УДК 519.85

ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ В МЕТОДАХ ШТРАФНЫХ ФУНКЦИЙ

Ю.Г. Евтушенко

Точные штрафные функции были впервые предложены в работах [1, 2]. В дальнейшем этому направлению было посвящено большое количество публикаций. Укажем лишь несколько из них [3] – [7]. В данной работе развивался подход, кратко изложенный в [5], основанный на использовании неравенств Юнга и Минковского–Малера.

1. Рассматривается задача нелинейного программирования

$$\min_{x\in X} f(x), \tag{1.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^i$ есть i-мерное линейное пространство, допустимое множество X задается с помощью ограничений типа неравенства

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) \le 0\}.$$

Вектор-функция $h(x)$ отображает $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$. Через X_* обозначим множество решений задачи (1.1). Составим функцию Лагранжа

$$L(x,u) = f(x) + \langle u, h(x)\rangle, \qquad u \ge 0,$$

здесь $u \in \mathbb{R}^m$, $\langle a, b\rangle$ обозначает скалярное произведение векторов a и b.

Считаем, что в задаче (1.1) существуют точки $x_*, u_* \ge 0$, являющиеся седловыми точками функции Лагранжа, т.е. для любых $x \in \mathbb{R}^n$, $0 \le u \in \mathbb{R}^m$ выполнены неравенства

$$L(x_*, u) \le L(x_*, u_*) \le L(x, u_*). \tag{1.2}$$

Согласно [5] из этих неравенств следует

$$x_* \in X_*, \quad h^i(x_*)u_*^i = 0, \qquad i \in [1:m]. \tag{1.3}$$

Случай $u_* = 0$ исключается из рассмотрения, так как он соответствует задачам, в которых ограничения несущественны.

Пусть векторы $a, b \in \mathbb{R}^m$, заданы множества G, G^* из $\mathbb{R}^m$. На множестве G определены функции $A(b)$, $B(b)$. Функцию $A^*(a)$, определенную на G^*, будем называть *сопряженной* к A и строить исходя из следующего определения:

$$A^*(a) = \sup_{b\in G}\left[\langle a, b\rangle - A(b)\right]. \tag{1.4}$$

Функция $B^0(a)$, полярная к B, определяется для $a \in G^*$ из следующего условия:

$$B^0(a) = \inf_{\mu\in\mathbb{R}^1}\left\{\mu : \langle a, b\rangle \le \mu B(b),\ \forall\, b \in G\right\}. \tag{1.5}$$

Если B положительна всюду на G, то последнюю формулу можно переписать так:

$$B^0(a) = \sup_{b\in G}\frac{\langle a, b\rangle}{B(b)}. \tag{1.6}$$

Из определений (1.4) – (1.6) следует, что для любых $b \in G$, $a \in G^*$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \langle a, b \rangle &\leq A(b) + A^*(a), & (1.7)\\ \langle a, b \rangle &\leq B(b) B^0(a). & (1.8) \end{aligned}$$

Неравенство (1.7) называется неравенством Юнга, (1.8) — Минковского–Малера. Не для всяких функций A и B существуют функции A^* и B^0, дающие содержательные неравенства. Практический интерес представляют только те случаи, когда функции A^* и B^0 ограничены на G^*.

Примем

$$\mathbb{R}^m_+ = \{a \in \mathbb{R}^m : a \geq 0\}, \qquad \mathbb{R}^m_- = \{a \in \mathbb{R}^m : a \leq 0\}.$$

Здесь $\mathbb{R}^m_+$ — неотрицательный ортант, $\mathbb{R}^m_-$ — неположительный ортант. Условие $a \in \mathbb{R}^m_-$ означает, что все компоненты вектора a неположительны; условие $a \notin \mathbb{R}^m_-$ означает, что хотя бы одна компонента a больше нуля.

Пусть $G = G^* = \mathbb{R}^m$, тогда имеют место следующие свойства:
если $A(b) = N(tb)$, $t > 0$, то $A^*(a) = N^*(a/t)$,
если $A(b) = N(\beta b)/(\alpha\beta)$, $\alpha, \beta > 0$, то $A^*(a) = N^*(\alpha a)/(\alpha\beta)$,
если $B(b) = M(tb)$, $t > 0$, то $B^0(a) = M^0(a/t)$.

