ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН
Том 8, стр.1–16 2002
УДК 519.854

ДВА ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СЕМЕЙСТВА ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ [1]

А.И. Голиков, Ю.Г. Евтушенко

Приводится новая классификация задач линейного программирования. Вводятся два различных параметрических семейства. Между множествами решений задач, принадлежащих к одному семейству, имеется взаимно-однозначное соответствие. Для формулировки необходимых и достаточных условий оптимальности задач линейного программирования используются переменные любых двух задач, которые обязательно принадлежат разным семействам. В качестве примера применения новых условий оптимальности рассматривается нахождение нормального решения задачи линейного программирования.

1. Введение

Основной аппарат в теории линейного программирования (ЛП) составляют двойственность и условия оптимальности Куна–Таккера, использующие переменные прямой и двойственной задач. Иногда полезно преобразовать исходную задачу ЛП и представить ее в другом виде. В [1] – [4] приведены различные представления задач ЛП и дана их классификация.

В данной работе задача ЛП представляется в так называемом параметрическом виде, когда целевая функция и/или допустимое множество зависят от выбора векторных параметров, принадлежащих некоторым аффинным множествам. Ниже предлагается нетрадиционный подход к формулировкам задач ЛП. Он основан на использовании вектора прямых переменных и вектора невязок двойственных ограничений как основных переменных. Выполняя линейные преобразования переменных и изменяя вектор целевых функций, получаем различные параметрические задачи ЛП, зависящие от одного или двух векторов-параметров, принадлежащих определенным множествам. Параметризация проводится таким образом, что множество решений не зависит от выбора конкретных параметров из соответствующих множеств. Рассматриваются связи между множествами решений, между оптимальными значениями целевых функций.

Во втором разделе вводятся два подкласса задач ЛП: прямое семейство (ПС) и двойственное семейство (ДС). В каждом семействе все задачи эквивалентны, хотя имеют разные размерности. Это означает, что для задач из одного семейства существуют взаимно-однозначные соответствия между допустимыми множествами, между множествами оптимальных решений. Допустимые множества любых двух задач из разных семейств и линейная связь между оптимальными значениями их целевых функций составляют необходимые и достаточные условия оптимальности. Для любой задачи существуют две задачи из другого семейства: обычная двойственная и сопряженная.

Геометрическая интерпретация некоторых результатов дана в третьем разделе. К вектору целевой функции добавляется вектор-параметр и исследуется его влияние

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01-01-00804) и по программе государственной поддержки ведущих научных школ (код проекта 00-15-96080).

на множество решений. Показано, что если задача ЛП сформулирована в каноническом виде, то множество ее решений зависит только от проекции вектора целевой функции на нуль-пространство матрицы ограничений.

В четвертом разделе полученные результаты применяются для нахождения нормального решения (с минимальной евклидовой нормой) задачи ЛП. При этом задача ЛП сводится к однократной безусловной максимизации вогнутой гладкой кусочно-квадратичной функции. Число переменных в этой задаче на единицу больше числа переменных прямой задачи ЛП.

2. Два параметрических семейства задач ЛП и условия оптимальности

Пусть прямая задача ЛП задана в каноническом виде

$$f_* = \min_{x \in X} c^\top x, \qquad X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, \ x \geq 0_n\}. \tag{P}$$

Здесь и ниже A — $(m \times n)$-матрица ограничений ранга m, $m < n$, вектор прямых переменных $x \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$ — вектор целевой функции, $b \in \mathbb{R}^m$ — вектор ограничений, через 0_i обозначен нулевой i-мерный вектор.

Двойственная к (P) задача имеет вид

$$\max_{u \in U} b^\top u, \qquad U = \{u \in \mathbb{R}^m : c - A^\top u \geq 0_n\}. \tag{D}$$

Обозначим через X_* и U_* множества решений задач (P) и (D) соответственно. Всюду ниже предполагается, что эти множества не пусты. Необходимые и достаточные условия оптимальности (условия Куна–Таккера) для задач (P) и (D) имеют вид

$$Ax - b = 0_m, \qquad c - A^\top u \geq 0_n, \qquad D(x)(c - A^\top u) = 0_n, \qquad x \geq 0_n. \tag{2.1}$$

Здесь и ниже через $D(z)$ обозначена диагональная матрица, у которой i-й диагональный элемент является i-й компонентой вектора z.

Для произвольной $(m \times n)$-матрицы H введем нуль-пространство (ядро) матрицы H и пространство строк матрицы H (образ матрицы $H^\top$), которые обозначим, соответственно, через $\ker H$ и $\operatorname{im} H^\top$:

$$\begin{array}{rcl} \ker H & = & \{x \in \mathbb{R}^n : Hx = 0_m\}, \\ \operatorname{im} H^\top & = & \{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi = H^\top u, \ u \in \mathbb{R}^m\}. \end{array}$$

Для произвольной $(m \times n)$-матрицы H полного ранга определим псевдообратную $(n \times m)$-матрицу H^+, $(n \times n)$-матрицу проектирования $(H^\top)^\|$ на пространство строк матрицы H и $(n \times n)$-матрицу проектирования $(H^\top)^\perp$ на нуль-пространство матрицы H. Если ранг H равен m, то $n \geq m$, строки H линейно независимы и

$$H^+ = H^\top (HH^\top)^{-1}, \qquad (H^\top)^\| = H^+ H, \qquad (H^\top)^\perp = I_n - (H^\top)^\|. \tag{2.2}$$

Здесь и ниже I_s обозначает единичную s-мерную матрицу.

Размерность линейного пространства $\ker A$ равна ν — дефекту матрицы A. В случае задачи (P) имеем $\nu = n - m$. Нуль-пространство и пространство строк матрицы A

являются ортогональными дополнениями друг к другу, пространство $\mathbb{R}^n$ разлагается в прямую сумму этих подпространств, т.е. $\mathbb{R}^n = \mathrm{im}\ A^\top \oplus \ker A$.

Для задач линейного программирования вместо традиционных необходимых и достаточных условий оптимальности (2.1) приведем другие. Для этого, следуя [3]–[6], введем новую $(\nu \times n)$-матрицу K. Считаем, что строки матрицы K линейно независимы, принадлежат нуль-пространству матрицы A и поэтому натянутое на них подпространство $\mathrm{im}\ K^\top$ совпадает с нуль-пространством (ядром) матрицы A. В качестве K можно использовать любую матрицу, ν строк которой образуют базис нуль-пространства матрицы A. Таким образом, $\mathrm{im}\ K^\top$ является ортогональным дополнением к пространству $\mathrm{im}\ A^\top$. Поэтому

$$\mathrm{im}\ K^\top = \ker A, \qquad AK^\top = 0_{m\nu}, \qquad \mathbb{R}^n = \mathrm{im}\ A^\top \oplus \mathrm{im}\ K^\top. \tag{2.3}$$

Здесь через 0_{ij} обозначена $(i \times j)$-матрица с нулевыми элементами.

В выборе матрицы K имеется определенный произвол, она может быть построена различными способами. Если матрицу A представить в блочном виде $A = [B \,|\, N]$, где B не вырождена, то матрицу K можно записать в следующем виде: $K = [-N^\top (B^{-1})^\top |\, I_\nu]$. Если с помощью преобразований Гаусса–Жордана матрицу A привести к виду $A = [I_m \,|\, N]$, тогда матрица K представима в виде $K = [-N^\top |\, I_\nu]$.

