0^- & 0 \\ 0 & A_0^+ \end{pmatrix},$$

где $\operatorname{Re} \lambda(A_0^-) < 0$, $\operatorname{Re} \lambda(A_0^+) > 0$, $\lambda(\cdot)$ – с. з. матрицы. Компоненты произвольного вектора y в этих подпространствах будем обозначать, соответственно, y^- и y^+ . В силу леммы, базис можно выбрать специальным образом так, что после введения скалярного произведения, относительно которого этот базис был бы ортонормированным, будет выполняться

$$A_0^- y^-, y^- \leq -\sigma \|y^-\|^2, \quad (A_0^+ y^+, y^+) \geq \sigma \|y^+\|^2. \quad (2.5)$$

для некоторого $\sigma > 0$.

⁴⁾ Поскольку базис может "вращаться" внутри подпространства.

Положим

$$(A_1x + A_2x^2 + \dots) = B(x) = \begin{pmatrix} B_{11}(x) & B_{12}(x) \\ B_{21}(x) & B_{22}(x) \end{pmatrix}.$$

Условие ограниченности при $x \rightarrow 0$ решения системы (2.1) эквивалентно при малых x (см. [10]) условию

$$y^-(x) = \alpha(x)y^+(x),$$

где $[(n-k) \times k]$ -матрица $\alpha(x)$ является решением сингулярной задачи Коши для уравнения Риккати:

$$\alpha' = [A_0^- \alpha(x) - \alpha(x)A_0^+ + B_{11}(x)\alpha(x) - \alpha(x)B_{22}(x) - \alpha(x)B_{21}(x)\alpha(x) + B_{12}(x)]/x^r, \quad (2.6)$$

$$\alpha(x) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow 0. \quad (2.7)$$

В окрестности условия ограниченности преобразование (2.3) также осуществляется путем переноса вдоль решений уравнения (2.6).

Уравнение (2.6) можно записать в виде

$$\alpha' = [\mathcal{A}\alpha + \mathcal{B}(x, \alpha)]/x^r, \quad (2.8)$$

где $\mathcal{A}\alpha = (A_0^- \alpha - \alpha A_0^+)$ – линейное преобразование в пространстве $[(n-k) \times k]$ -матриц. Введем в

этом пространстве норму, порожденную римановой метрикой в $G(n, k)$: $\|\alpha\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n-k} \sum_{j=1}^k \alpha_{ij}^2}$, и соответствующее скалярное произведение. Из (2.6) следует, что

$$(\|\alpha_1 - \alpha_2\|^2)' = \frac{2}{x^r} (\mathcal{A}(\alpha_1 - \alpha_2) + \mathcal{B}(x, \alpha_1) - \mathcal{B}(x, \alpha_2), \alpha_1 - \alpha_2) \leq -\frac{2\sigma}{x^r} \|\alpha_1 - \alpha_2\|^2 + o\left(\frac{1}{x^r}\right),$$

где последнее слагаемое нелинейно зависит от α . Если на $\|\alpha_i\|$ наложить ограничение сверху, например $\|\alpha_1\| \leq 1, \|\alpha_2\| \leq 1$, то при достаточно малых x получаем оценку

$$(\|\alpha_1 - \alpha_2\|^2)' \leq -\frac{\sigma}{x^r} \|\alpha_1 - \alpha_2\|^2.$$

Следовательно, на множестве тех α , траектории которых по (2.6) не выходят из единичного шара, отображение (2.3) будет сжимающим с коэффициентом сжатия

$$\mu = \exp\left(-\int_{\tau}^t (\sigma/\xi^r) d\xi\right) = \exp\{-\sigma/(r-1)[(1/\tau^{r-1}) - (1/t^{r-1})]\}. \quad (2.9)$$

