ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2005, том 45, № 2, с. 238–253

УДК 519.853.6

О СЕМЕЙСТВАХ ГИПЕРПЛОСКОСТЕЙ, РАЗДЕЛЯЮЩИХ ПОЛИЭДРЫ[1]

© 2005 г. А.И. Голиков, Ю.Г. Евтушенко, С. Кетабчи

(119991 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ РАН)

e-mail: gol@ccas.ru, evt@ccas.ru

Поступила в редакцию 19.08.2004 г.
Переработанный вариант 20.09.2004 г.

Рассматривается задача построения семейства гиперплоскостей, разделяющих два непересекающихся непустых полиэдра, заданных системой линейных равенств или системой линейных уравнений с неотрицательными переменными. Приводятся конструктивные алгоритмы решения этой задачи. Построение разделяющих гиперплоскостей существенно опирается на теоремы об альтернативах. Библ. 6. Фиг. 2.

Ключевые слова: теоремы об альтернативах, гиперплоскости, разделяющие два полиэдра.

1. ВВЕДЕНИЕ

Теорема о существовании разделяющей гиперплоскости играет важную роль в функциональном анализе, в теории оптимизации и в исследовании операций. При решении практических задач важно не только знать, что существует разделяющая гиперплоскость, но и уметь конструктивно ее строить. Рассматривается задача о численном нахождении семейства гиперплоскостей, разделяющих два непересекающихся непустых полиэдра, заданных с помощью систем неравенств или систем уравнений с неотрицательными переменными. В основе работы лежит теорема И.И.Еремина о гиперплоскости, разделяющей полиэдры, заданные системами неравенств (см. [1, теорема 10.1]). Используется специфический вид разделяющей гиперплоскости, нормаль и сдвиг которой выражены через произвольное решение некоторой системы, альтернативной к несовместной системе. Эта несовместная система состоит из двух совместных подсистем, каждая из которых определяет непустой полиэдр. Система несовместна, так как эти полиэдры не пересекаются. Построение разделяющих гиперплоскостей существенно опирается на теоремы об альтернативах.

В разд. 2 рассмотрено применение нормального решения альтернативной системы для построения семейства разделяющих гиперплоскостей. Использование результатов работы [2] позволяет найти нормальное решение из решения задачи безусловной минимизации невязки несовместной системы неравенств, задающей оба полиэдра. Как правило, число переменных в задаче безусловной минимизации гораздо меньше, чем в альтернативной совместной системе. Поэтому такие расчеты менее трудоемки, чем нахождение решения альтернативной системы.

В разд. 3 рассматривается вопрос о том, как из альтернативной системы выделить такое решение, которое дает семейство гиперплоскостей максимальной толщины, совпадающей с минимальным расстоянием между полиэдрами.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 03-01-00465) и по Программе поддержки ведущих научных школ (код проекта НШ-1737.2003.1)

В разд. 4 строятся семейства разделяющих гиперплоскостей для двух полиэдров, заданных с помощью системы линейных уравнений с неотрицательными переменными. Показано, что любое решение альтернативной системы, в отличие от случая полиэдров, заданных с помощью системы линейных неравенств, определяет два различных семейства разделяющих гиперплоскостей.

В разд. 5 приводятся краткие сведения об обобщенном методе Ньютона для нахождения нормального решения альтернативной системы, которое используется для построения семейства гиперплоскостей, разделяющих заданные системой неравенств полиэдры. Этот метод реализован в системе MATLAB и показал высокую эффективность при решении тестовых задач большой размерности.

2. ПОСТРОЕНИЕ РАЗДЕЛЯЮЩИХ ГИПЕРПЛОСКОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРЕМЫ ГЕЙЛА ОБ АЛЬТЕРНАТИВАХ

Пусть заданы векторы $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $\|b\| \neq 0$ и прямоугольная матрица $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Определим два множества

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\} \ \text{ и } \ U = \{u \in \mathbb{R}^m : A^\top u = 0_n, \ \ b^\top u = \rho, \ \ u \geq 0_m\},$$

где $\rho > 0$ — произвольная фиксированная величина, 0_i есть i-мерный нулевой вектор.

Две линейные системы

$$Ax \geq b, \tag{1}$$

$$A^\top u = 0_n, \ \ b^\top u = \rho, \ \ u \geq 0_m, \tag{2}$$

определяющие, соответственно, множества X и U, альтернативны при любом строго положительном параметре ρ, т.е. совместной является одна и только одна из них (теорема Гейла; см., например, в [2]). Умножая первое равенство в (2) скалярно на x и вычитая из результата второе равенство, получаем

$$u^\top (Ax - b) = -\rho < 0. \tag{3}$$

Это равенство является ключевым для построения семейства гиперплоскостей, разделяющих два полиэдра, заданных в виде пересечения полупространств.

Представим A, b и u в виде

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \qquad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

где A_1, A_2 — матрицы, соответственно, размерами $m_1 \times n$, $m_2 \times n$; векторы $b_1, u_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$ и $b_2, u_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$; $m_1 + m_2 = m$. Введем два непустых множества

$$X_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : A_1 x \geq b_1\} \ \text{ и } \ X_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : A_2 x \geq b_2\},$$

определяющих два полиэдра (см. [3], многогранные множества) таких, что

$$X = X_1 \cap X_2 = \emptyset.$$

Введем гиперплоскость $c^\top x - \gamma = 0$, где вектор нормали $c \in \mathbb{R}^n$, $\|c\| \neq 0$ и γ — скаляр. Будем говорить, что гиперплоскость $c^\top x - \gamma = 0$ разделяет множества X_1 и X_2, если $c^\top x - \gamma \geq 0$ для всех $x \in X_1$, $c^\top x - \gamma \leq 0$ для всех $x \in X_2$. Если в этих выражениях знаки неравенств можно заменить на строгие, то будем говорить, что гиперплоскость строго разделяющая.

Рассмотрим задачу об отыскании гиперплоскостей, разделяющих X_1 и X_2. С учетом введенного разбиения системы (1), (2) и соотношение (3) запишутся в виде

$$A_1 x \geq b_1, \qquad A_2 x \geq b_2, \tag{4}$$

$$A_1^\top u_1 + A_2^\top u_2 = 0_n, \qquad b_1^\top u_1 + b_2^\top u_2 = \rho, \qquad u_1 \geq 0_{m_1}, \quad u_2 \geq 0_{m_2}, \tag{5}$$

$$u_1^\top (A_1 x - b_1) + u_2^\top (A_2 x - b_2) = -\rho < 0. \tag{6}$$

Определим линейную функцию $\varphi(x, \alpha)$ от переменных $x \in \mathbb{R}^n$ и скалярного параметра α из интервала $[0, 1]$:

$$\varphi(x, \alpha) = u_1^\top (A_1 x - b_1) + \alpha\rho. \tag{7}$$

Из (6) следует, что можно использовать эквивалентное определение функции $\varphi(x, \alpha)$:

$$\varphi(x, \alpha) = u_2^\top (b_2 - A_2 x) + (\alpha - 1)\rho. \tag{8}$$

Условие $\varphi(x, \alpha) = 0$ при u_1 и u_2, удовлетворяющих системе (5), и параметре α из отрезка $[0, 1]$ определяет гиперплоскость, разделяющую множества X_1 и X_2, так как если $x \in X_1$, то согласно (7) имеем $\varphi(x, \alpha) \geq 0$, и если $x \in X_2$, то согласно (8) имеем $\varphi(x, \alpha) \leq 0$. Разделяющая гиперплоскость $\varphi(x, \alpha) = 0$ при $\alpha = 1/2$ была впервые введена и изучена И.И. Ереминым (см., например, [1]).

Гиперплоскость $\varphi(x, \alpha) = 0$, определяемая функцией вида (7) и (8), согласно системе (5) может быть записана в виде

$$\varphi(x, \alpha) = c^\top x - \gamma = 0,$$

где

$$c = A_1^\top u_1 = -A_2^\top u_2, \qquad \gamma = b_1^\top u_1 - \alpha\rho = -b_2^\top u_2 - (\alpha - 1)\rho.$$

Здесь u_1, u_2 — произвольные решения системы (5).

Будем изучать семейство параллельных гиперплоскостей, задаваемое следующими эквивалентными определениями:

$$\Gamma(\alpha) \;=\; \{x \in \mathbb{R}^n : u_1^\top A_1 x - b_1^\top u_1 + \alpha\rho = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x, \alpha) = 0\}, \tag{9}$$

$$\Gamma(\alpha) \;=\; \{x \in \mathbb{R}^n : -u_2^\top A_2 x + b_2^\top u_2 + (\alpha - 1)\rho = 0\} \tag{10}$$

при различных фиксированных векторах $u^\top = [u_1^\top, u_2^\top]$, удовлетворяющих системе (5). Все гиперплоскости, принадлежащие этому семейству, параллельны, так как имеют общую нормаль $c = A_1^\top u_1 = -A_2^\top u_2$.