В ряде случаев построение матрицы K может быть осуществлено крайне просто. Например, пусть задача ЛП имеет ограничения типа неравенств $Nz \geq b$, где N — $(m \times \nu)$-матрица и вектор $z \in \mathbb{R}^\nu_+$. Вводя дополнительные переменные $\xi \in \mathbb{R}^m_+$, вектор $x \in \mathbb{R}^n$ представим как объединение векторов z, ξ, т.е. $x^\top = [z^\top, \xi^\top]$. Тогда допустимое множество запишется в том же виде, что и в задаче (P), где матрица $A = [N \,|\, -I_m]$. Тогда матрицу K можно задать в виде $K = [I_\nu \,|\, N^\top]$.

Определим вектор $d \in \mathbb{R}^\nu$ и вектор невязок двойственных ограничений $v \in \mathbb{R}^n$ соотношениями $d = Kc$ и

$$v = c - A^\top u. \tag{2.4}$$

Введем в рассмотрение два аффинных множества

$$\bar{X} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}, \qquad \bar{V} = \{v \in \mathbb{R}^n : Kv = d\}.$$

Всюду ниже через $\bar{x}$ и $\bar{v}$ обозначим произвольные фиксированные n-мерные векторы, удовлетворяющие, соответственно, условиям $\bar{x} \in \bar{X}$, $\bar{v} \in \bar{V}$. Заметим, что некоторые компоненты векторов $\bar{x}$, $\bar{v}$ могут быть отрицательны. В простейшем варианте можно взять $\bar{v} = c$. В силу того что матрица A имеет ранг m и $n > m$, всегда $\bar{X} \neq \emptyset$ и $\bar{V} \neq \emptyset$.

Вектор $\bar{v} \in \bar{V}$ может быть легко найден. Достаточно взять произвольный вектор $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$ и определить вектор $\bar{v}$ по формуле

$$\bar{v} = c - A^\top \bar{u}. \tag{2.5}$$

Принимая во внимание (2.3), заключаем, что $\bar{v} \in \bar{V}$.

В целевую функцию задачи (P) подставим $c = \bar{v} + A^\top u(\bar{v})$, тогда для любых $x \in \bar{X}$ имеем

$$c^\top x = \bar{v}^\top x + b^\top u(\bar{v}). \tag{2.6}$$

Исходную задачу (P) заменим следующей модифицированной задачей, зависящей от параметра $\bar{v}$:

$$f^1_*(\bar{v}) = \min_{x \in X} \bar{v}^\top x, \qquad X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b,\ x \geq 0_n\}. \tag{P$_x$}$$

Задачи (P) и (P_x) близки по виду и отличаются только векторами целевой функции. В (P) этот вектор задается постановкой задачи, в (P_x) в качестве вектора целевой функции может быть взят любой вектор $\bar{v} \in \bar{V}$, т.е. в этом случае имеем дело с множеством задач ЛП. Поэтому (P_x) будем рассматривать как *однопараметрическую задачу* с векторным параметром $\bar{v} \in \bar{V}$.

Множества решений задач (P) и (P_x) совпадают и не зависят от конкретного выбора вектора $\bar{v} \in \bar{V}$ или, согласно (2.5), от произвольного вектора $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$. Оптимальные значения целевых функций в (P) и (P_x) отличаются на константу, зависящую от конкретного выбора $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$ и равную нулю, если $\bar{u} = 0_m$, так как в этом случае $\bar{v} = c$ и $f_* = f_*^1(c)$. Таким образом, задача (P) является частным случаем (P_x) и поэтому задачу (P) можно исключить из дальнейшего рассмотрения.

С помощью замены переменных задачу (P_x), заданную в каноническом виде, представим в стандартном виде задачи ЛП, в которой присутствуют только ограничения типа неравенств. Запишем общее решение неоднородной системы линейных уравнений $Ax = b$ в виде
$$x = \bar{x} - K^\top y, \tag{2.7}$$
где $\bar{x}$ — частное решение системы, а $K^\top y$ — общее решение однородной системы $Ax = 0_m$ и $y \in \mathbb{R}^\nu$. Определим множество
$$Y = \{y \in \mathbb{R}^\nu : \bar{x} - K^\top y \geq 0_n\}. \tag{2.8}$$

Формулу (2.7) можно рассматривать как линейное преобразование из линейного векторного пространства $\mathbb{R}^\nu$ в другое линейное векторное пространство $\mathbb{R}^n$. Если $y \in Y$, то из (2.7), (2.3) и (2.8) имеем $Ax = A\bar{x} = b$, $x \geq 0_n$. Следовательно, преобразование (2.7) отображает множество Y в допустимое множество X задач (P) и (P_x). При этом образом множества Y является множество X. Между X и Y существует взаимно-однозначное соответствие. Действительно, для любого $y \in Y$ по формуле (2.7) однозначно определяется $x \in X$. Для переопределенной системы (2.7) полного ранга, содержащей n линейных уравнений и ν-мерный вектор неизвестных y, всегда определено псевдорешение
$$y(x) = (KK^\top)^{-1}K(\bar{x} - x) = (K^\top)^+(\bar{x} - x), \tag{2.9}$$
которое является единственным решением системы (2.7) тогда и только тогда, когда $\bar{x} - x \in \operatorname{im} K^\top$. Это включение имеет место тогда и только тогда, когда $x \in \bar{X}$. Итак, для любого $x \in \bar{X}$ формула (2.9) определяет аффинное преобразование, обратное к (2.7). Поэтому можно записать
$$Y = (K^\top)^+(\bar{x} - X). \tag{2.10}$$

Выразим целевую функцию задачи (P_x) через переменные y. Выражение (2.7) подставим в целевую функцию задачи (P_x) и, используя равенство $\bar{v}^\top K^\top = c^\top K^\top = d^\top$, получим
$$\bar{v}^\top x = \bar{v}^\top \bar{x} - \bar{v}^\top K^\top y = \bar{v}^\top \bar{x} - d^\top y. \tag{2.11}$$

Учитывая (2.11) и то, что Y есть образ X, задачу (P_x) можно записать в виде стандартной задачи ЛП, где допустимое множество Y является пересечением n полупространств:
$$\max_{y \in Y} d^\top y, \qquad Y = \{y \in \mathbb{R}^\nu : \bar{x} - K^\top y \geq 0_n\}. \tag{P_y}$$

Таким образом, m ограничений типа равенств исключены из определения множества X и остались только ограничения типа неравенств. Формула (2.7) есть линейная замена переменных. Она связывает новые переменные y со старыми переменными x.

Между допустимыми множествами X и Y, множествами решений X_* и Y_* задач (P_x) и (P_y) существуют взаимно-однозначные соответствия, определяемые (2.7), (2.9). В частности, для множеств решений X_* и Y_* это соответствие можно представить в виде

$$X_* = \bar{x} - K^\top Y_*, \qquad Y_* = (K^\top)^+(\bar{x} - X_*). \tag{2.12}$$

Введем новую переменную

$$g = K^\top y. \tag{2.13}$$

Из условия $\bar{v} \in \bar{V}$ имеем $d^\top = \bar{v}^\top K^\top$ и, благодаря (2.7), получаем два выражения для целевой функции задачи (P_y):

$$d^\top y = \bar{v}^\top(\bar{x} - x), \qquad d^\top y = \bar{v}^\top g. \tag{2.14}$$

Подставляя первое выражение в целевую функцию задачи (P_y) и видоизменяя запись допустимого множества Y, получаем следующую задачу:

$$\min_{[x,y]\in Z} \bar{v}^\top x, \qquad Z = \{[x,y] : K^\top y + x = \bar{x},\ x \geq 0_n\}. \tag{P_{xy}}$$

Множество решений этой задачи есть $Z_* = [X_*, Y_*]$.