Пусть теперь $\alpha_b(x)$ – решение (2.6), удовлетворяющее (2.7) (и соответствующее искомому подпространству ограниченных решений (2.1)). При малых x матричная функция $\alpha_b(x)$ представляется асимптотическим рядом (см. [10])

$$\alpha_b(x) = \phi_1 x + \phi_2 x^2 + \dots$$

Пусть $a = 2\|\phi_1\|$, если $\phi_1 \neq 0$, и сколь угодно малое положительное число, если $\phi_1 = 0$. Тогда при малых τ, t верно $\|\alpha_b(t)\| \leq at, \|\alpha_b(\tau)\| \leq a\tau, \|\alpha_b(t) - \alpha_b(\tau)\| \leq a|t - \tau|$. Следовательно, шар

$$\{\alpha: \|\alpha - \alpha_b(\tau)\| \leq R\}, \quad (2.10)$$

где R любое такое, что

$$1/2 > R > a(t - \tau)/[1 - \mu(\tau, t)], \quad (2.11)$$

при отображении (2.3) переходит в себя. Из сказанного выше следует, что сужение отображения (2.5) на этот шар будет сжимающим с коэффициентом $\mu(\tau, t)$. Следовательно, у него будет существовать неподвижная точка $\alpha_{\tau t}^{\text{fix}}$, причем из (2.9), (2.10) следует, что

$$\|\alpha_{\tau t}^{\text{fix}} - \alpha_b(t)\| \leq \frac{a\mu(\tau, t)(t - \tau)}{1 - \mu(\tau, t)}. \quad (2.12)$$

Поскольку при уменьшении τ коэффициент $\mu(\tau, t)$ быстро убывает, оценка (2.12) будет наилучшей при τ , близких к t . Сделав предельный переход $\tau \rightarrow t$, получим для этого случая

$$\|\alpha_{tt}^{\text{fix}} - \alpha_b(t)\| \leq at^r/\sigma. \quad (2.13)$$

Замечания. 1. При $\tau \rightarrow 0$ правая часть (2.12) стремится к нулю, так что точность метода повышается, однако одновременно быстро возрастает жесткость уравнений (2.6), реализующих отображение (2.3), что затрудняет численное решение. Другую крайность – когда τ близко к t – тоже, по-видимому, нельзя рекомендовать для практического использования, поскольку при $\tau \rightarrow t$ получаемая неподвижная точка стремится к корневому подпространству матрицы $A(t)$, соответствующему с. з. с положительной действительной частью (если с. з. делятся надлежащим образом, как в рассматриваемом случае). Исследование особенности, таким образом, подменяется исследованием спектральной структуры одной матрицы $A(t)$. В некоторых случаях, например в условиях предложения 1, такая подмена допустима, но в других ситуациях она может оказаться нецелесообразной или даже неверной (см. примеры в разделе 3). Оценка (2.13) выписана по причине ее большей, чем у (2.12), наглядности. Кроме того, она дает возможность сопоставить данный метод с описанным выше аналитическим: чтобы добиться той же точности, при аналитическом отходе нужно учесть первые $r - 1$ членов ряда (2.4).

2. Из доказательства видно, что для любого $R > 1$ при достаточно малом t отображение (2.3) будет сжимающим и инвариантно действовать также в шаре $\alpha \leq R$. Действительно, пусть $b > 0$ таково, что (см. (2.6), (2.8)) $\|\mathcal{B}(t, \alpha_1) - \mathcal{B}(t, \alpha_2)\| \leq bt \max(\|\alpha_1 - \alpha_2\|^2, \|\alpha_1 - \alpha_2\|)$. При достаточно малых t шар $\|\alpha\| \leq \sigma/(2bt)$ обладает требуемыми свойствами. Этот факт понадобится ниже.

3. Несложно проверить, что утверждение предложения 1 и оценка (2.13) сохраняют силу и в случае регулярной особенности ($r = 1$).

Ответы на остающиеся пока открытыми вопросы о единственности устойчивой неподвижной точки и об области притяжения данного метода дает

Предложение 2. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $\tau < t < \delta$ итерации метода сходятся к полученной в предложении 1 неподвижной точке в случае, если начальная точка итераций выбрана вне некоторого множества меры ε . Если $n = 2k$, то начальную точку можно выбирать произвольно вне некоторого множества нулевой меры.