Многие численные методы решения задачи (1.1) основаны на редукции к последовательной безусловной минимизации различных вспомогательных функций. Рассмотрим две такие функции:

$$\begin{aligned} F_1(x, u) &= f(x) + A(h(x)) + A^*(u),\\ F_2(x, u) &= f(x) + B(h(x)) B^0(u). \end{aligned}$$

В качестве G^* всюду будем брать $\mathbb{R}^m_+$, в качестве G здесь возьмем $\mathbb{R}^m$. Из (1.7), (1.8) тогда следует, что для любых $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m_+$ выполнены неравенства

$$L(x, u) \leq F_1(x, u), \qquad L(x, u) \leq F_2(x, u).$$

Возьмем в них в качестве u вектор u_*, учтем (1.2), (1.3), получим, что для $x_* \in X_*$ и любых $x \in X$

$$\begin{aligned} f(x_*) &\leq F_1(x, u_*), & (1.9)\\ f(x_*) &\leq F_2(x, u_*). & (1.10) \end{aligned}$$

Если в (1.9), (1.10) в качестве x взять x_*, то получим $0 \leq A(h(x_*)) + A^*(u_*)$, $0 \leq B(h(x_*)) B^0(u_*)$.

2. Найденные соотношения позволяют исключительно просто обобщить ряд важнейших результатов из теории штрафных функций. Обозначим

$$\begin{aligned} &F_3(x, t) = f(x) + tB(h(x)) B^0(u_*), \qquad B : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1, \quad B^0 : \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}^1,\\ &X_3(t) = \operatorname{Arg} \min_{x \in \mathbb{R}^n} F_3(x, t). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Теорема 1. *Пусть в задаче* (1.1) *существует седловая точка функции Лагранжа* $[x_*, u_*]$, $u_* \geq 0$. *Пусть функция* $B(h)$ *такова, что* $B(h) = 0$ *при всех* $h \in \mathbb{R}^m_-$

и $0 < B(h)B^0(u_*) < +\infty$ при всех $h \notin \mathbb{R}^m_-$. Тогда при $t \le 1$ задача (2.1) разрешима, причем $f(x_*) = F_3(\bar{x}, t)$ для каждого $\bar{x} \in X_3(t)$, при $t > 1$ множества X_* и $X_3(t)$ совпадают.

Для доказательства воспользуемся неравенством (1.10). Согласно условиям теоремы $B(h(x_*)) = 0$, поэтому для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \in X_3(t)$ имеем

$$f(x_*) \le F_2(x, u_*) \le F_3(x, t), \tag{2.2}$$
$$f(x_*) \le F_3(\bar{x}, t) \le F_3(x_*, t) = f(x_*). \tag{2.3}$$

Следовательно, при любых $t \ge 1$

$$f(x_*) = f(\bar{x}) + tB(h(\bar{x}))B^0(u_*) = F_3(\bar{x}, t). \tag{2.4}$$

Покажем, что множества X_* и $X_3(t)$ при $t > 1$ совпадают. Если $\bar{x} \in X$, то $B(h(\bar{x})) = 0$ и согласно (2.4) $f(x_*) = f(\bar{x})$, что означает $\bar{x} \in X_*$. Если $\bar{x} \notin X$, то, взяв в (2.4) вместо t число $\tau = t - \varepsilon$, где $\varepsilon < t - 1$, получим

$$f(x_*) > f(\bar{x}) + \tau B(h(\bar{x}))B^0(u_*) = F_3(\bar{x}, \tau),$$

что противоречит неравенству (2.2).

При численных расчетах составляется функция

$$F_4(x, \tau) = f(x) + \tau B(h(x)), \qquad \tau > B^0(u_*).$$

Всякая точка безусловного минимума F_4 будет решением задачи (1.1). Вспомогательные функции F, удовлетворяющие этим условиям, называются *точными штрафными функциями*. Функция B равна нулю на допустимом множестве и отлична нуля вне его. Такие функции называют *внешними штрафными функциями*. Условия теоремы 1 можно коротко сформулировать так: функция B должна быть внешним штрафом и иметь полярную функцию. Обычно B строится в виде $B = B(h_+)$, при этом $G = \mathbb{R}^m_+$.

Неравенства (1.7), (1.8) можно применять не только к оценке скалярного произведения, но и к отдельным частям скалярного произведения, и в частности к каждому произведению $a^i b^i$. Необходимость в этом возникает в том случае, если компоненты вектора h имеют разные знаки. Обозначим

$$h^i_+ = \max\,[0, h^i], \qquad h^i_- = \min\,[0, h^i].$$

Через h_+ обозначим вектор, объединяющий все компоненты h, большие нуля, вектор h_- содержит все отрицательные компоненты, все нулевые компоненты h объединим в вектор h_0. Тогда h можно представить как совокупность трех векторов $h = [h_+, h_-, h_0]$. Соответствующие векторам h_+, h_-, h_0 компоненты вектора u_* представим как три вектора u^*_+, u^*_-, u^*_0. Все компоненты u^*_+, u^*_-, u^*_0 положительные, так как $u_* \ge 0$. В зависимости от x меняются наборы h_+, h_-, h_0 и соответствующие им компоненты u_*, поэтому можно писать

$$h(x) = [h_+(x), h_-(x), h_0(x)], \qquad u_* = [u^*_+, u^*_-, u^*_0],$$
$$\langle u_*, h(x)\rangle = \langle u^*_+, h_+(x)\rangle - \langle u^*_-, d(x)\rangle,$$