Из определения (2.13) следует, что $g \in \operatorname{im} K^\top = \ker A$. Тогда g можно найти из решения линейной однородной системы $Ag = 0_n$. Используя второе выражение в (2.14) и формулу (2.7), из (P_y) получаем следующую задачу:

$$\max_{g\in G} \bar{v}^\top g, \qquad G = \{g \in \mathbb{R}^n : Ag = 0_m,\ g \leq \bar{x}\}. \tag{P_g}$$

Таким образом, исключена необходимость использовать переменные y в задаче (P_{xy}) и уменьшено число переменных. Множество решений G_* задачи (P_g) связано с Y_* и X_* соотношениями

$$G_* = K^\top Y_* = \bar{x} - X_*. \tag{2.15}$$

В действительности (P_x), (P_y), (P_{xy}) и (P_g) могут рассматриваться как одна и та же задача. Разница в формулировке связана с использованием замены переменных (2.7) и (2.13), что позволяет записать целевую функцию в разных видах и видоизменить допустимые множества. Можно сказать, что (P), (P_x), (P_y), (P_{xy}) и (P_g) являются эквивалентными задачами в том смысле, что множества решений задач (P) и (P_x) совпадают и существует взаимно-однозначное соответствие между X_* и остальными множествами решений. Можно говорить, что задачи (P), (P_x), (P_y), (P_{xy}) и (P_g) объединены в прямое семейство (ПС) задач линейного программирования. Аналогично введем *двойственное семейство* (ДС) задач ЛП. Сделаем следующую замену переменных в задаче (D):

$$u = \bar{u} + w, \tag{2.16}$$

где вектор $\bar{u}$ введен в формуле (2.5). Подставляя (2.16) в (D), получим новую задачу в стандартном виде

$$\max_{w\in W} b^\top w, \qquad W = \{w \in \mathbb{R}^m : \bar{v} - A^\top w \geq 0_n\}. \tag{D_w}$$

Одновременно получаем следующее соотношение между оптимальными значениями соответствующих целевых функций:

$$\max_{w \in W} b^\top w = \max_{u \in U} b^\top u - b^\top \bar{u}. \tag{2.17}$$

Обозначим через W_* множество решений задачи (D_w). Существует взаимно-однозначное соответствие между допустимыми множествами U и W, определяемое как $U = \bar{u} + W$. Соответствующее соотношение $U_* = \bar{u} + W_*$ существует между множествами решений.

Введем следующее соотношение:

$$v = \bar{v} - A^\top w, \tag{2.18}$$

где вектор $\bar{v} \in \bar{V}$ фиксирован. Определим множество

$$V = \{v \in \mathbb{R}^n : Kv = d,\ v \geq 0_n\}.$$

В (2.18) вектор w может рассматриваться как неявно заданная векторная функция, зависящая от вектора невязок двойственных ограничений v, имеющего бóльшую размерность. Система (2.18) переопределена, значит, она разрешима относительно вектора w не при всяких векторах v и $\bar{v}$. Однако псевдорешение

$$w(v) = (AA^\top)^{-1}A(\bar{v} - v) = (A^\top)^+(\bar{v} - v) \tag{2.19}$$

всегда существует и единственно. Это псевдорешение является также единственным решением системы (2.18) тогда и только тогда, когда вектор $\bar{v} - v \in \operatorname{im} A^\top$. В этом случае, согласно (2.3), матрица K ортогональна вектору $\bar{v} - v$, т.е. $Kv = K\bar{v} = d$. Так как $\bar{v} \in \bar{V}$, то можно утверждать, что система (2.18) имеет единственное решение относительно w тогда и только тогда, когда $v \in \bar{V}$. Если выполнено условие $w \in W$, тогда из соотношения (2.18) следует, что соответствующий вектор $v \geq 0_n$ и, следовательно, $v \in V$. Таким образом, существует взаимно-однозначное соответствие между допустимым множеством W задачи (D_w) и множеством V.

Выразим целевую функцию задачи (D_w) через вектор невязок двойственных ограничений v. Для этого подставим $b = A\bar{x}$ в целевую функцию задачи (D_w) и, учитывая (2.18), получим

$$b^\top w = \bar{x}^\top A^\top w = \bar{x}^\top \bar{v} - \bar{x}^\top v. \tag{2.20}$$

Таким образом, задача (D_w) сводится к задаче ЛП, записанной в каноническом виде

$$f_*^2(\bar{v}) = \min_{v \in V} \bar{x}^\top v, \qquad V = \{v \in \mathbb{R}^n : Kv = d,\ v \geq 0_n\}. \tag{D_v}$$

Пусть V_* обозначает множество решений этой задачи. Связи между допустимыми множествами V и W, между множествами решений V_* и W_* выражаются следующим образом:

$$\begin{array}{rclcrcl} V &=& \bar{v} - A^\top W, & \qquad & W &=& (A^\top)^+(\bar{v} - V), \\ V_* &=& \bar{v} - A^\top W_*, & \qquad & W_* &=& (A^\top)^+(\bar{v} - V_*). \end{array} \tag{2.21}$$

Любая конкретная задача из (D_v) имеет одно и то же множество решений V_*, которое не зависит от конкретного выбора вектора $\bar{x} \in \bar{X}$. Формула (2.21) определяет взаимно-однозначное соответствие между множествами решений V_* и W_* соответственно задач (D_v) и (D_w). Пусть вектор $q \in \mathbb{R}^n$ определен как

$$q = A^\top w. \tag{2.22}$$

Так как $\bar{x} \in \bar{X}$, то имеем

$$b^\top w = \bar{x}^\top A^\top w = \bar{x}^\top q. \tag{2.23}$$

Умножая (2.22) слева на K и учитывая условие ортогональности в (2.3), получаем $Kq = 0_\nu$. Из условий допустимости в задаче (D_w) следует, что $q \leq \bar{v}$. Итак, задача (D_w) может быть переформулирована как

$$\max_{x \in Q} \bar{x}^\top q, \qquad Q = \{q \in \mathbb{R}^n : Kq = 0_\nu,\ q \leq \bar{v}\}, \tag{D_q}$$

где множество решений имеет вид

$$Q_* = A^\top W_* = \bar{v} - V_*. \tag{2.24}$$

Так как ранг A равен m, то существует взаимно-однозначное соответствие между Q_* и W_*.

Из (2.18) и (2.23) получаем $b^\top w = \bar{x}^\top(\bar{v} - v)$. Приходим к выводу, что следующая задача

$$\min_{[v,w] \in T} \bar{x}^\top v, \qquad T = \{[v, w] : A^\top w + v = \bar{v},\ v \geq 0_n\} \tag{D_{vw}}$$

эквивалентна задаче (D_w). Множество решений (D_{vw}) есть $T_* = [V_*, W_*]$. Задачи (D), (D_w), (D_v), (D_q) и (D_{vw}) принадлежат *двойственному семейству*. Все эти задачи могут рассматриваться как эквивалентные.