Доказательство. Первое утверждение следует из замечания 2 и того обстоятельства, что дополнение к объединению при $R \rightarrow \infty$ подмножеств $G(n, k)$, соответствующих шарам $\|\alpha\| \leq R$, имеет меру 0. Пусть теперь $n = 2k$. Рассмотрим, как отображение (2.3) изменяет объем в точках $G(n, k)$, близких к отрицательному корневому подпространству матрицы A_0 (которое соответствует наиболее растущим при $x \rightarrow 0$ решениям). Пусть имеется такая точка. В соответствующем ей подпространстве можно выбрать ортонормированный базис (z_1, \dots, z_k) так, что $(z_1, \dots, z_k) = (e_1, \dots, e_k) + Q$, где $\|Q\| < \Delta$, Δ – малая величина. Аналогично, в ортогональном дополнении к этому подпространству базис $(\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_k)$ можно взять так, что $(\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_k) = (e_{k+1}, \dots, e_n) + \hat{Q}$, $\|\hat{Q}\| < \Delta$. Если пересчитать уравнение Риккати в базис $(\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_k, z_1, \dots, z_k)$ и обозначить новую фазовую переменную через $\tilde{\alpha}$, то его линейная по $\tilde{\alpha}$ часть при $\tilde{\alpha} = 0$ будет выглядеть так:

$$\hat{\alpha}' = (\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_k)^T A(x) (\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_k) \tilde{\alpha} - \tilde{\alpha} (z_1, \dots, z_k)^T A(x) (z_1, \dots, z_k) = \tilde{\mathcal{A}} \tilde{\alpha}.$$

Сдвиг по траекториям отображения (2.3) изменяет малый элемент объема v в точке $\hat{\alpha} = 0$ следующим образом: $v' = \text{tr} \tilde{\mathcal{A}} v$, где tr – след преобразования. Далее,

$$\begin{aligned} \text{tr} \tilde{\mathcal{A}} &= k(\text{tr}((\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_k)^T A(x) (\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_k)) - \text{tr}((z_1, \dots, z_k)^T A(x) (z_1, \dots, z_k))), \\ \text{tr}((z_1, \dots, z_k)^T A(x) (z_1, \dots, z_k)) &\leq \text{tr}\left(\frac{1}{x^r} A_0^-\right) + 3k\Delta \|A_0\| / x^r + k\|B(x)\| / x^r, \end{aligned}$$

причем $\text{tr} A_0^- \leq -k\sigma$ (см. (2.5)), и аналогично – для A_0^+ . Учитывая малость Δ и то, что $\|B(x)\| \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$, после суммирования получаем, что $\text{tr} \tilde{\mathcal{A}}(x) > c/x^r$, где c – положительная константа. Таким образом, при выборе достаточно малых τ, t все многообразие $G(n, k)$ может быть представлено как объединение двух подмножеств: малой окрестности отрицательного корневого подпространства матрицы A_0 , где отображение (2.3) растягивает объемы не менее чем в фиксированное число раз, и шара $\alpha \leq R$, где отображение является сжимающим. Множество таких точек в $G(n, k)$, что начинающиеся с них итерации никогда не выходят из 1-го подмножества, имеет меру нуль. Для всех остальных исходных точек итерации сходятся к устойчивой неподвижной точке.

Замечание 4. Неоднородную систему $y' = Ay + f$, где A и/или f имеют особенности на концах интервала, можно известным стандартным приемом свести к однородной системе размерности, на единицу большей:

$$\begin{pmatrix} y \\ \xi \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} A & f \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \xi \end{pmatrix}.$$

В терминах рассматриваемого метода смысл этих действий представляется особенно наглядно. Значения в произвольной точке x решений неоднородной системы, удовлетворяющих некоторым $n - k$ условиям, образуют уже не линейное, а в общем случае аффинное подпространство в \mathbb{R}^n . Множество таких подпространств естественным образом отождествляется с многообразием $G(n + 1, k + 1)$, из которого вырезаны точки, соответствующие $(k + 1)$ -мерным подпространствам, содержащимся в $\text{span}(e_1 \dots e_n)$. Все проделанные рассуждения и алгоритм метода остаются в силе, только дело теперь происходит не в $G(n, k)$, а в $G(n + 1, k + 1)$.

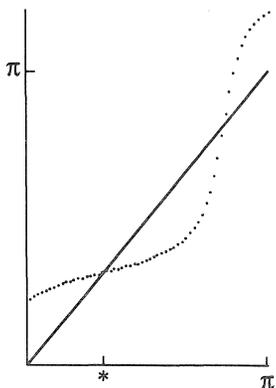
3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Здесь представлены результаты расчетов по предложенному методу для нескольких сингулярных краевых задач различной сложности. В примерах 1–4, где $n = 2, k = 1$, краевое условие может быть задано в виде $y_1 \cos \alpha + y_2 \sin \alpha = 0$, т.е. оно определяется одним вещественным числом α , а соответствующее многообразие Грассмана есть обычная окружность. Малая размерность задачи позволяет здесь изобразить всю картину переноса к. у. вблизи особенности и лучше увидеть причину сходимости итераций. В примерах 5, 6 предъявлены только результаты итераций. Все расчеты выполнены по схеме, описанной в разделе 2, с применением различных вариантов метода дифференциальной прогонки.