Гиперплоскость $\Gamma(1)$ выражается через $\Gamma(0)$ с помощью вектора сдвига y:

$$\Gamma(1) = \Gamma(0) + y.$$

Норму вектора y — расстояние между гиперплоскостями $\Gamma(1)$ и $\Gamma(0)$ — будем называть *толщиной семейства гиперплоскостей.*

Проекция $\bar{x}^*$ точки $\bar{x}$ на гиперплоскость $\Gamma(\alpha)$ согласно [2, 3] определяется формулой

$$\bar{x}^* = \bar{x} + c(b_1^\top u_1 - c^\top \bar{x} - \alpha\rho)/\|c\|^2. \tag{11}$$

Обозначим через $\mathrm{pr}(0_n, \Gamma(\alpha))$ проекцию начала координат на гиперплоскость $\Gamma(\alpha)$. Положив $\bar{x} = 0_n$ в (11), получим $\mathrm{pr}(0_n, \Gamma(\alpha)) = c(b_1^\top u_1 - \alpha\rho)/\|c\|^2$. Отсюда находим вектор сдвига y и $\|y\|$ — толщину семейства гиперплоскостей $\Gamma(\alpha)$:

$$
\begin{aligned}
y &= \mathrm{pr}(0_n, \Gamma(1)) - \mathrm{pr}(0_n, \Gamma(0)) = -c\rho/\|c\|^2, && (12)\\
\|y\| &= \rho/\|c\|. && (13)
\end{aligned}
$$

Система (5) может иметь много решений. В данном разделе рассмотрим свойства семейства разделяющих гиперплоскостей, в которых в качестве u использовано нормальное решение $\tilde{u}^*$ системы (5). Результаты работы [2] позволяют сравнительно просто построить нормальное решение, т.е. найти решение следующей задачи квадратичного программирования:

$$
\min_{u \in U} \frac{1}{2}\|u\|^2, \qquad U = \{u \in \mathbb{R}^m : A^\top u = 0_n, \;\; b^\top u = \rho, \;\; u \geq 0_m\}. \tag{14}
$$

Здесь и ниже используется евклидова норма векторов.

Вводится следующая задача безусловной минимизации нормы вектора невязок системы (1):

$$
I_1 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2}\|(b - Ax)_+\|^2, \tag{15}
$$

где a_+ — неотрицательная часть вектора a, т.е. i-я компонента вектора a_+ совпадает с i-й компонентой вектора a, если она неотрицательна, и равна нулю в противном случае.

Задача безусловной минимизации (15) является двойственной к следующей задаче квадратичного программирования:

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \max_{z \in Z} \left\{ b^\top z - \frac{1}{2}\|z\|^2 \right\}, \\
Z &= \{z^\top = [z_1^\top, z_2^\top] \in \mathbb{R}^m : A_1^\top z_1 + A_2^\top z_2 = 0_n, \;\; z_1 \geq 0_{m_1}, \;\; z_2 \geq 0_{m_2}\}.
\end{aligned} \tag{16}
$$

Задачи (15), (16) всегда разрешимы, причем задача (16) имеет единственное решение, так как ее допустимое множество непусто и строго вогнутая квадратичная целевая функция ограничена сверху величиной $\|b\|^2/2$. Приводимая ниже теорема 1 устанавливает эквивалентность задач квадратичного программирования (14) и (16) в том смысле, что решение любой из них определяет решение другой. Решение $z^* \in \mathbb{R}^m$ задачи квадратичного программирования (16) выражается через решение $x^* \in \mathbb{R}^n$ более простой задачи (15) безусловной минимизации кусочно-квадратичной функции. Обычно в задаче разделения полиэдров (4) имеет место $n \ll m$.

Теорема 1. *Пусть полиэдры X_1 и X_2 непусты, а их пересечение пусто. Всякое решение x^* задачи* (15) *определяет единственное решение ${z^*}^\top = [{z_1^*}^\top, {z_2^*}^\top]$ задачи* (16) *по формулам*

$$
z_1^* = (b_1 - A_1 x^*)_+, \qquad z_2^* = (b_2 - A_2 x^*)_+; \tag{17}
$$

нормальное решение $\tilde{u}^*$ системы (5) *выражается через решение z^* задачи* (16) *по формуле*

$$
\tilde{u}^* = \rho z^*/\|z^*\|^2, \tag{18}
$$

а решение z^* задачи (16) *— через решение $\tilde{u}^*$ задачи* (14) *по формуле*

$$
z^* = \rho \tilde{u}^*/\|\tilde{u}^*\|^2 \tag{19}
$$

и имеет место $\|\tilde{u}^*\|\|z^*\| = \rho$. Оптимальные значения целевых функций задач (15) *и* (16) *совпадают: $I_1 = I_2 = \|z^*\|^2/2$.*

Утверждения теоремы 1 следуют из результатов статьи [2]. Вектор $z^{*\top} = [z_1^{*\top}, z_2^{*\top}]$ будем называть *вектором минимальных невязок* системы (4).

Рассмотрим семейство гиперплоскостей (9), (10), использующее нормальное решение $\tilde{u}^*$ системы (5), задаваемое двумя эквивалентными определениями:

$$\Gamma(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : \tilde{u}_1^{*\top}(A_1 x - b_1) + \alpha\rho = 0\}, \tag{20}$$

$$\Gamma(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : -\tilde{u}_2^{*\top}(A_2 x - b_2) + (\alpha - 1)\rho = 0\}. \tag{21}$$

Отметим, что возможен другой эквивалентный вид семейства гиперплоскостей (20) и (21), если выразить $\tilde{u}^*$ через z^* согласно (19):

$$\Gamma(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : z_1^{*\top}(A_1 x - b_1) + \alpha\|z^*\|^2 = 0\},$$

$$\Gamma(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : z_2^{*\top}(b_2 - A_2 x) + (\alpha - 1)\|z^*\|^2 = 0\}.$$

Теорема 2 (о семействе параллельных разделяющих гиперплоскостей (20), (21)). *Пусть полиэдры X_1 и X_2 непусты, а их пересечение пусто; решением задачи* (15) *является x^*, векторы z^* и $\tilde{u}^*$ определяются из* (17) *и* (18). *Тогда верно следующее:*

1) *существует решение системы* (5) *и для любого решения этой системы справедливо $\|u_1\| \neq 0$, $\|u_2\| \neq 0$ и $\|A_1^\top u_1\| = \|A_2^\top u_2\| \neq 0$;*

2) *при $0 \leq \alpha \leq 1$ множество $\Gamma(\alpha)$ задает семейство параллельных гиперплоскостей, разделяющих множества X_1 и X_2, при $0 < \alpha < 1$ гиперплоскости $\Gamma(\alpha)$ строго разделяют X_1 и X_2;*

3) *если в качестве α взять $\alpha_* = \|z_1^*\|^2/\|z^*\|^2$, то точка x^* лежит на разделяющей гиперплоскости, соответствующей этому значению α;*

4) *вектор сдвига $y = \Gamma(1) - \Gamma(0)$ и толщина семейства гиперплоскостей $\Gamma(\alpha)$ определяются, соответственно, по формулам*

$$y = \frac{-\rho A_1^\top \tilde{u}_1^*}{\|A_1^\top \tilde{u}_1^*\|^2}, \qquad \|y\| = \frac{\rho}{\|A_1^\top \tilde{u}_1^*\|};$$

5) *если $\alpha > 0$, то $X_1 \cap \Gamma(\alpha) = \emptyset$; если $\alpha < 1$, то $X_2 \cap \Gamma(\alpha) = \emptyset$;*

6) *если $X_1 \cap \Gamma(0) \neq \emptyset$, то $\Gamma(0)$ — гиперплоскость, опорная к множеству X_1; если $X_2 \cap \Gamma(1) \neq \emptyset$, то $\Gamma(1)$ — гиперплоскость, опорная к множеству X_2;*

7) *всякое решение x^* задачи* (15) *не принадлежит ни множеству X_1, ни множеству X_2.*

Доказательство.