где $d(x) = -h_-(x) > 0$. Если $x \in X$, то множества $h_+(x)$, $u_+^*(x)$ пусты. Введем функцию F_5 и множество X_5:

$$F_5(x,t,\tau) = f(x) + tB_1(h(x))B_1^0(u_+^*) - \tau B_2(d(x))B_2^0(u_-^*), \tag{2.5}$$
$$X_5(t,\tau) = \operatorname{Arg}\min_{x\in\mathbb{R}^m} F_5(x,t,\tau). \tag{2.6}$$

Здесь B_1^0, B_2^0 — функции, полярные к функциям B_1 и B_2 соответственно. В том случае, если в точке x векторы $h_+(x)$ или $h_-(x)$ отсутствуют, соответствующие произведения, содержащие B_1 или B_2, исключаются из формулы (2.5).

Обозначим через $\operatorname{int} X$ совокупность внутренних точек множества X. Для каждой точки $x \in \operatorname{int} X$ существует хотя бы один такой номер i, что $h^i(x) < 0$.

Теорема 2. *Пусть в задаче* (1.1) *существует седловая точка функции Лагранжа* $[x_*, u_*]$, $u_* \geq 0$, $\operatorname{int} X \neq \emptyset$. *Пусть функции* B_1, B_2 *таковы, что* $B_1(0) = B_2(0) = B_1^0(0) = B_2^0(0) = 0$,

$$0 < B_1(h_+(x))B_1^0(u_+^*(x)) < +\infty \quad \textit{для всех} \quad x \notin X,$$
$$0 < B_2(h_-(x))B_2^0(u_-^*(x)) < +\infty \quad \textit{для всех} \quad x \notin \operatorname{int} X \backslash X_*.$$

Тогда при $t > 1$, $0 \leq \tau < 1$ *задача* (2.6) *разрешима,* $f(x_*) = F_5(\bar{x}, t, \tau)$ *для каждого* $\bar{x} \in X_5(t,\tau)$, *при* $t > 1$, $0 \leq \tau < 1$ *множества* X_* *и* $X_5(t,\tau)$ *совпадают.*

Доказательство проводится так же, как и в случае теоремы 1. В качестве примера использования теоремы 2 приведем тривиальную задачу о нахождении

$$\min_{x\leq 0}[-x].$$

В данном скалярном случае

$$B_1(h_+) = h_+, \qquad B_2(-h_-) = -h_-, \qquad B_1^0(u) = B_2^0(u) = u.$$

Решение задачи очевидно:

$$x_* = 0, \quad u_* = 1, \quad L(x,u) = x(u-1), \quad L(x,u_*) \equiv 0.$$

Функция F имеет вид

$$F_6(x,t,\tau) = -x + tx_+ + \tau x_-.$$

Здесь $x_+ = \max[0,x]$, $x_- = \min[0,x]$. При $t > 1$, $0 < \tau < 1$ минимум функции F_6 действительно достигается в точке $x_* = 0$.

3. Вспомогательные функции вида F_1 позволяют отыскивать приближенные решения задач. Обозначим

$$\begin{aligned} &F_7(x,t) = f(x) + (1/t)A(th(x)), \\ &X_7(t) = \operatorname{Arg}\min_{x\in\mathbb{R}^m} F_7(x,t). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Пусть функция $A(h)$ удовлетворяет следующим двум условиям: при $h \notin \mathbb{R}_-^m$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} A(th) = +\infty, \tag{3.2}$$

при $h \in \mathbb{R}^m_-$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\, A(th) = 0. \tag{3.3}$$

Из (1.9) следует оценка точности

$$f(x_*) - \frac{1}{t}\, A^*(u_*) \le F_7(x(t), t) \le F_7(x_*, t), \tag{3.4}$$

здесь $x(t) \in X_7(t)$. Предполагается, что $X_7(t)$ не пусто для всех $t \ge t_0$. Учитывая, что $h(x_*) \in \mathbb{R}^m_-$, и используя условие (3.3), получим

$$\lim_{t\to\infty} \left[f(x(t)) + \frac{1}{t}\, A(th(x(t))) \right] = f(x_*).$$

С помощью (3.3) получим

$$\lim_{t\to\infty} f(x(t)) = f(x_*). \tag{3.5}$$

Соотношениям (3.2), (3.3) удовлетворяют, например, функции

$$A(h) = \sum_{i=1}^m e^{h^i}, \qquad G = \mathbb{R}^m, \qquad A^*(u) = \sum_{i=1}^m u^i[\ln u^i - 1].$$