Задачи (P_x), (P_y), (D_w) и (D_v) зависят либо от параметра $\bar{x}$, либо от параметра $\bar{v}$. Поэтому будем говорить о них как об *однопараметрических задачах*. Задачи (P_{xy}), (P_g), (D_q) и (D_{vw}) одновременно зависят от двух параметров $\bar{x}$ и $\bar{v}$, их назовем *двухпараметрическими задачами*.

Класс этих восьми задач весьма обширен. В частности, он содержит исходные задачи (P) и (D). Действительно, если в качестве $\bar{v}$ взять вектор c в задачах (P_x) и (D_w), то получим, соответственно, задачи (P) и (D). Поэтому можно исключить (P) и (D) из рассмотрения, если имеем дело с (P_x) и (D_w).

Существует симметрия между задачами (P_x) и (D_v). Обе задачи сформулированы однотипно. Отличие состоит лишь в конкретном наполнении соответствующих матриц, векторов, чисел. Задачу (D_v) назовем *сопряженной* к (P_x). Аналогичная симметрия существует между парами задач (P_y) и (D_w), между (P_{xy}) и (D_{vw}), между (P_g) и (D_q). Все эти пары составляют *взаимно сопряженные* задачи. Выразим эти соответствия между задачами, переменными, матрицами, векторами, числами, входящими в постановку, допустимыми множествами, множествами решений с помощью символа $\Leftrightarrow$. Можно записать

$$(\mathrm{P}_x) \Leftrightarrow (\mathrm{D}_v), \qquad (\mathrm{P}_y) \Leftrightarrow (\mathrm{D}_w), \qquad (\mathrm{P}_{xy}) \Leftrightarrow (\mathrm{D}_{vw}), \qquad (\mathrm{P}_g) \Leftrightarrow (\mathrm{D}_q),$$

$$A \Leftrightarrow K,\quad X \Leftrightarrow V,\quad W \Leftrightarrow Y,\quad X_* \Leftrightarrow V_*,\quad W_* \Leftrightarrow Y_*,\quad G_* \Leftrightarrow Q_*,\quad Z_* \Leftrightarrow T_*,$$

$$x \Leftrightarrow v, \qquad b \Leftrightarrow d, \qquad m \Leftrightarrow \nu, \qquad \bar{v} \Leftrightarrow \bar{x}, \qquad y \Leftrightarrow w, \qquad g \Leftrightarrow q.$$

Приведенные соотношения между задачами отражены на схемах (см. рис. 1 и 2). Запись $B \Leftrightarrow C$ обозначает, что задачи (B) и (C) эквивалентны, вертикальные стрелки между задачами (B) и (C) обозначают взаимную двойственность задач, а диагональные — взаимную сопряженность задач.

Ниже приведем некоторые свойства введенных задач.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{array}{c} P:\quad \min c^\top x \\ Ax=b,\ \ x\ge 0_n \end{array}} \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] & \boxed{\begin{array}{c} P_x:\quad \min \bar{v}^\top x \\ Ax=b,\ \ x\ge 0_n \end{array}} \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \boxed{\begin{array}{c} P_y:\quad \max d^\top y \\ K^\top y\le \bar{x} \end{array}} \arrow[d, leftrightarrow] \arrow[dl, leftrightarrow] \\
\boxed{\begin{array}{c} D:\quad \max b^\top u \\ A^\top u\le c \end{array}} \arrow[r, Leftrightarrow] & \boxed{\begin{array}{c} D_w:\quad \max b^\top w \\ A^\top w\le \bar{v} \end{array}} \arrow[r, Leftrightarrow] & \boxed{\begin{array}{c} D_v:\quad \min \bar{x}^\top v \\ Kv=d,\ \ v\ge 0_n \end{array}}
\end{tikzcd}$$

Рис. 1. Исходная и однопараметрические задачи

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{array}{c} P:\quad \min c^\top x \\ Ax=b,\ \ x\ge 0_n \end{array}} \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] & \boxed{\begin{array}{c} P_{xy}:\quad \min \bar{v}^\top x \\ K^\top y+x=\bar{x},\ \ x\ge 0_n \end{array}} \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \boxed{\begin{array}{c} P_g:\quad \max \bar{v}^\top g \\ Ag=0_n,\ \ g\le \bar{x} \end{array}} \arrow[d, leftrightarrow] \arrow[dl, leftrightarrow] \\
\boxed{\begin{array}{c} D:\quad \max b^\top u \\ A^\top u\le c \end{array}} \arrow[r, Leftrightarrow] & \boxed{\begin{array}{c} D_q:\quad \max \bar{x}^\top q \\ Kq=0_\nu,\ \ q\le \bar{v} \end{array}} \arrow[r, Leftrightarrow] & \boxed{\begin{array}{c} D_{vw}:\quad \min \bar{x}^\top v \\ A^\top w+v=\bar{v},\ \ v\ge 0_n \end{array}}
\end{tikzcd}$$

Рис. 2. Исходная и двухпараметрические задачи

Теорема 1 (аналог слабой двойственности). *Пусть все переменные принадлежат допустимым множествам соответствующих задач. Тогда для однопараметрических задач справедливы следующие неравенства:*

$$\bar{v}^\top x + \bar{x}^\top v \ge \bar{x}^\top \bar{v} \ge d^\top y + b^\top w, \tag{2.25}$$

а для двухпараметрических задач справедливы аналогичные неравенства:

$$\bar{v}^\top x + \bar{x}^\top v \ge \bar{x}^\top \bar{v} \ge \bar{v}^\top g + \bar{x}^\top q. \tag{2.26}$$

Доказательство. Умножая (2.18) на $x \in X$, получим

$$v^\top x = \bar{v}^\top x - w^\top A x = \bar{v}^\top x - w^\top A\bar{x} = \bar{v}^\top x + \bar{x}^\top (v - \bar{v}) \ge 0, \qquad \bar{v}^\top x + \bar{x}^\top v \ge \bar{x}^\top \bar{v}.$$

Умножая (2.7) на $v \in V$, получим

$$v^\top x = \bar{x}^\top(\bar{v} - Aw) - y^\top K v = \bar{x}^\top(\bar{v} - Aw) - y^\top K\bar{v} = \bar{x}^\top \bar{v} - b^\top w - d^\top y \ge 0, \quad \bar{x}^\top \bar{v} \ge b^\top w + d^\top y.$$

Итак, неравенство (2.25) доказано. Учитывая (2.14) и (2.23), получим (2.26). $\square$

Из левого неравенства в (2.25) и равенства (2.18) получаем, что имеет место $\bar{v}^\top x \ge \bar{x}^\top(\bar{v} - v) = \bar{x}^\top A^\top w = b^\top w$, где $x \in X$, $w \in W$. Если $\bar{v} = c$, тогда $\bar{u} = 0_m$, $W = U$ и заключаем, что для задач (P) и (D) справедливо хорошо известное неравенство слабой двойственности: $c^\top x \ge b^\top u$ для всех $x \in X$, $u \in U$.

Через $\mathrm{opt}\, Q$ будем обозначать оптимальное значение целевой функции задачи (Q). При этом оптимальные значения всех целевых функций, кроме задач (P) и (D), зависят либо от $\bar v$, либо от $\bar x$ как от вектора параметров. Поэтому будем писать, например, $\mathrm{opt}\ \mathrm{P}_x(\bar v)$, $\mathrm{opt}\ \mathrm{D}_q(\bar v, \bar x)$, $\mathrm{opt}\ \mathrm{D}_w(\bar v)$, $\mathrm{opt}\ \mathrm{P}_y(\bar x)$.