1. Система (5) является альтернативной к несовместной системе (4), а потому у системы (5) существует решение, при этом $\|A_1^\top u_1\| = \|A_2^\top u_2\|$. Покажем, что эти нормы не могут равняться нулю. Из соотношения $b_1^\top u_1 + b_2^\top u_2 = \rho > 0$ следует, что хотя бы одно из двух слагаемых в левой части строго больше нуля. Без потери общности будем считать, что

$$b_1^\top u_1 = \rho_1 > 0. \tag{22}$$

Так как, по условию теоремы, $X_1 \neq \emptyset$, то для системы $A_1 x \geq b_1$ альтернативная система $A_1^\top u_1 = 0_n$, $b_1^\top u_1 = \rho_1$, $u_1 \geq 0_{m_1}$, несовместна. Поэтому при выполнении условия (24) и при $u_1 \geq 0_{m_1}$ вектор $A_1^\top u_1$ не может быть нулевым. Следовательно, и $A_2^\top u_2$ не является нулевым вектором. Отсюда заключаем, что решения u_1, u_2 системы (5) ненулевые.

2. Необходимое условие минимума в задаче (15) с учетом (17) и (18) приводит к равенствам $A^\top z^* = 0_n$, $A^\top \tilde{u}^* = 0_n$. Определим вектор c следующим образом:

$$c = A_1^\top \tilde{u}_1^* = -A_2^\top \tilde{u}_2^*. \tag{23}$$

Согласно доказанному п. 1) $\|c\| \neq 0$. Взяв в формулах (7), (8) в качестве u нормальное решение $\tilde{u}^*$, придем к соотношениям

$$\begin{aligned} \varphi(x,\alpha) &= \tilde{u}_1^{*\top}(A_1^\top x - b_1) + \alpha\rho = c^\top x - b_1^\top \tilde{u}_1^* + \alpha\rho, && (24)\\ \varphi(x,\alpha) &= \tilde{u}_2^{*\top}(b_2 - A_2^\top x) + (\alpha-1)\rho = c^\top x + b_2^\top \tilde{u}_2^* + (\alpha-1)\rho. && (25) \end{aligned}$$

Если $x \in X_1$, $\alpha \geq 0$, то $\varphi(x,\alpha) \geq 0$. Если $x \in X_2$, $\alpha \leq 1$, то $\varphi(x,\alpha) \leq 0$. Поэтому $\Gamma(\alpha)$ при $0 \leq \alpha \leq 1$ действительно задает семейство разделяющих гиперплоскостей.

Если $\alpha > 0$ и $x \in X_1$, то согласно (24) имеем $\varphi(x,\alpha) > 0$; аналогично, при $\alpha < 1$ и $x_2 \in X_2$ из (25) следует $\varphi(x,\alpha) < 0$, т.е. в этом случае $\Gamma(\alpha)$ задает семейство строго разделяющих гиперплоскостей.

3. Возьмем в (11) в качестве $\bar{x}$ вектор x^*, а в качестве α — число α_*. Тогда из (11) имеем

$$\bar{x}^* - x^* = c\left(b_1^\top \tilde{u}_1^* - \rho\frac{\|z_1^*\|^2}{\|z^*\|^2} - c^\top x^*\right).$$

Отсюда, учитывая формулы (17) и (18), приходим к $\bar{x}^* - x^* = 0_n$, т.е. в этом случае вектор x^* принадлежит разделяющей гиперплоскости $\Gamma(\alpha_*)$. Аналогично, подставляя α_* в (22) и учитывая, что $1 - \alpha_* = \|z_1^*\|/\|z^*\|^2$, получаем, что x^* принадлежит разделяющей гиперплоскости $\Gamma(\alpha_*)$.

4. Этот пункт следует из формул (12) и (13).

5. Из условий $x_1 \in X_1$ и $\tilde{u}_1^* \geq 0_{m_1}$ следует, что $\tilde{u}_1^{*\top}(A_1 x_1 - b_1) \geq 0$. Вместе с тем из условия $x_1 \in \Gamma(\alpha)$ имеем $\tilde{u}_1^{*\top}(A_1 x_1 - b) + \alpha\rho = 0$, что невозможно при $\alpha\rho > 0$. Следовательно, пересечение множеств X_1 и $\Gamma(\alpha)$ пусто при всяком $\alpha > 0$. Аналогично доказывается случай $\alpha < 1$.

6. Множества X_1 и $\Gamma(0)$ имеют хотя бы одну общую точку x_1. Множество X_1 лежит в полупространстве $c^\top x_1 - \tilde{u}_1^{*\top} b_1 \geq 0$, так как это неравенство можно переписать в виде $\tilde{u}_1^{*\top}(A_1 x_1 - b_1) \geq 0$. Следовательно, гиперплоскость $\Gamma(0)$ опорная к X_1 в точке x_1. Аналогично доказывается п. 2).

7. Предположим противное, т.е. пусть решение x^* задачи (15) таково, что $x^* \in X_1$. Это означает, что $z_1^* = 0_{m_1}$. Тогда, согласно (18), решение системы (5) таково, что $\|\tilde{u}_1^*\| = 0$, и это противоречит п. 1) теоремы. Теорема доказана. $\square$

Из теоремы 2 вытекает, что простейший вариант построения семейства разделяющих гиперплоскостей состоит в следующем: решается задача безусловной минимизации (15) невязки несовместной системы (1) в пространстве $\mathbb{R}^n$ и находится нормальное решение $\tilde{u}^*$ системы (5). Затем по формулам (20) или (21) строится $\Gamma(\alpha)$. Подход, предложенный И.И. Ереминым, состоит в нахождении произвольного решения совместной системы (5) с m неизвестными. Так как в задаче построения разделяющей гиперплоскости обычно $n \ll m$, то проще использовать подход, вытекающий из теоремы 2.

Заметим, что нормальное решение $\tilde{u}^*$ системы (5) можно найти другим способом — из решения двойственной задачи к задаче квадратичного программирования (14). Двойственная задача является задачей безусловной максимизации кусочно-квадратичной функции с числом переменных, равным $n+1$:

$$\max_{\beta\in\mathbb{R}^1}\ \max_{x\,\in\,\mathbb{R}^n}\ \left\{\beta\rho-\frac{1}{2}\|(\beta b-Ax)_+\|^2\right\}. \tag{26}$$

Нормальное решение $\tilde{u}^*$ системы (5) определяется по решению β', x' задачи (26) из формулы

$$\tilde{u}^*=(\beta' b-Ax')_+.$$

В следующей теореме определяется расстояние между опорными гиперплоскостями, построенными с помощью нормального решения $\tilde{u}^*$ системы (5).

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2. *Тогда существуют* $\hat{\alpha}\le 0$ *и* $\tilde{\alpha}\ge 1$ *такие, что семейство параллельных гиперплоскостей* (20), (21) *разделяет множества* X_1 *и* X_2 *при* $\hat{\alpha}\le\alpha\le\tilde{\alpha}$. *Гиперплоскости* $\Gamma(\hat{\alpha})$ *и* $\Gamma(\tilde{\alpha})$ *являются опорными ко множествам* X_1 *и* X_2 *соответственно, гиперплоскость* $\Gamma(\tilde{\alpha})$ *выражается через* $\Gamma(\hat{\alpha})$ *по формуле* $\Gamma(\tilde{\alpha})=\Gamma(\hat{\alpha})+y$, *где вектор сдвига* $y=(\hat{\alpha}-\tilde{\alpha})c/\|c\|^2$, $\|y\|=(\tilde{\alpha}-\hat{\alpha})/\|c\|$.