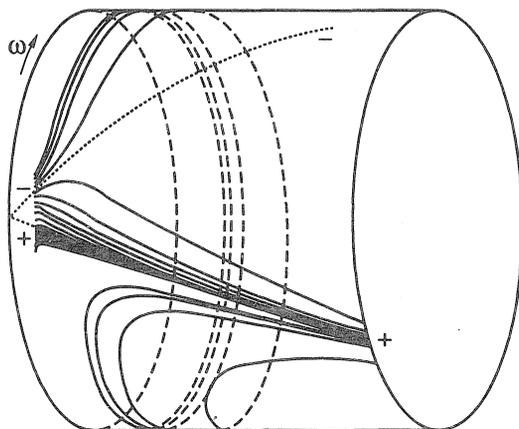
Пример 1. $u'' = x^{-2}u, 0 < x$, краевое условие – ограниченность решения при $x \rightarrow 0$, сведение к системе осуществляется “правильной” заменой $y = (u, xu)^T$. Получаем систему типа (2.1), (2.4) с $r = 1$, причем с. з. матрицы A_0 лежат по разные стороны от мнимой оси. Таким образом, задача подпадает под действие результатов раздела 2. Здесь $G(2, 1) = RP^1 \approx S^1$. На фиг. 1 представлен график отображения Φ_u при $\tau = 10^{-5}, t = 8 \times 10^{-5}$ (окружность оба раза развернута в отрезок). В этом простом примере устойчивая неподвижная точка (помечена знаком *) в точности совпадает с искомым к. у.

Пример 2. Задача – та же, что и в примере 1, но сведение к системе осуществляется “стандартной” заменой $y = (u, u')^T$. Получается система вида (2.1), (2.4) с $r = 2$ и $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Случай, когда

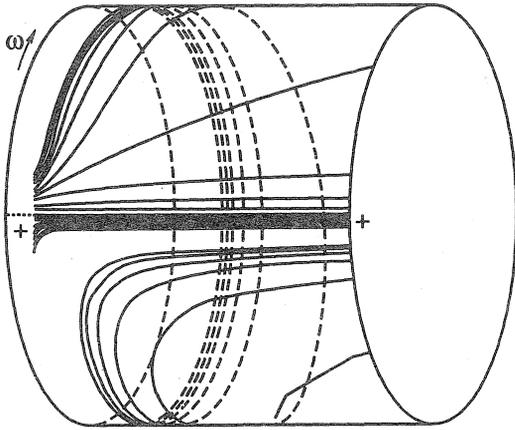
на мнимой оси имеются с. з. с жордановыми клетками, является, вообще говоря, наиболее сложным и, как отмечено, например, в [11], аналитически до конца не исследован. Под действие результатов раздела 2 он не подпадает. На фиг. 2 представлена общая картина траекторий переноса краевых условий. По явным формулам нарисованы соответствующая ограниченному реше-



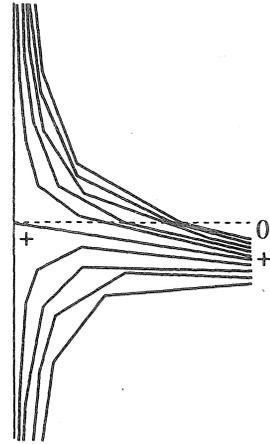
Фиг. 1.



Фиг. 2.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

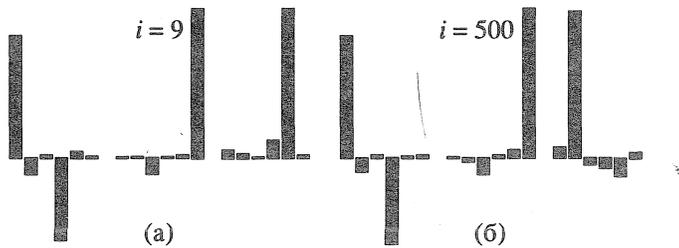
нию траектория $\omega(x) = \arctg[(x^\lambda)/(x^\lambda)]$, $\lambda = (1 + \sqrt{5})/2$ (помечена значком +) и аналогичная траектория для $\lambda = (1 - \sqrt{5})/2$ (помечена значком -; здесь ω – угол, представляющий точку на $S^1 = G(2, 1)$). Остальные траектории получены численным решением прогоночных уравнений. Процесс быстро сходится к устойчивой неподвижной точке (например, $\tau = 2 \times 10^{-4}$, $t = 4 \times 10^{-4}$, 5 итераций, ошибка – отличие от точного решения – равна 6×10^{-5}).