Теорема 2 (аналог двойственности). *Если существует решение хотя бы одной из десяти рассмотренных задач ЛП, то существуют решения всех остальных девяти задач ЛП. Оптимальные значения целевых функций рассмотренных задач связаны между собой следующими соотношениями:*

$$\mathrm{opt}\ P = \mathrm{opt}\ P_x(\bar v) + b^\top \bar u = \mathrm{opt}\ D = \mathrm{opt}\ D_w(\bar v) + b^\top \bar u, \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{opt}\ P_x(\bar v) + \mathrm{opt}\ D_v(\bar x) &= \mathrm{opt}\ P_y(\bar x) + \mathrm{opt}\ D_w(\bar v) = \\ &= \mathrm{opt}\ P_x(\bar v) + \mathrm{opt}\ P_y(\bar x) = \\ &= \mathrm{opt}\ D_v(\bar x) + \mathrm{opt}\ D_w(\bar v) = \bar x^\top \bar v, \end{aligned} \tag{2.28}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{opt}\ P_{xy}(\bar v, \bar x) + \mathrm{opt}\ D_{wv}(\bar v, \bar x) &= \mathrm{opt}\ P_g(\bar v, \bar x) + \mathrm{opt}\ D_q(\bar v, \bar x) = \\ &= \mathrm{opt}\ P_{xy}(\bar v, \bar x) + \mathrm{opt}\ P_g(\bar v, \bar x) = \\ &= \mathrm{opt}\ D_q(\bar v, \bar x) + \mathrm{opt}\ D_{wv}(\bar v, \bar x) = \bar x^\top \bar v. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Доказательство. Существование решений следует из эквивалентности задач среди прямого семейства (ПС) и среди двойственного семейства (ДС), а также из обычной теории двойственности, примененной к соответствующим взаимно-двойственным задачам из ПС и ДС. Из формул (2.6) и (2.17) следует (2.27).

В соответствии с теоремой двойственности ЛП о равенстве целевых функций взаимно-двойственных задач, вычисленных в решении, имеем

$$\mathrm{opt}\ \mathrm{P} = \mathrm{opt}\ \mathrm{D} = f_*, \qquad \mathrm{opt}\ \mathrm{P}_x(\bar v) = \mathrm{opt}\ \mathrm{D}_w(\bar v), \qquad \mathrm{opt}\ \mathrm{P}_y(\bar x) = \mathrm{opt}\ \mathrm{D}_v(\bar x). \tag{2.30}$$

Таким образом, (2.28) следует из соотношений (2.11), (2.20) и (2.30). Утверждение о свойствах двухпараметрических задач (2.29) может быть доказано аналогичным образом. □

Будем говорить, что x и v удовлетворяют *условию дополняющей нежесткости* (УДН), если $x^i v^i = 0$ для всех $1 \le i \le n$.

Теорема 3. *Пусть векторы x, v являются допустимыми для задач* (P_x), (D_v). *Векторы x, v удовлетворяют* УДН *тогда и только тогда, когда имеет место равенство*

$$\bar v^\top x + \bar x^\top v = \bar x^\top \bar v. \tag{2.31}$$

Доказательство. Из условий $x \in X \subset \bar X$, $v \in V \subset \bar V$ вытекает, что $\bar x - x \in \ker A = \mathrm{im}\ K^\top$, $\bar v - v \in \ker K = \mathrm{im}\ A^\top$. Из ортогональности векторов $\bar x - x$ и $\bar v - v$ получаем

$$(\bar x - x)^\top (\bar v - v) = \bar x^\top \bar v - \bar v^\top x - \bar x^\top v + x^\top v = 0. \tag{2.32}$$

При $x \ge 0_n$, $v \ge 0_n$ равенство $x^\top v = 0$ эквивалентно УДН. Поэтому из (2.32) следует, что для допустимых x и v имеет место УДН тогда и только тогда, когда выполнено (2.31). □

Следствие 1. *Для любых x, $\bar x$, принадлежащих $\bar X$, и любых v, $\bar v$ из $\bar V$ справедлива формула* (2.32).

Следствие 2. *Для любых $x_* \in X_*$, $v_* \in V_*$ — решений задач* (P_x), (D_v) — *справедливо $x_*^\top v_* = 0$*

Утверждение этого следствия получается из (2.31), если взять x и $\bar{x}$ равными x_*, а v и $\bar{v}$ — равными v_*.

Следствие 3. *Переменные x, u, v, w, y, g и q оптимальны для соответствующих задач тогда и только тогда, когда они удовлетворяют хотя бы одному из следующих условий:*

$$
\begin{array}{llll}
Ax = b,\ x \geq 0_n, & Kv = d,\ \ v \geq 0_n, & \bar{v}^\top x + \bar{x}^\top v = \bar{x}^\top \bar{v}, & (P_x\&D_v)\\
\bar{x} - K^\top y \geq 0_n, & \bar{v} - A^\top w \geq 0_n, & d^\top y + b^\top w = \bar{x}^\top \bar{v}, & (P_y\&D_w)\\
Ax = b,\ x \geq 0_n, & \bar{v} - A^\top w \geq 0_n, & \bar{v}^\top x - b^\top w = 0, & (P_x\&D_w)\\
\bar{x} - K^\top y \geq 0_n, & Kv = d,\ v \geq 0_n, & \bar{x}^\top v - d^\top y = 0, & (P_y\&D_v)\\
K^\top y + x = \bar{x},\ x \geq 0_n, & A^\top w + v = \bar{v},\ v \geq 0_n, & \bar{v}^\top x + \bar{x}^\top v = \bar{x}^\top \bar{v}, & (P_{xy}\&D_{vw})\\
Ag = 0_m,\ g \leq \bar{x}, & Kq = 0_\nu,\ q \leq \bar{v}, & \bar{v}^\top g + \bar{x}^\top q = \bar{x}^\top \bar{v}, & (P_g\&D_q)\\
Ax = b,\ x \geq 0_n, & Kq = 0_\nu,\ q \leq \bar{v}, & \bar{v}^\top x - \bar{x}^\top q = 0, & (P_x\&D_q)\\
\bar{x} - K^\top y \geq 0_n, & A^\top w + v = \bar{v},\ v \geq 0_n, & d^\top y - \bar{x}^\top v = 0. & (P_y\&D_{vw})
\end{array}
$$

В первом столбце приводится допустимое множество соответствующей задачи из ПС. Во втором столбце указывается допустимое множество задачи из ДС. В третьем столбце дано соотношение между оптимальными значениями целевых функций соответствующих задач из ПС и ДС (в соответствии с теоремой 2). В последнем столбце указаны задачи, переменные которых используются в условиях оптимальности. В действительности можно комбинировать каждую задачу из ПС с любой из ДС и получить 16 условий оптимальности. Здесь для краткости представлены только 8 условий оптимальности.

Утверждения следствия 3 разъясним на примере условий (P_x&D_v). Если x и v удовлетворяют этим условиям, то $x \in X_*$, $v \in V_*$ (достаточные условия экстремума). Если $x \in X_*$ и $v \in V_*$, то x и v удовлетворяют (P_x&D_v) (необходимые условия экстремума). Последнее утверждение можно усилить. Следуя стандартным рассуждениям, применяемым в теории ЛП [7], можно показать, что если $x \in X_*$, то существует такой вектор v, что имеет место (P_x&D_v). Аналогично, если $v \in V_*$, то существует такой x, что выполнены условия (P_x&D_v). Если $x \in X_*$, то в соответствии с (2.12) и (2.15) определяем $y \in Y_*$ и $g \in G_*$. Аналогично по $v \in V_*$ из (2.21) и (2.24) находим $w \in W_*$ и $q \in Q_*$.