Доказательство. Из вида функции $\varphi(x,\alpha)$ следует, что при всех $x\in X_1$ и $\alpha\ge 0$ имеют место неравенства

$$\varphi(x,\alpha) = \tilde{u}_1^{*\top}(A_1^\top x-b_1)+\alpha\rho=c^\top x-b_1^\top\tilde{u}_1^*+\alpha\rho>0, \tag{27}$$
$$c^\top x \ge b_1^\top\tilde{u}_1^*-\alpha\rho. \tag{28}$$

Аналогично, при всех $x\in X_2$ и $\alpha\le 1$ выполнены неравенства

$$\varphi(x,\alpha) = \tilde{u}_2^{*\top}(b_2-A_2^\top x)+(\alpha-1)\rho=c^\top x+b_2^\top\tilde{u}_2^*+(\alpha-1)\rho\le 0, \tag{29}$$
$$c^\top x \le -b_2^\top\tilde{u}_2^*-(\alpha-1)\rho. \tag{30}$$

Согласно неравенствам (28) и (30) существуют $\hat{x}\in X_1$ и $\tilde{x}\in X_2$ такие, что

$$c^\top\hat{x}=\min_{x\in X_1}c^\top x,\qquad c^\top\tilde{x}=\max_{x\in X_2}c^\top x. \tag{31}$$

Из (27) при $x=\hat{x}$ следует неравенство

$$c^\top\hat{x}-b_1^\top\tilde{u}_1^*+\alpha\rho\ge 0, \tag{32}$$

и при $\alpha=0$ имеем

$$b_1^\top\tilde{u}_1^*-c^\top\hat{x}\le 0. \tag{33}$$

Поэтому неравенство (32) справедливо для любого $\alpha\ge\hat{\alpha}$, где

$$\hat{\alpha}=(b_1^\top\tilde{u}_1^*-c^\top\hat{x})/\rho\le 0. \tag{34}$$

Из (29) следует, что при $x\in X_2$ и $\alpha\le 1$ имеем

$$\varphi(x,\alpha)=c^\top\tilde{x}+b_2^\top\tilde{u}_2^*+\rho(\alpha-1)\le 0$$

и при $\alpha=1$

$$c^\top\tilde{x}+b_2^\top\tilde{u}_2^*\le 0. \tag{35}$$

Поэтому неравенство $\varphi(x,\alpha)\le 0$ имеет место для всех $x\in X_2$ и α таких, что $\alpha\le\tilde{\alpha}$, где

$$\tilde{\alpha}=1-(c^\top\tilde{x}+b_2^\top\tilde{u}_2^*)/\rho\ge 1. \tag{36}$$

Гиперплоскость $\Gamma(\hat{\alpha}) = \{x \in \mathbb{R}^n : c^\top x = c^\top \hat{x}\}$ имеет с множеством X_1 общую точку $\hat{x}$. В силу (31) всякая точка из X_1 принадлежит полупространству $c^\top(\hat{x} - x) \leq 0$. Следовательно, гиперплоскость $\Gamma(\hat{\alpha})$ является опорной к множеству X_1. Вектор c — опорный к множеству X_1 в точке $\hat{x}$. Если, в частности, $\hat{\alpha} = 0$, то опорной будет гиперплоскость $\Gamma(0)$. Аналогично показывается, что $\Gamma(\tilde{\alpha})$ есть опорная гиперплоскость к множеству X_2 в точке $\tilde{x}$. Вектор сдвига y получается после проведения простейших вычислений, аналогичных (12) и (13). Теорема доказана. $\square$

В некоторых случаях благодаря знанию нормального вектора $\tilde{u}^*$ удается легко определить оптимальные значения целевых функций в задачах (31) и установить, являются ли гиперплоскости $\Gamma(\alpha)$ при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ опорными к множествам X_1 и X_2 соответственно. Обозначим через $w_1 \in \mathbb{R}^{m_1}_+$, $w_2 \in \mathbb{R}^{m_2}_+$ множители Лагранжа и введем функции Лагранжа для задач (31):

$$L_1(x, w_1) = c^\top x + w_1^\top(b_1 - A_1 x), \qquad L_2(x, w_2) = -c^\top x + w_2^\top(b_2 - A_2 x).$$

Пара $[x_1, w_1]$ образует точку Куна–Таккера для первой задачи (31), если выполнены соотношения

$$c = A_1^\top w_1, \quad D(w_1)(b_1 - A_1 x_1) = 0_{m_1}, \quad w_1 \geq 0_{m_1}, \quad A_1 x_1 \geq b_1. \tag{37}$$

Аналогично, для второй задачи (31) пара $[x_2, w_2]$ образует точку Куна–Таккера, если

$$c = -A_2^\top w_2, \quad D(w_2)(b_2 - A_2 x_2) = 0_{m_2}, \quad w_2 \geq 0_{m_2}, \quad A_2 x_2 \geq b_2. \tag{38}$$

Если в (37) в качестве w_1 взять вектор $\tilde{u}_1^*$ и для него найдется вектор x_1, удовлетворяющий (37), то $[x_1, \tilde{u}_1^*]$ — точка Куна–Таккера. При этом из (34) следует, что $\hat{\alpha} = 0$, т.е. $\Gamma(0)$ является опорной гиперплоскостью к X_1 в точке x_1. Аналогично, если для второй задачи (31) взять $w_2 = \tilde{u}_2^*$ и для него найдется вектор x_2, удовлетворяющий (38), то с учетом (36) получим, что $\tilde{\alpha} = 1$. Таким образом, $\Gamma(1)$ является опорной гиперплоскостью к X_2 в точке x_2. Если $\hat{\alpha} < 0$ или $\tilde{\alpha} > 1$, то ищем оптимальные множители Лагранжа w_1^* или w_2^* для соответствующих задач в (31). Из первых условий в (37) и (38) следует, что эти векторы удовлетворяют соотношению

$$A_1^\top w_1^* + A_2^\top w_2^* = 0.$$

Из (33) и (35), взяв $\hat{x} = x_1$, $\tilde{x} = x_2$, получим

$$c^\top x_1 \geq b_1 \tilde{u}_1^*, \qquad -c^\top x_2 \geq b_2 \tilde{u}_2^*.$$

Складывая эти неравенства, находим

$$b_1^\top w_1^* + b_2^\top w_2^* = c^\top(x_1 - x_2) \geq b_1^\top \tilde{u}_1^* + b_2^\top \tilde{u}_2^* = \rho \geq 0.$$

Следовательно, вектор $w^{*\top} = [w_1^{*\top}, w_2^{*\top}]$, так же как и $\tilde{u}^*$, удовлетворяет системе (5). Семейство разделяющих гиперплоскостей можно представить в виде

$$\Gamma(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : w_1^{*\top}(A_1 x - b_1) + \alpha\rho = 0\}, \tag{39}$$

$$\Gamma(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : -w_2^{*\top}(A_2 x - b_2) + (\alpha - 1)\rho = 0\}. \tag{40}$$

Таким образом, построено два семейства разделяющих гиперплоскостей вида (20), (21) и (39), (40). В первом семействе использовано нормальное решение системы (5), во втором — оптимальные множители Лагранжа задач линейного программирования (31). Оба эти вектора $\tilde{u}^*$ и w^* удовлетворяют системе (5). Следующая теорема утверждает, что для любой строго разделяющей гиперплоскости определяющие ее вектор-нормаль c и скаляр γ можно выразить через решение системы (5).

Теорема 4. *Пусть гиперплоскость $c^\top x = \gamma$ строго разделяет непустые непересекающиеся полиэдры X_1 и X_2. Тогда найдется решение u_1, u_2 системы*

$$A_1^\top u_1 + A_2^\top u_2 = 0, \qquad b_1^\top u_1 + b_2^\top u_2 = \rho > 0, \qquad u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0, \tag{41}$$

такое, что вектор c и скаляр γ определятся по формулам

$$c = A_1^\top u_1 = -A_2^\top u_2, \qquad \gamma = b_1^\top u_1 - \rho_1 = -b_2^\top u_2 + \rho_2,$$

где $\rho_1 + \rho_2 = \rho$, ρ_1, ρ_2 — произвольные положительные константы.

Доказательство. Пусть для определенности строго разделяющая гиперплоскость такова, что для всех $x \in X_1$ выполнено неравенство $c^\top x > \gamma$ и для всех $x \in X_2$ справедливо $c^\top x < \gamma$. Тогда система

$$A_1 x \geq b_1, \qquad c^\top x \leq \gamma$$

не имеет решения, а система, альтернативная к ней, совместна. Поэтому существуют $q \geq 0_{m_1}$ и $\eta \geq 0$, $\eta \in \mathbb{R}^1$, такие, что

$$A_1^\top q - c\eta = 0_n, \qquad b_1^\top q - \gamma\eta = \rho_1 > 0. \tag{42}$$

Здесь ρ_1 — положительная произвольная константа. Скаляр η не может равняться нулю, так как в этом случае разрешимая система (42) имела бы вид

$$A_1^\top q = 0_n, \qquad b_1^\top q = \rho_1 > 0, \qquad q \geq 0_{m_1},$$

и, следовательно, альтернативная к ней система $A_1 x \geq b_1$ была бы несовместна, что противоречит условию $X_1 \neq \emptyset$. Таким образом, из (42) получаем $c = A_1^\top q/\eta$, $\gamma = b_1^\top q/\eta - \rho_1/\eta$. Введем обозначения $u_1 = q/\eta$, $\rho_1/\eta = \rho_1$; тогда получим

$$A_1^\top u_1 = c, \qquad b_1^\top u_1 - \gamma = \rho_1 > 0, \qquad u_1 \geq 0_{m_1}. \tag{43}$$