Пример 3. $y' = x^{-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y$, $0 < x$, условие ограниченности решения в нуле. На фиг. 3 представ-

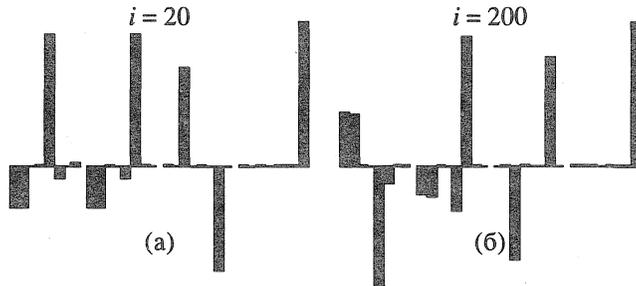
лена общая картина фазового портрета. Ограниченное решение помечено значком +. По сравнению с примером 2 здесь имеет место дополнительная трудность: если (каким-то образом) отход от особенности произведен точно, то дальнейший численный счет неустойчив. Обоснования для предлагаемого метода здесь провести нельзя: устойчивая и неустойчивая неподвижные точки слились в одну. Однако несколько итераций метода дадут хорошее приближение к искомому решению, причем дальнейший счет пойдет устойчиво.

Пример 4. Система, описывающая осесимметричные свободные колебания безмоментной вытянутой цилиндрической оболочки с полусферическими торцами (см. [12], (1.76), краевое условие (2.15)). (2×2) -Матрица системы имеет вид $x^{-1}A_0 + o(x^{-1})$, и с. з. матрицы A_0 находятся по разные стороны от мнимой оси. В [12] получено нулевое приближение к условию ограниченности решения (получение более высоких приближений связано с резким ростом аналитической работы, так как задача содержит ряд физических параметров, см. Введение). На фиг. 4 показан фрагмент фазового портрета вблизи искомого решения. Искомое решение помечено значком + и нулевое приближение – значком 0. Картина соответствует $0 < x < 5 \times 10^{-3}$. Все траектории получены численно. Из результатов раздела 2 следует, численно проверяется и видно непосредственно, что неподвижная точка доставляет приближение с ошибкой того же порядка, что и нулевое приближение (но расположенное по другую сторону от истинного решения).

Пример 5. Аналогичная задача для моментной оболочки (см. [12] и (1.3)). Матрица системы имеет размер 6×6 , главная часть ее особенности имеет двукратное полупростое нулевое с. з. Условие ограниченности решения выделяет лишь 4-мерное подпространство решений, тогда как из симметрии задачи следует, что на каждом из концов оболочки должно быть поставлено 3 к. у. В [12] дополнительное к. у. (5-я компонента решения стремится к 0) было поставлено из физических соображений. Ввиду большой размерности $G(6, 3)$ изобразить на рисунке весь фазовый портрет невозможно. На фиг. 5 показаны результаты итераций метода для $\tau = 10^{-6}$, $t = 2 \times 10^{-6}$, при этом 3-мерное подпространство в \mathbb{R}^6 представляется некоторым ортонормированным базисом в его ортогональном дополнении, а векторы такого базиса изображаются диаграммами из 6 столбцов-компонент (значения которых могут изменяться от -1 до +1). На рисунках указан номер итерации ($i = \dots$). Если начинать с подпространства, соответствующего нулевым 1-й, 5-й и 6-й компонентам (оно физически осмысленно и близко к нулевому приближению, см. [12], (2.6), (2.7a)), то итерации быстро выходят на некоторое подпространство, близкое к полученному в



Фиг. 5.



Фиг. 6.