Отметим, что каждое из условий оптимальности (P_x&D_v)– (P_y&D_{vw}) отличается количеством переменных и ограничений типа равенств и/или неравенств. Из этих условий наименьшее количество неизвестных (n) и количество ограничений ($2n+1$) имеют условия оптимальности (P_y&D_w).

Условия (P_x&D_w) и (P_y&D_v) являются обычными условиями Куна–Таккера для пар взаимно-двойственных задач (P_x), (D_w) и (D_v), (P_y). В них УДН заменены эквивалентными условиями равенств целевых функций соответствующих задач. Условия (P_x&D_v) и (P_y&D_w) являются условиями оптимальности для взаимно-сопряженных задач (P_x), (D_v) и (P_y), (D_w).

Отметим один важный случай выбора векторов-параметров $\bar{x}$ и $\bar{v}$. Пусть $\bar{x} = \bar{v}$. Обозначим такой вектор через ξ. Этот вектор удовлетворяет двум условиям: $A\xi = b$ и $K\xi = d$. Вектор ξ является единственной точкой пересечения этих двух аффинных множеств. Обе матрицы A и K имеют максимальные ранги. Таким образом, вектор ξ единственным образом определяется для каждой задачи ЛП: $\xi = M^{-1}h$, где $(n \times n)$-матрица $M^\top = [A^\top \mid K^\top]$ имеет ранг n и $h^\top = [b^\top, d^\top]$ — n-мерный вектор. В предыдущих формулах в этом случае можно использовать выражение $\bar{x}^\top \bar{v} = \|\xi\|^2$. Например, формулы (2.25) и (2.26) в теореме 1 становятся следующими:

$$\xi^\top(x+v) \geq \|\xi\|^2 \geq d^\top y + b^\top w, \qquad \xi^\top(x+v) \geq \|\xi\|^2 \geq \xi^\top(g+q).$$

Последнее условие в (P_x& D_v) можно переписать в виде

$$\xi^\top(x+v) = \|\xi\|^2 \tag{2.33}$$

Другими словами, вектор ξ ортогонален вектору $x+v-\xi$ и проекция $x+v$ на ξ совпадает с ξ.

Теорема 4. *Пусть векторы x и v допустимы, соответственно, для задач* (P_x) *и* (D_v). *Тогда проекция вектора $x+v$ на вектор ξ совпадает с этим вектором тогда и только тогда, когда x и v являются решениями задач* (P_x) *и* (D_v) *соответственно.*

В заключение этого пункта приведем две взаимно-сопряженные задачи

$$f_*^1(\xi) = \min_{x \in X} \xi^\top x, \qquad X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b,\ x \geq 0_n\}, \tag{P_x}$$

$$f_*^2(\xi) = \min_{v \in V} \xi^\top v, \qquad V = \{v \in \mathbb{R}^n : Kv = d,\ v \geq 0_n\}. \tag{D_v}$$

Обе задачи имеют один и тот же вектор целевой функции ξ. Если x и v допустимы, необходимым и достаточным условием их оптимальности является ортогональность этих векторов, что эквивалентно выполнению линейного условия (2.33).

3. Геометрическая интерпретация

Будем использовать верхние индексы $^\|$ и $^\perp$ при n-мерных векторах для обозначения ортогональных проекций этих векторов на подпространство строк матрицы A и ядро матрицы A соответственно. Например, $x^\| = (A^\top)^\| x$, $x^\perp = (A^\top)^\perp x$, где $(A^\top)^\|$, $(A^\top)^\perp$ определены в соответствии с формулами (2.2):

$$(A^\top)^\| = A^+ A = A^\top (AA^\top)^{-1} A, \qquad (A^\top)^\perp = I_n - (A^\top)^\|. \tag{3.1}$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что для любых векторов $\bar{x} \in \bar{X}$, $\bar{v} \in \bar{V}$ справедливы соотношения

$$A\bar{x}^\perp = 0_m, \qquad K\bar{v}^\| = 0_\nu, \qquad A\bar{x}^\| = A\bar{x} = b, \qquad K\bar{v}^\perp = K\bar{v} = d.$$

Через $\tilde{x}$, $\tilde{v}$ обозначим нормальные решения (решения с минимальной евклидовой нормой) систем $Ax = b$, $Kv = d$. Эти решения можно представить в различных формах записи:

$$\tilde{x} = A^+ b = A^\top (AA^\top)^{-1} b = (A^\top)^\| \bar{x} = \bar{x}^\|, \tag{3.2}$$
$$\tilde{v} = K^+ d = K^\top (KK^\top)^{-1} d = (K^\top)^\| \bar{v} = (A^\top)^\perp \bar{v} = \bar{v}^\perp. \tag{3.3}$$

Пусть $\bar{x}$ и $\bar{v}$ — нормальные решения соответствующих линейных систем, т.е. $\bar{x} = \tilde{x}$ и $\bar{v} = \tilde{v}$. В этом случае имеем $\bar{x}^\top \bar{v} = 0$, так как $\tilde{x} \in \operatorname{im} A^\top$, $\tilde{v} \in \operatorname{im} K^\top$. Таким образом, если все компоненты нормальных решений систем $Ax = b$ и $Kv = d$ одновременно неотрицательны, то эти решения являются решениями задач (P_x) и (D_v), соответственно.

Оба параметра $\bar{x} \in \bar{X}$ и $\bar{v} \in \bar{V}$ могут изменяться во время поиска решения рассматриваемой задачи. Если пара $[\bar{x}, \bar{v}]$ стремится к $[x_*, v_*]$, то оптимальные значения целевых функций в (P_x) и (D_v) стремятся к нулю.

Заметим, что ни в одно из условий экстремума $(\mathrm{P}_x\&\mathrm{D}_v)$,..., $(\mathrm{P}_y\&\mathrm{D}_{vw})$ не входит вектор c. От выбора c зависит только вектор d, причем зависит лишь от $c^\perp$ — проекции c на нуль-пространство матрицы A. Действительно, из (2.4) с учетом (2.3) следует

$$K(c^\perp + c^\|) = Kc^\perp + K(A^\top)^\| c = Kc^\perp = d.$$

Вместе с тем оптимальное значение целевой функции $c^\top x_*$ зависит от выбора $c^\|$, так как для $x_* \in X_*$ имеем $c^\top x_* = (c^\perp + c^\|)^\top x_*$. Согласно (2.27) оптимальные значения целевых функций отличаются на величину $b^\top u(\bar{v})$. Используя (3.2) и формулу $\bar{u} = (AA^\top)^{-1}A(c - \bar{v})$, получим

$$\begin{aligned} b^\top \bar{u} &= b^\top (AA^\top)^{-1} A(c - \bar{v}) = \tilde{x}^\top (c - \bar{v}) = (\bar{x}^\|)^\top (c - \bar{v}) = (\bar{x}^\|)^\top (c - \bar{v})^\|, \\ f_* - f_*^1(\bar{v}) &= x_*^\top (c - \bar{v}) = \tilde{x}^\top (c - \bar{v}). \end{aligned}$$