Рассуждая аналогично, приходим к соотношениям

$$A_2^\top u_2 = -c, \qquad b_2^\top u_2 + \gamma = \rho_2 > 0. \tag{44}$$

Складывая (43) и (44), получаем совместную систему (41), альтернативную к (4). Теорема доказана. □

Пример 1. Пусть $n = 2$, $m = 6$, $\rho = 1$,

$$\begin{aligned} X_1 &= \{x \in \mathbb{R}^2 : -x^1 \geq 2,\ -x^1 - x^2 \geq 1,\ -x^1 + x^2 \geq 2,\ x^1 \geq -4\}, \\ X_2 &= \{x \in \mathbb{R}^2 : x^1 \geq 1,\ x^1 - x^2 \geq 0,\ 5x^1 + x^2 \geq 2\ \ -x^1 \geq -2\}. \end{aligned}$$

Из решения задачи (15), формул (17) и (23) следует

$$x^* = \begin{bmatrix} 0.11 \\ 0.63 \end{bmatrix}, \quad \|z^*\| = 3.13, \quad c = \begin{bmatrix} -5.34 \\ -0.26 \end{bmatrix}.$$

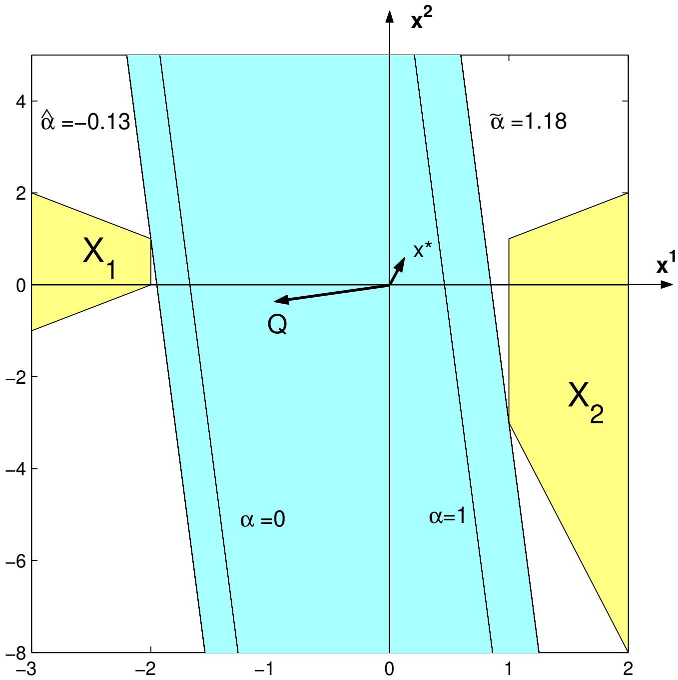
Из решения задач (31) и по формулам (34) и (36) получаем

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \hat{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\alpha} = 1.18, \quad \hat{\alpha} = -0.13.$$

Из (18) и решения систем (37), (38) имеем

$$\begin{array}{rclrcl} \tilde{u}_1^{*\top} & = & [0.18 \;\; 0.15 \;\; 0.13 \;\; 0.00], & \tilde{u}_2^{*\top} & = & [0.08 \;\; 0.04 \;\; 0.07 \;\; 0.00], \\ w_1^{*\top} & = & [0.44 \;\; 0.02 \;\; 0.00 \;\; 0.00], & w_2^{*\top} & = & [0.35 \;\; 0.00 \;\; 0.02 \;\; 0.00]. \end{array}$$

На фиг. 1 приведены множества X_1, X_2, разделяющие гиперплоскости, соответствующие $\alpha = \hat{\alpha}$, $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ и $\alpha = \tilde{\alpha}$, вектор x^* и нормированный вектор $Q = c/\|c\|$. Множество X_1 лежит в положительном полупространстве относительно вектора c, множество X_2 — в отрицательном полупространстве. Толщина семейства гиперплоскостей при $0 \le \alpha \le 1$ составляет $\|y\| = 2.13$. После расширения за счет учета $\hat{\alpha}$ и $\tilde{\alpha}$ получено $\|y\| = 2.80$.



Фиг. 1

3. СЕМЕЙСТВО РАЗДЕЛЯЮЩИХ ГИПЕРПЛОСКОСТЕЙ МАКСИМАЛЬНОЙ ТОЛЩИНЫ

Задачу нахождения минимального расстояния между двумя непересекающимися множествами X_1 и X_2 можно записать в виде

$$\min_{x_1 \in X_1} \min_{x_2 \in X_2} \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|^2. \tag{45}$$

Сделаем замену переменных $p = x_1 - x_2$ и перепишем задачу (45) в виде

$$\min_{p \in \mathbb{R}^n} \;\; \min_{x_2 \in X_2} \;\; \frac{1}{2}\|p\|^2 \tag{46}$$

при ограничениях

$$A_1 x_2 + A_1 p \ge b_1, \qquad A_2 x_2 \ge b_2. \tag{47}$$

Норма $\|p\|$ совпадает с расстоянием между выпуклыми множествами X_1 и X_2. Полученный из решения задачи (46), (47) вектор p будем называть вектором, определяющим расстояние между множествами. Введенный выше вектор y не всегда совпадает с вектором p, определяемым из решения задачи (46).

Функция Лагранжа для задачи (46) имеет вид

$$L(p, x_2, v) = \|p\|^2/2 + v_1^\top (b_1 - A_1 p - A_1 x_2) + v_2^\top (b_2 - A_2 x_2).$$

С помощью этой функции Лагранжа запишем двойственную задачу

$$\max_{v_1 \in \mathbb{R}^{m_1}_+} \max_{v_2 \in \mathbb{R}^{m_2}_+} \min_{x_2 \in \mathbb{R}^n} \min_{p \in \mathbb{R}^n} L(p, x_2, v). \tag{48}$$

Для задачи (48) условие оптимальности внутренней задачи записывается следующим образом:

$$L_p(p, x_2, v) = p - A_1^\top v_1 = 0_n, \tag{49}$$

$$L_{x_2}(p, x_2, v) = -A_1^\top v_1 - A_2^\top v_2 = 0_n. \tag{50}$$

Из (49) и (50) имеем $p = A_1^\top v_1 = -A_2^\top v_2$; подставляя это выражение в функцию Лагранжа, получим двойственную функцию Лагранжа

$$\begin{aligned} \tilde{L}(x_2, v) &= \|A_1^\top v_1\|^2/2 + v_1^\top (b_1 - A_1 A_1^\top v_1 - A_1 x_2) + v_2^\top (b_2 - A_2 x_2) = \\ &= b_1^\top v_1 + b_2^\top v_2 - \|A_1^\top v_1\|^2/2 - x_2^\top (A_1^\top v_1 + A_2^\top v_2). \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая (50), получаем двойственную к (46), (47) задачу

$$\max_{v_1 \in \mathbb{R}^{m_1}_+} \max_{v_2 \in \mathbb{R}^{m_2}_+} \{b_1^\top v_1 + b_2^\top v_2 - \|A_1^\top v_1\|^2/2\} \tag{51}$$

при ограничениях

$$A_1^\top v_1 + A_2^\top v_2 = 0_n, \qquad v_1 \geq 0_{m_1}, \quad v_2 \geq 0_{m_2}. \tag{52}$$

Обозначим через $[p^*, x_2^*]$ решение задачи (46), (47), а через $[v_1^*, v_2^*]$ — решение двойственной к ней задачи (51), (52). По теореме двойственности имеем

$$b_1^\top v_1^* + b_2^\top v_2^* - \|A_1^\top v_1^*\|^2/2 = \|p^*\|^2/2. \tag{53}$$

Подставляя значение $p^* = A_1^\top v_1^*$ в (53), получаем

$$b_1^\top v_1^* + b_2^\top v_2^* = \|A_1^\top v_1^*\|^2. \tag{54}$$

Итак, верна

Теорема 5. *Всякое решение* $v^{*\top} = [v_1^{*\top}, v_2^{*\top}]$ *двойственной задачи* (51), (52) *определяет единственную первую составляющую* p^* *решения* $[p^*, x_2^*]$ *задачи* (48) *по формулам*

$$p^* = A_1^\top v_1^* = -A_2^\top v_2^*, \tag{55}$$

и справедливо выражение

$$b^\top v^* = \|A_1^\top v_1^*\|^2 = \|A_2^\top v_2^*\|^2 = \|p^*\|^2.$$

Из теоремы 5 следует, что найденный из (51), (52) вектор v^* удовлетворяет системе (5) при $\rho = \|p^*\|^2$.