[12] (фиг. 5а, $i = 9$, отклонение 3×10^{-3}). При дальнейших итерациях наблюдается медленное “вращение” подпространства, особенно выраженное во 2-й и 5-й компонентах (фиг. 5б). Таким образом, расчеты подтверждают правильность соответствующих результатов [12] и, в частности, наличие некоторого произвола в постановке сингулярного к. у.

Пример 6. Неосесимметричные свободные колебания моментной оболочки указанной формы [13, с. 17–19]. Система имеет порядок 8, ее матрица может быть приведена к виду (2.4) с $r = 3$. При этом матрица A_0 имеет 8-кратное нулевое с. з., составленное из 6-кратного полупростого и жордановой клетки порядка 2. В силу симметрии задачи, на каждом конце должно выделяться 4-мерное подпространство решений. На момент написания данной статьи постановка сингулярного краевого условия и отход от особенности для этой задачи осуществлены не были. Применение изложенного метода дало следующие результаты (см. фиг. 6, способ представления аналогичен примеру 5, τ и t такие же). При любом выборе начальной точки на $G(8, 4)$ итерации сходятся к некоторому (одному и тому же) подпространству. При этом скорость сходимости сильно зависит от начального приближения. Если в качестве него взять равенство нулю последних 4 компонент решения (такое условие имеет физический смысл), то итерации сходятся быстро (фиг. 6а). Если же начальную точку брать произвольно, то сходимость может оказаться существенно медленнее (см. фиг. 6б, где вначале были приравнены нулю 1-я, 3-я, 6-я и 8-я компоненты). Предельное подпространство, однако, оказывается тем же: фиг. 6а и 6б представляют собой на самом деле очень близкие подпространства – раствор $\sim 10^{-3}$, а отличие диаграмм объясняется различием базисов в подпространстве. Из этих результатов следуют такие выводы: 1) сингулярная краевая задача с 4 к. у. на каждом конце может быть корректно поставлена; 2) полученное (любым способом отхода) эквивалентное подпространство в точке, близкой к особенности, будет близко к представляемому на фиг. 6 (в противном случае при дальнейшем численном переносе подпространства информация о нем будет утеряна из-за неустойчивости). Таким образом, метод позволяет еще до строгой постановки сингулярной краевой задачи с определенной долей уверенности выяснять ее корректность и приближенно находить ответ – искомое подпространство решений вблизи особой точки.

Автор благодарен рецензенту статьи за ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамов А.А., Конюхова Н.Б.* О допустимых граничных условиях в особой точке для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // *Актуальные пробл. вычисл. и прикл. матем.* Новосибирск: Наука, 1983. С. 28–33.

2. Курочкин С.В. О сингулярных краевых задачах для линейных гамильтоновых систем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1994. Т. 34. № 1. С. 58–67.
3. Абрамов А.А., Диткин В.В., Конюхова Н.Б. и др. Вычисление собственных значений и собственных функций обыкновенных дифференциальных уравнений с особенностями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1980. Т. 20. № 5. С. 1155–1173.
4. Курочкин С.В. Метод нахождения собственных значений несамосопряженной краевой задачи // Докл. РАН. 1994. Т. 336. № 4. С. 442–443.
5. Курочкин С.В. Топологические методы локализации собственных значений краевых задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1995. Т. 35. № 8. С. 1165–1174.
6. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1986.
7. Борисенко А.А., Николаевский Ю.А. Многообразия Грассмана и грассманов образ подмногообразий // Успехи матем. наук. 1991. Т. 46. Вып. 2. С. 41–83.
8. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов. М.–Л.: Гостехтеоретиздат, 1950.
9. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Наука, 1987.
10. Биргер Е.С., Ляликова Н.Б. О нахождении для некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений решений с заданным условием на бесконечности. I // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1965. Т. 5. № 6. С. 979–990.
11. Абрамов А.А., Конюхова Н.Б. Перенос допустимых граничных условий из особой точки для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Сообщ. по прикл. матем. М.: ВЦ АН СССР, 1985.
12. Абрамов А.А., Конюхова Н.Б., Курочкин С.В. и др. Численные исследования осесимметричных свободных колебаний в вакууме и возбуждения в сжимаемой среде вытянутой цилиндрической оболочки с полусферическими торцами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1993. Т. 33. № 10. С. 1550–1580.
13. Приходько В.Ю. Излучение и рассеяние звука замкнутыми вытянутыми оболочками вращения. Л.: Румб, 1990.