Пусть $h, p \in \mathbb{R}^n$. С помощью этих векторов в задачах (P_x) и (D_v) изменим векторы $\bar{v}$ и $\bar{x}$. Получим следующие две возмущенные задачи:

$$\min_{x \in X} (\bar{v} + h)^\top x, \tag{P'_x}$$

$$\min_{v \in V} (\bar{x} + p)^\top v. \tag{D'_v}$$

Теорема 5. *Пусть $h \in \mathrm{im}\ A^\top$, $p \in \ker A$. Тогда множество решений X_* задачи (P_x) совпадает с множеством решений задачи (P'_x), множество решений V_* задачи (D_v) совпадает с множеством решений задачи (D'_v).*

Доказательство. Учитывая, что $h \in \mathrm{im}\ A^\top = \ker K$, получаем $K(\bar{v} + h) = d$, т.е. вектор $\bar{v} + h \in \bar{V}$. Поэтому задача (P'_x) является одной из задач семейства (P_x), в котором по построению все задачи имеют одинаковое множество решений, а оптимальные значения целевых функций любых двух задач из этого семейства отличаются лишь на константу. Так как $p \in \ker A = \mathrm{im}\ K^\top$, то из симметрии задач (D_v) и (P_x) следует и второе утверждение теоремы. $\square$

Если в задачах (P), (P_x), (D_v) векторы c, $\bar{v}$, $\bar{x}$ заменить соответственно на векторы $c - c^\|$, $\bar{v} - \bar{v}^\|$, $\bar{x} - \bar{x}^\perp$ и учесть, что $c^\|, \bar{v}^\| \in \mathrm{im}\ A^\top$, $\bar{x}^\perp \in \ker A$, то из результатов теоремы 5 следует

Теорема 6. *Множества решений задач* (P), (P_x), (D_v) *не зависят от проекций $c^\|$, $\bar{v}^\|$, $\bar{x}^\perp$ соответственно.*

Таким образом, вместо векторов c, $\bar{v}$, входящих в целевую функцию задач (P), (P_x), можно взять любые векторы, проекция которых на ядро матрицы A равна $c^\perp$, $\bar{v}^\perp$. При этом множества решений задач (P), (P_x) совпадают. Аналогично в задаче (D_v) можно взять любой вектор, проекция которого на $\mathrm{im}\ A^\top$ равна $\bar{x}^\|$, при этом множество V_* не изменится.

Проекции $x_*^\|$ и $v_*^\perp$ оптимальных векторов x_* и v_* в задачах (P), (P_x), (D_v) определяются непосредственно по формулам (3.2) – (3.3), так как с учетом того, что $x_* \in \bar{X}$, $v_* \in \bar{V}$, имеем

$$x_*^\| = \tilde{x} = \tilde{x}^\| = \bar{x}^\|, \qquad v_*^\perp = \tilde{v} = \tilde{v}^\perp = \bar{v}^\perp = c^\perp. \tag{3.4}$$

Поэтому решение задач (P), (P_x), (D_v) сводится к нахождению двух ортогональных векторов $x_*^\perp \in \ker A$ и $v_*^\| \in \mathrm{im}\ A^\top$ таких, что $x_* = \bar{x} + x_*^\perp \geq 0_n$, $v_* = \bar{v} + v_*^\| \geq 0_n$ и $x_*^\top v_* = 0$. Искомые векторы представимы в виде $x_*^\perp = -K^\top y$, $v_*^\| = -A^\top w$, где $y \in \mathbb{R}^\nu$, $w \in \mathbb{R}^m$; таким образом, речь идет об отыскании векторов y и w, удовлетворяющих (P_y&D_w).

В задачах (D) и (D_w) оптимальные значения целевых функций выражаются через проекции векторов на пространство строк матрицы A:

$$\begin{aligned} \mathrm{opt}\ \mathrm{D} &= b^\top u_* = b^\top (AA^\top)^{-1} A(c - v_*) = (\bar{x}^\|)^\top (c - v_*)^\|, \\ \mathrm{opt}\ \mathrm{D}_w(\bar{v}) &= b^\top w_* = b^\top (AA^\top)^{-1} A(\bar{v} - v_*) = (\bar{x}^\|)^\top (\bar{v} - v_*)^\|. \end{aligned}$$

В задаче (D_v) оптимальное значение целевой функции выражается через проекции векторов на нуль-пространство матрицы A

$$\mathrm{opt}\ \mathrm{D}_v(\bar{x}) = d^\top y_* = d^\top (K^\top)^+ (\bar{x} - x_*) = (\bar{v}^\perp)^\top (\bar{x} - x_*)^\perp.$$

Рассмотрим два случая задач ЛП, когда нахождение их решений существенно упрощается.

С л у ч а й 1. Пусть $c^\perp = 0_n$, т.е. вектор c принадлежит пространству строк матрицы A. Тогда, согласно (3.4), имеем $v_*^\perp = \tilde{v} = \tilde{v}^\perp = \bar{v}^\perp = 0_n$, $\bar{v} \in \mathrm{im}\ A^\top$ и $d = 0_\nu$. Справедливы представления

$$\begin{aligned} \mathrm{opt}\ \mathrm{P} &= c^\top x_* = (c^\|)^\top x_*^\| = (c^\|)^\top \bar{x}^\| = c^\top \bar{x}^\| = c^\top \bar{x}, \\ \mathrm{opt}\ \mathrm{P}_x(\bar{v}) &= \bar{v}^\top x_* = (\bar{v}^\|)^\top x_*^\| = (\bar{v}^\|)^\top \bar{x}^\| = \bar{v}^\top \bar{x}^\| = \bar{v}^\top \bar{x}. \end{aligned}$$

Следовательно, целевые функции задач (P) и (P_x) принимают одни и те же значения при любых $x \in \bar{X}$. Учитывая условия неотрицательности оптимального вектора, получаем, что $X_* = \bar{X} \cap \mathbb{R}^n_+$, т.е. каждый вектор $x \in \bar{X}$, имеющий неотрицательные компоненты, принадлежит X_*. Из $d = 0_\nu$ следует, что в задаче (P_y) допустимое множество Y совпадает с множеством решений Y_*, а задача (D_w) в соответствии с условиями оптимальности (P_y&D_w) сводится к решению системы $A^\top w \leq \bar{v}$, $b^\top w = \bar{x}^\top \bar{v}$. После нахождения W_* множество V_* определяется из первой формулы в (2.21).

С л у ч а й 2. Пусть $\bar{x}^\| = 0_n$, т.е. вектор $\bar{x}$ принадлежит нуль-пространству матрицы A. Тогда $b = 0_m$, $x_*^\| = \tilde{x} = \bar{x} = \bar{x}^\| = 0_n$, $\mathrm{opt}\ \mathrm{D}_v(\bar{x}) = \bar{x}^\top v_* = (\bar{x}^\perp)^\top v_*^\perp = (\bar{x}^\perp)^\top \bar{v}^\perp = \bar{x}^\top \bar{v}^\perp = \bar{x}^\top \bar{v}$, $V_* = \bar{V} \cap \mathbb{R}^n_+$, $W_* = W$. Следовательно, нахождение точек $v_* \in V_*$ сводится к отысканию неотрицательных решений системы линейных уравнений $Kv = d$, что эквивалентно решению системы линейных неравенств $A^\top w \leq \bar{v}$.

Итак, в этих двух случаях решение задачи ЛП сводится к решению линейной системы меньшей размерности, чем любая из систем (P_x&D_v) – (P_y&D_{vw}).