Отметим, что по решению v^* двойственной задачи (51), (52) определяется лишь первая составляющая p^* решения $[p^*, x_2^*]$ прямой задачи (46), (47). Для определения x_2^* требуется подставить p^* в ограничения прямой задачи и решить систему неравенств относительно переменных x_2:

$$A_1 x_2 \geq b_1 - A_1 p^*, \qquad A_2 x_2 \geq b_2,$$

т.е. ситуация отлична от пар взаимно двойственных задач, рассмотренных выше.

Теорема 6 (о семействе параллельных разделяющих гиперплоскостей). *Пусть X_1 и X_2 — непустые непересекающиеся полиэдры; решениями задачи (48) являются v^*, p^*, x_2^*. Тогда семейство параллельных гиперплоскостей, разделяющих множества X_1 и X_2, может быть представлено в виде*

$$\Gamma(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : {p^*}^\top x - b_1^\top v_1^* + \alpha \|p^*\|^2 = 0\}, \tag{56}$$
$$\Gamma(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : {p^*}^\top x + b_2^\top v_2^* - (1-\alpha) \|p^*\|^2 = 0\}, \tag{57}$$

где $\alpha \in [0,1]$, причем если $0 < \alpha < 1$, то эти гиперплоскости строго разделяют X_1 и X_2. Гиперплоскости $\Gamma(0)$ и $\Gamma(1)$ являются опорными к множествам X_1 и X_2 соответственно; толщина семейства этих гиперплоскостей равна $\|p^*\|$ и совпадает с расстоянием между полиэдрами X_1 и X_2.

Доказательство. Так как v^* — решение задачи (51), (52), то

$$A_1^\top v_1^* + A_2^\top v_2^* = 0_n.$$

Умножая это соотношение слева на произвольный вектор $x \in \mathbb{R}^n$ и вычитая из полученного результата равенство (54), имеем

$$x^\top A_1^\top v_1^* + x^\top A_2^\top v_2^* - b_1^\top v_1^* - b_2^\top v_2^* = -\|A_1^\top v_1^*\|^2. \tag{58}$$

Полученное соотношение (58) можно переписать, используя коэффициент $\alpha \in [0,1]$ и равенство $\|A_1^\top v_1^*\| = \|A_2^\top v_2^*\|$, следующим образом:

$${v_1^*}^\top (A_1 x - b_1) + \alpha \|A_1^\top v_1^*\|^2 = {v_2^*}^\top (b_2 - A_2 x) + (\alpha - 1)\|A_2^\top v_2^*\|^2.$$

Отсюда, учитывая (55), приходим к эквивалентным выражениям (56) и (57) для гиперплоскости.

Совокупность $[v^*, p^*, x_2^*]$ образует точку Куна–Таккера для задачи (46). Поэтому выполнены условия дополняющей нежесткости

$${v_1^*}^\top L_{v_1}(p^*, x_2^*, v^*) = 0, \qquad {v_2^*}^\top L_{v_2}(p^*, x_2^*, v^*) = 0, \qquad v_1^* \geq 0_{m_1}, \quad v_2^* \geq 0_{m_2},$$
$$L_{v_1}(p^*, x_2^*, v^*) \leq 0_n, \qquad L_{v_2}(p^*, x_2^*, v^*) \leq 0_{m_2}.$$

Из них получаем

$${v_1^*}^\top (b_1 - A_1 x_1^*) = 0, \qquad {v_2^*}^\top (b_2 - A_2 x_2^*) = 0, \qquad A_1 x_1^* \geq b_1, \qquad A_2 x_2^* \geq b_2. \tag{59}$$

Из этих свойств следует, что $x_1^* \in X_1$, $x_1^* \in \Gamma(0)$, $x_2^* \in X_2$, $x_2^* \in \Gamma(1)$.

Для произвольной точки x из X_1 имеем $A_1 x \geq b_1$; умножая это выражение скалярно на неотрицательный вектор v_1^*, получаем ${v_1^*}^\top (A_1 x - b_1) \geq 0$ и, учитывая (55), приходим к соотношению

$${p^*}^\top x - b_1^\top v_1^* \geq 0. \tag{60}$$

Из (59) находим, что

$$b_1^\top v_1^* = {p^*}^\top x_1^*, \tag{61}$$

и из (60) приходим к заключению, что $p^{*\top}x \geq p^{*\top}x_1^*$ для любого $x \in X_1$ и по крайней мере одна точка $x_1^* \in X_1$ лежит на разделяющей гиперплоскости $p^{*\top}x = p^{*\top}x_1^*$. Следовательно, множество X_1 лежит в одном из полупространств, определяемых гиперплоскостью $\Gamma(0)$, и гиперплоскость $\Gamma(0)$ является опорной к множеству X_1 в точке x_1^*. Аналогично показывается, что $\Gamma(1)$ — опорная гиперплоскость к множеству X_2 в точке x_2^*. Справедливо равенство

$$b_2^\top v_2^* = -p^{*\top}x_2^*. \tag{62}$$

Все точки из X_2 таковы, что для них имеет место неравенство $p^{*\top}x \leq p^{*\top}x_2^*$ и по крайней мере одна точка $x_2^* \in X_2$ лежит на гиперплоскости $p^{*\top}x = p^{*\top}x_2^*$.

Расстояние между опорными гиперплоскостями совпадает с расстоянием между X_1 и X_2 и равно $\|p^*\|$, что следует из постановки задачи (46), (47). Теорема доказана. □

Заметим, что гиперплоскости $\Gamma(\alpha)$ вида (56), (57), учитывая соотношения (61), (62), можно представить в виде

$$\Gamma(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : p^{*\top}x - (1-\alpha)p^{*\top}x_1^* - \alpha p^{*\top}x_2^* = 0\}, \tag{63}$$

т.е. каждую гиперплоскость из семейства разделяющих гиперплоскостей можно представить как выпуклую линейную комбинацию опорных гиперплоскостей к множествам X_1 и X_2. Для построения семейства гиперплоскостей в виде (63) необходимо решить задачу (46), (47) в пространстве переменных размерности $2n$. Для представления этого же семейства, но в форме (56), (57), требуется решить двойственную задачу (51), (52) в пространстве переменных размерности m. Вектор p^*, входящий в это представление, выражается через v^* по формуле (55).

Рассмотрим теперь вопрос о том, можно ли из системы (5) выделить такое решение, чтобы определить семейство гиперплоскостей, толщина которого совпадает с расстоянием между множествами X_1 и X_2. Согласно формулам (12) и (13) вектор сдвига y и толщина $\|y\|$ семейства разделяющих гиперплоскостей $\Gamma(\alpha)$ определяются как $y = -\rho A_1^\top u_1/\|A_1^\top u_1\|^2$ и $\|y\| = \rho/\|A_1^\top u_1\|$, где $u^\top = [u_1^\top, u_2^\top]$ является решением системы (5). Поэтому естественно поставить задачу о нахождении такого решения $u^{*\top} = [u_1^{*\top}, u_2^{*\top}] \in U$ системы (5), при котором толщина семейства разделяющих гиперплоскостей является максимальной:

$$\frac{1}{2}\|A_1^\top u_1^*\|^2 = \min_{u \in U} \frac{1}{2}\|A_1^\top u_1\|^2, \tag{64}$$

$$U = \{u \in \mathbb{R}^m : A_1^\top u_1 + A_2^\top u_2 = 0_n, \ \ b_1^\top u_1 + b_2^\top u_2 = \rho, \ \ u_1 \geq 0_{m_1}, \ \ u_2 \geq 0_{m_2}\}. \tag{65}$$

Вектор сдвига $y = \Gamma(1) - \Gamma(0)$ в данном случае дает толщину семейства гиперплоскостей, которая совпадает с минимальным расстоянием между полиэдрами X_1 и X_2. Это связано с тем, что по решению u^* задачи (64), (65) можно найти минимальное расстояние между X_1 и X_2. Оказывается, что задачи (64), (65) и (51), (52) эквивалентны в том смысле, что по решению одной из них находится решение другой.

Теорема 7. *Пусть полиэдры X_1 и X_2 непусты, а их пересечение пусто. Тогда решение v^* задачи (51), (52) и решение u^* задачи (64), (65) связаны друг с другом соотношениями*

$$v^* = \frac{\rho u^*}{\|A_1^\top u_1^*\|^2}, \qquad u^* = \frac{\rho v^*}{b^\top v^*}. \tag{66}$$

Семейство разделяющих гиперплоскостей представимо в виде

$$\Gamma(\alpha) \ = \ \{x \in \mathbb{R}^n : u_1^{*\top}A_1 x - b_1^\top u_1^* + \alpha\rho = 0\}, \tag{67}$$

$$\Gamma(\alpha) \ = \ \{x \in \mathbb{R}^n : -u_2^{*\top}A_2 x + b_2^\top u_2^* + (\alpha - 1)\rho = 0\}, \tag{68}$$

где $0 \le \alpha \le 1$. *Толщина этого семейства совпадает с минимальным расстоянием между полиэдрами* X_1 *и* X_2.

Доказательство. Вектор u^* удовлетворяет системе (5), поэтому согласно п.1) теоремы 2 имеет место $\|A_1^\top u_1^*\| \ne 0$. Согласно теореме 5 выполнено $b^\top v^* \ne 0$. Формулы (66) получаются из сравнений условий Куна–Таккера для задач (51), (52) и (64), (65). Согласно (55), (66) и (12)

$$p^* = A_1^\top v_1^* = \frac{\rho A_1^\top u_1^*}{\|A_1^\top u_1^*\|^2} = -y.$$

Отсюда получаем, что толщина семейства (67), (68) разделяющих гиперплоскостей совпадает с минимальным расстоянием между полиэдрами X_1 и X_2:

$$\|p^*\| = \frac{\rho}{\|A_1^\top u_1^*\|} = \|y\|.$$

Теорема доказана. $\square$

Приведем для задачи (64), (65) двойственную задачу

$$\max_{q\in\mathbb{R}^n} \ \max_{x\in\mathbb{R}^n} \max_{\xi\in\mathbb{R}^1} \left\{ \rho\xi - \frac{1}{2}\|q\|^2 \right\}$$

при ограничениях

$$A_1(q + x) - b_1\xi \ge 0_{m_1}, \qquad A_2x - b_2\xi \ge 0_{m_2}.$$

В решении неизвестный вектор q выражается через решение u^* прямой задачи (64), (65) по формуле $q^* = A_1^\top u_1^* = -A_2^\top u_2^*$. Отсюда, согласно теореме двойственности, в решениях u^* и $[q^*, x^*, \xi^*]$ прямой и двойственной задач имеем $\rho\xi^* = \|A_1^\top u_1^*\|^2$. Поэтому $\xi^* > 0$ и $p^* = q^*/\xi^*$, $x_2^* = x^*/\xi^*$.

Итак, построены три эквивалентных представления (56), (57), (63), (67), (68) одного и того же семейства разделяющих гиперплоскостей, толщина которого совпадает с минимальным расстоянием между полиэдрами. Каждое представление требует своей оптимизационной задачи.

4. ПОСТРОЕНИЕ РАЗДЕЛЯЮЩИХ ГИПЕРПЛОСКОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРЕМЫ ФАРКАША ОБ АЛЬТЕРНАТИВАХ

Рассмотрим случай, когда два полиэдра представлены системами равенств на неотрицательном ортанте, т.е. заданы два непустых множества

$$X_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : A_1x = b_1, \ x \ge 0_n\}, \qquad X_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : A_2x = b_2, \ x \ge 0_n\}$$

таких, что $X = X_1 \cap X_2 = \emptyset$.

В соответствии с теоремой Фаркаша об альтернативах для несовместной системы равенств с неотрицательными переменными

$$A_1x = b_1, \qquad A_2x = b_2, \qquad x \ge 0_n$$

совместна следующая система:

$$A_1^\top u_1 + A_2^\top u_2 \le 0_n, \qquad b_1^\top u_1 + b_2^\top u_2 = \rho. \tag{69}$$

Здесь ρ — положительная константа.

Решение системы (69) существует, и для любых решений этой системы справедливы неравенства $\|u_1\| \neq 0$, $\|u_2\| \neq 0$, $\|A_1^\top u_1\| \neq 0$, $\|A_2^\top u_2\| \neq 0$. Действительно, пусть, от противного, $A_1^\top u_1 = 0_n$; тогда из того, что X_1 непусто, следует, что альтернативная система $A_1^\top u_1 \leq 0$, $b_1^\top u_1 = \rho_1 \neq 0$ неразрешима, но из предположения $A_1^\top u_1 = 0_n$ получаем, что $b_1^\top u_1 = 0$. Из (69) в этом случае имеем совместную систему $A_2^\top u_2 \leq 0_n$, $b_2^\top u_2 = \rho$. Но она альтернативна системе $A_2 x = b_2$, $x \geq 0_n$, которая, по условию, совместна, так как X_2 непусто. Противоречие доказывает, что равенство $A_1^\top u_1 = 0_n$ невозможно. Если $u_1 = 0_{m_1}$, тогда $A_1^\top u_1 = 0_n$, что невозможно.

В (69), умножая неравенство скалярно на неотрицательный вектор x и вычитая из результата равенство, получаем

$$u_1^\top (A_1 x - b_1) + u_2^\top (A_2 x - b_2) \leq -\rho < 0. \tag{70}$$

Определим две линейные функции от переменных $x \in \mathbb{R}^n$ и параметра $\alpha \in [0,1]$:

$$\varphi_1(x,\alpha) = u_1^\top (A_1 x - b_1) + \alpha\rho, \qquad \varphi_2(x,\alpha) = -u_2^\top (A_2 x - b_2) - (1-\alpha)\rho.$$

Неравенство (70) представим в виде

$$\varphi_1(x,\alpha) = u_1^\top (A_1 x - b_1) + \alpha\rho \leq -u_2^\top (A_2 x - b_2) - (1-\alpha)\rho = \varphi_2(x,\alpha). \tag{71}$$

Зафиксируем векторы u_1 и u_2, являющиеся произвольными решениями системы (69). При $\alpha \in [0,1]$ с помощью функций $\varphi_1(x,\alpha)$ и $\varphi_2(x,\alpha)$ получаем два семейства гиперплоскостей, разделяющих множества X_1 и X_2.

Если $x \in X_1$, то $\varphi_1(x,\alpha) \geq 0$ при $\alpha \in [0,1]$. Если $x \in X_2$, то при $\alpha \in [0,1]$ функция $\varphi_2(x,\alpha) \leq 0$ и, как следует из (71), при этом $\varphi_1(x,\alpha) \leq 0$, т.е. семейство гиперплоскостей $\varphi_1(x,\alpha) = 0$ при $\alpha \in [0,1]$ является разделяющим для множеств X_1 и X_2. Из неравенства (71) следует, что при $0 < \alpha < 1$ гиперплоскость $\varphi_1(x,\alpha) = 0$ строго разделяет эти множества.

Покажем теперь, что условие $\varphi_2(x,\alpha) = 0$ определяет семейство гиперплоскостей, разделяющих множества X_1 и X_2 при $\alpha \in [0,1]$, и строго разделяет эти множества при $0 < \alpha < 1$. Действительно, если $x \in X_2$, то $\varphi_2(x,\alpha) \leq 0$ при $\alpha \in [0,1]$ и $\varphi_2(x,\alpha) < 0$ при $0 \leq \alpha < 1$. Если $x \in X_1$, то, как следует из (71), $\varphi_2(x,\alpha) \geq 0$ при $\alpha \in [0,1]$ и $\varphi_2(x,\alpha) > 0$ при $0 < \alpha \leq 1$.

Итак, в отличие от полиэдров, заданных в виде системы неравенств и рассмотренных в предыдущих разделах, решив альтернативную совместную систему (69), приходим к двум семействам разделяющих гиперплоскостей, определяемых с помощью функций $\varphi_1(x,\alpha)$ и $\varphi_2(x,\alpha)$.

Определим неотрицательную линейную комбинацию функций $\varphi_1(x,\alpha)$ и $\varphi_2(x,\alpha)$, положив

$$\varphi_3(x,\alpha) = \lambda_1\varphi_1(x,\alpha) + \lambda_2\varphi_2(x,\alpha).$$

Здесь $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$.

Введем три семейства разделяющих гиперплоскостей и их объединения:

$$\Gamma_i(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi_i(x,\alpha) = 0\}, \qquad \Gamma_i = \bigcup_{\alpha=0}^{1} \Gamma_i(\alpha), \qquad i = 1,2,3.$$

Несложно показать, что при любых неотрицательных и не равных нулю одновременно λ_1 и λ_2 семейство гиперплоскостей $\Gamma_3(\alpha)$ является разделяющим для множеств X_1 и X_2.