4. Отыскание нормального решения

В качестве примера эффективного использования нетрадиционных условий оптимальности для решения задач ЛП рассмотрим (P_x&D_v). Будем искать нормальное решение системы (P_x&D_v). Рассмотрим следующую задачу квадратичного программирования:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n_+} \min_{v \in \mathbb{R}^n_+} \left[(\|x\|^2 + \|v\|^2)/2 : Ax = b,\ Kv = d,\ \bar{v}^\top x + \bar{x}^\top v = \bar{x}^\top \bar{v} \right], \tag{4.1}$$

т.е. будем искать проекцию в евклидовой норме начала координат пространства $\mathbb{R}^{2n}$ на непустое допустимое множество, определяемое условиями оптимальности (P_x&D_v). Задачи нахождения нормальных решений в ЛП рассматривались О. Мангасарьяном в [8, 9]. Задача (4.1) содержит $2n$ неизвестных, $n+1$ ограничений типа равенств и $2n$ ограничений-неравенств. Для того чтобы упростить эту задачу, перейдем к двойственной к (4.1). Для этого выпишем функцию Лагранжа для задачи (4.1):

$$L(x,v,p,q,\alpha) = \left[\|x\|^2 + \|v\|^2\right]/2 + p^\top(b - Ax) + q^\top(d - Kv) + \alpha(\bar{v}^\top x + \bar{x}^\top v - \bar{x}^\top \bar{v}), \quad (4.2)$$

где введены множители Лагранжа $p \in \mathbb{R}^m$, $q \in \mathbb{R}^\nu$, $\alpha \in \mathbb{R}^1$.

Будем искать седловую точку функций Лагранжа $L(x,v,p,q,\alpha)$, решая следующую задачу:

$$\max_{p\,\in\,\mathbb{R}^n}\ \max_{q\,\in\,\mathbb{R}^\nu}\ \max_{\alpha\,\in\,\mathbb{R}^1}\ \min_{x\,\in\,\mathbb{R}^n_+}\ \min_{v\,\in\,\mathbb{R}^n_+} L(x,v,p,q,\alpha). \quad (4.3)$$

Внутренняя задача минимизации решается аналитически, внешняя задача максимизации сводится к решению задачи безусловной максимизации вогнутой дифференцируемой кусочно-квадратичной функции.

Необходимые и достаточные условия минимума функции Лагранжа по $x \in \mathbb{R}^n_+$ и $v \in \mathbb{R}^n_+$ имеют вид

$$\begin{array}{lll} L_x(x,v,p,q,\alpha) = x - A^\top p + \alpha\bar{v} \geq 0_n, & x \geq 0_n, & D(x)L_x = 0_n, \\ L_v(x,v,p,q,\alpha) = v - K^\top q + \alpha\bar{x} \geq 0_n, & v \geq 0_n, & D(v)L_v = 0_n. \end{array}$$

Разрешая эти соотношения относительно x и v, получим

$$x = (A^\top p - \alpha\bar{v})_+, \qquad v = (K^\top q - \alpha\bar{x})_+. \quad (4.4)$$

Здесь и ниже через $(a)_+$ обозначается вектор из $\mathbb{R}^n$ с компонентами $a^i_+ = \max[a^i, 0]$, $i = 1, \dots, n$, где a^i есть i-я компонента вектора a.

Подставляя решения (4.4) в выражение для функции Лагранжа (4.2), получаем двойственную функцию

$$\tilde{L}(p,q,\alpha) = b^\top p + d^\top q - \alpha\bar{x}^\top\bar{v} - \left[\|(A^\top p - \alpha\bar{v})_+\|^2 + \|K^\top q - \alpha\bar{x})_+\|^2\right]/2.$$

Задача, двойственная к (4.1), является задачей безусловной максимизации и состоит в отыскании

$$\max_{p\,\in\,\mathbb{R}^m}\ \max_{q\,\in\,\mathbb{R}^\nu}\ \max_{\alpha\,\in\,\mathbb{R}^1} \tilde{L}(p,q,\alpha). \quad (4.5)$$

Если $[x,v,p,q,\alpha]$ — решение задачи (4.3), то $[x,v]$ — решение задачи (4.1), а $[p,q,\alpha]$ — решение задачи (4.5). Для рассматриваемой задачи квадратичного программирования (4.1) справедливо и обратное утверждение: если $[p,q,\alpha]$ — решение задачи (4.5), то, подставляя его в формулы (4.4), получим решение $[x,v,p,q,\alpha]$ задачи (4.3) и решение $[x,v]$ задачи (4.1).

Итак, из теоремы двойственности квадратичного программирования, примененной к задачам (4.1),(4.5), получаем следующий результат.

Теорема 7. *Задачи* (P_x), (D_v) *разрешимы тогда и только тогда, когда разрешима задача безусловной максимизации* (4.5). *Для каждого решения* $[p,q,\alpha]$ *задачи* (4.5) *векторы*

$$\tilde{x}_* = (A^\top p - \alpha\bar{v})_+, \qquad \tilde{v}_* = (K^\top q - \alpha\bar{x})_+$$

являются единственным решением задачи (4.1), *векторы* $\tilde{x}_*$ *и* $\tilde{v}_*$ *являются нормальными решениями соответственно задач* (P_x) *и* (D_v).

Отметим две особенности прямой задачи квадратичного программирования (4.1) и двойственной к ней задачи (4.5):

1) переменные прямой задачи не входят в постановку двойственной;

2) двойственная задача является задачей безусловной максимизации дифференцируемой вогнутой кусочно-квадратичной функции в пространстве меньшей размерности, чем прямая задача.

Поэтому вместо решения задачи на условный экстремум (4.1) целесообразно решать задачу на безусловной экстремум (4.5), имеющую ме́ньшую размерность. Тогда решение исходной задачи находится по простым формулам (4.4).

Таким образом, решение исходной задачи ЛП свелось к решению задачи безусловной максимизации кусочно-квадратичной функции $n+1$ переменных. В отличие от классического метода внешнего квадратичного штрафа, примененного к задаче (P_x), в задаче (4.5) отсутствует стремящийся к бесконечности коэффициент штрафа.

Список литературы

[1] **Еремин И.И.** Теория линейной оптимизации. Екатеринбург: изд-во “Екатеринбург”, 1999.

[2] **Васильев Ф.П., Иваницкий А.Ю.** Линейное программирование. М.: Факториал, 1998.

[3] **Roos C., Terlaky T., Vial J.-Ph.** Theory and algorithms for linear optimization. An interior point approach. Chichester: Wiley, 1997.

[4] **Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г.** Нахождение нормальных решений в задачах линейного программирования // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2000. Т. 40, N° 12, с. 1766–1386.

[5] **Евтушенко Ю.Г., Жадан В.Г.** Барьерно-проективные и барьерно-ньтоновские численные методы оптимизации (случай линейного программирования). М.: ВЦ РАН, 1992.

[6] **Evtushenko Yu.G., Moretti A., Zhadan V.G.** Newton’s steepest descent for linear programming // Dynamics of non-homogeneous systems. Proceedings of ISA RAS. M.: Editorial URSS, 1999. V. 2. P. 86–108.

[7] **Mangasarian O.L.** Nonlinear Programming. New York: McGrow-Hill, 1969.

[8] **Mangasarian O.L.** Least-norm linear programming solution as an unconstrained minimization problem // J. Math. Analysis and Applic, 1983. V. 92. P. 240–251.

[9] **Mangasarian O.L.** Normal solutions of linear programs // Math. Program. Study, 1984. V. 22. P. 206–216.