Как и в предыдущем разделе, обозначим через p^* вектор, соединяющий две ближайшие точки из X_1 и X_2; тогда расстояние между множествами X_1 и X_2 равно $\|p^*\|$. В ряде случаев можно подобрать λ_1 и λ_2 таким образом, что вектор

$$p^* = \lambda_1 A_1^\top u_1 - \lambda_2 A_2^\top u_2,$$

где $u^\top = [u_1^\top, u_2^\top]$, удовлетворяет условию (69). В этом случае нормаль семейства $\Gamma_3(x,\alpha)$ совпадает с вектором p^* и семейство разделяющих гиперплоскостей имеет толщину, совпадающую с минимальным расстоянием между X_1 и X_2. Аналогом теоремы 4 в данном случае является

Теорема 8. *Пусть гиперплоскость $c^\top x - \gamma = 0$ строго разделяет непустые непересекающиеся полиэдры X_1 и X_2. Тогда найдется решение u_1, u_2 системы*

$$A_1^\top u_1 + A_2^\top u_2 \leq 0, \qquad b_1^\top u_1 + b_2^\top u_2 = \rho > 0$$

такое, что

$$A_1^\top u_1 \leq c, \quad A_2^\top u_2 \leq -c, \quad \gamma = b_1^\top u_1 - \rho_1 = -b_2^\top u_2 + \rho_2,$$

где $\rho_1 + \rho_2 = \rho$, ρ_1, ρ_2 — произвольные положительные константы.

Доказательство почти дословно повторяет доказательство теоремы 4.

Теорема 8 утверждает, что в отличие от полиэдров, заданных системами неравенств, в случае полиэдров, заданных системами равенств на неотрицательном ортанте, не всегда можно подобрать такие u_1 и u_2, удовлетворяющие совместной альтернативной системе (69), чтобы при этом выполнялось условие либо $c = A_1^\top u_1$, либо $c = -A_2^\top u_2$. Иными словами, не всегда существуют u_1 и u_2, удовлетворяющие (69) и такие, что разделяющая гиперплоскость $c^\top x - \gamma = 0$ принадлежит либо $\Gamma_1(\alpha)$, либо $\Gamma_2(\alpha)$.

Пример 2. Пусть полиэдры задаются условиями

$$\begin{aligned} X_1 &= \{x \in \mathbb{R}^2 : x^1 + x^2 = 1,\ x \leq 0_2\}, \\ X_2 &= \{x \in \mathbb{R}^2 : 2x^1 - x^2 = 6,\ x \geq 0_2\}. \end{aligned}$$

В системе (69) положим $\rho = 1$. Три объединения семейств разделяющих гиперплоскостей Γ_1, Γ_2 и Γ_3 показаны на фиг. 2, где также представлены векторы

$$c_1^\top = [-1/2 \ \ -1/2], \quad c_2^\top = [-1/2 \ \ 1/4], \quad c_3^\top = [-1 \ \ 0], \quad x^{*\top} = [2.6 \ \ 0].$$

Из приведенных выше формул следует, что

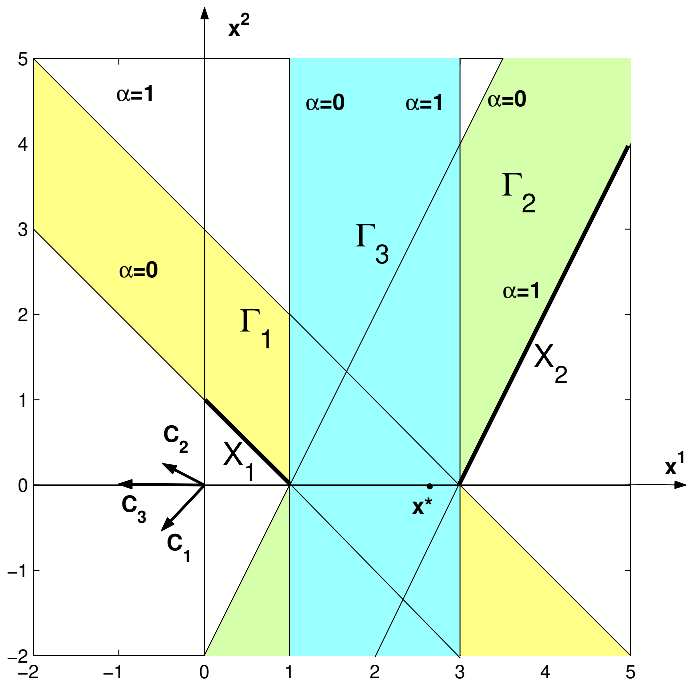
$$\|p^*\| = 2, \quad \lambda_1 = 4/3, \quad \lambda_2 = 8/3, \quad u_1^* = -1/2, \quad u_2^* = 1/4,$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(x,\alpha) &= -x^1/2 - x^2/2 + 1/2 + \alpha, \\ \varphi_2(x,\alpha) &= -x^1/2 + x^2/4 + 3/2 - (1-\alpha), \\ \varphi_3(x,\alpha) &= -2x^1 + 2 + 4\alpha. \end{aligned}$$

С помощью последней формулы находим семейство, обладающее максимальной толщиной:

$$\Gamma_3(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : x^1 = 1 + 2\alpha\}.$$

С другой стороны, положив $x_1^{*\top} = [1 \ 0]$, $x_2^{*\top} = [3 \ 0]$, $p^{*\top} = [-2 \ 0]$ в (63), придем к этому же семейству $\Gamma_3(\alpha)$.



Фиг. 2

5. ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД НЬЮТОНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (15)

При решении задачи разделения полиэдров, заданных системами неравенств (4), предпочтительно решать задачу (15): минимизировать функцию $F(x) = \|(b - Ax)_+\|^2/2$ от n переменных, так как обычно $n \ll m$. Безусловная минимизация $F(x)$ может выполняться любым методом, например методом сопряженного градиента. Но, как показал О. Мангасарьян в [4, 5], для безусловной оптимизации кусочно-квадратичной функции особенно эффективен обобщенный метод Ньютона. Приведем краткое описание этого метода.

Минимизируемая функция $F(x)$ в задаче (15) является выпуклой кусочно-квадратичной и дифференцируемой. Для такой функции обычной матрицы Гессе не существует. Действительно, градиент

$$F_x(x) = -A^\top (b - Ax)_+$$

функции $F(x)$ недифференцируем. Но для этой функции можно определить обобщенную матрицу Гессе, которая является $(n \times n)$-симметричной положительно-полуопределенной матрицей вида

$$\partial^2 F(x) = A^\top D^\sharp(z) A,$$

где через $D^\sharp(z)$ обозначена $(m \times m)$-диагональная матрица с i-м диагональным элементом z^i, равным 1, если $(b - Ax)^i > 0$, и равным 0, если $(b - Ax)^i \leq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Так как обобщенная матрица Гессе может быть вырожденной, используется следующее модифицированное ньютоновское направление:

$$-\left[\partial^2 F(x) + \delta I_n\right]^{-1} F_x(x),$$

где δ — малая положительная величина (обычно при расчетах полагалось $\delta = 10^{-4}$) и I_n — единичная матрица порядка n. В этом случае модифицированный метод Ньютона имеет вид

$$x_{s+1} = x_s - \left[\partial^2 F(x_s) + \delta I_n\right]^{-1} F_x(x_s). \tag{72}$$

Критерий окончания работы был следующим:

$$\|x_{s+1} - x_s\| \leq \text{tol}.$$

О. Мангасарьян исследовал сходимость обобщенного метода Ньютона для безусловной минимизации подобной выпуклой кусочно-квадратичной функции с выбором шага по правилу Армихо. Доказательство конечной глобальной сходимости обобщенного метода Ньютона можно найти в [4]–[6].

Обобщенный метод Ньютона для решения задачи безусловной минимизации (15) был реализован в системе MATLAB и показал высокую эффективность на тестовых примерах большой размерности. Так, при $n = 500$, $m = 10^4$ и полностью заполненной ненулевыми элементами матрице A решение задачи (15) на компьютере P-IV с тактовой частотой 2.24 ГГц занимало менее одной минуты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Еремин И.И.* Теория линейной оптимизации. Екатеринбург: УрО РАН, 1998.
2. *Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г.* Теоремы об альтернативах и их применение в численных методах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 43. № 3. С. 354–375.
3. *Васильев Ф.П., Иваницкий А.Ю.* Линейное программирование. М.: Факториал, 2003.
4. *Mangasarian O.L.* A finite Newton method for classification // Optimizat. Meth. and Software. 2002. V. 17. P. 913–930.
5. *Mangasarian O.L.* A Newton method for linear programming // J. Optimizat. Theory and Appl. 2004. V. 121. P. 1–18.
6. *Kanzow C., Qi H., Qi L.* On the minimum norm solution of linear programs // J. Optimizat. Theory and Appl. 2003. V. 116. P. 333–345.