4. Пусть a и b — скаляры. Обозначим

$$\begin{array}{lll} A_1(b) = b^p/p, & 1 \le p \le +\infty, & G = \mathbb{R}^1_+, \\ A_2(b) = -b^\beta/\beta, & -\infty < \beta < 1,\ \beta \ne 0, & G = \mathbb{R}^1_+, \\ A_3(b) = e^b, & & G = \mathbb{R}^1. \end{array}$$

Сопряженные функции будут

$$\begin{array}{ll} A_1^* = a^q/q, & G^* = \mathbb{R}^1_+, \\ A_2^* = -(-a)^\alpha/\alpha, & G^* = \mathbb{R}^1_-,\ a \ne 0, \\ A_3^*(a) = \begin{cases} a(\ln a - 1), & \text{если } a > 0, \\ 0, & \text{если } a = 0, \end{cases} & G^* = \mathbb{R}^1_+. \end{array}$$

Здесь $1/p + 1/q = 1$, $1/\alpha + 1/\beta = 1$.

Неравенство Юнга (1.7) приводит к следующим результатам: при $b \ge 0$, $a \ge 0$, $1 \le p \le +\infty$ имеем

$$ab \le b^p/p + a^q/q, \tag{4.1}$$

при $a > 0$, $b < 0$, $-\infty < \beta < 1$, $\beta \ne 0$

$$ab \le -b^\beta/\beta - |a|^\alpha/\alpha, \tag{4.2}$$

при $a > 0$ и любых b

$$ab \le e^b + a(\ln a - 1). \tag{4.3}$$

Для $a \in \mathbb{R}^m$, $a \ge 0$ введем в рассмотрение норму Гельдера порядка p:

$$\|b\|_p = \left[\sum_{i=1}^m |b^i|^p \right]^{1/p}, \qquad 1 \le p \le \infty,$$

$$\|b\|_\infty = \max_{i\in[1:m]} |b^i|, \qquad \|b\|_1 = \sum_{i=1}^m |b^i|.$$

Знак нормы сохраним и для обозначения следующей функции:

$$\|b\|_\beta = \left[\sum_{i=1}^{m} |b^i|^\beta\right]^{1/\beta},$$

здесь

$$\beta < 1, \qquad \|b\|_{-\infty} = \min_{i\in[1:m]} |b^i|.$$

Естественным обобщением введенных функций A_i на случай векторного аргумента будут функции

$$A_1(b) = \frac{1}{p}\,\|b\|_p^p, \qquad A_2(b) = -\frac{1}{\beta}\,\|b\|_\beta^\beta, \qquad A_3(b) = \sum_{i=1}^{m} e^{b^i}.$$

Возьмем в (4.1) – (4.3) в качестве a и b соответственно a^i, b^i просуммируем:

$$A_1^*(a) = \frac{1}{q}\,\|a\|_q^q, \qquad A_2^*(a) = \frac{-1}{\alpha}\,\|a\|_\alpha^\alpha, \qquad A_3^*(a) = \sum_{i=1}^{m} a^i[\ln a^i - 1].$$

Неравенство Юнга приводит к следующим соотношениям:

$$\langle a, b\rangle \le \frac{1}{p}\,\|b\|_p^p + \frac{1}{q}\,\|a\|_q^q, \quad 1 \le p \le +\infty, \quad G = G^* = \mathbb{R}_+^m, \tag{4.4}$$

$$\langle a, b\rangle \le -\frac{1}{\beta}\,\|b\|_\beta^\beta - \frac{1}{\alpha}\,\|a\|_\alpha^\alpha, \quad -\infty \le \beta < 1, \quad \beta \ne 0, \tag{4.5}$$

$$\langle a, b\rangle \le \sum_{i=1}^{m}[e^{b^i} + a^i(\ln a^i - 1)], \quad G = \mathbb{R}^m, \quad G^* = \mathbb{R}_+^m. \tag{4.6}$$

Пусть $B_1(b) = \|b\|_p$ для $G = \mathbb{R}_+^1$ и $B_2(b) = -\|b\|_\beta$ для $G = \mathbb{R}_-^1$, из определения (1.5) можно получить полярные функции. Проще их найти из приведенных неравенств. Возьмем в (4.4) в качестве a^i, b^i соответственно $a^i/\|a\|_q$ и $b^i/\|b\|_p$, получим неравенство Гельдера

$$\langle a, b\rangle \le \|a\|_q \cdot \|b\|_p, \qquad B_1^0(a) = \|a\|_q. \tag{4.7}$$

Если $a^i = (c^i)^{1/q}$, $b^i = (c^i)^{1/p}$ для всех $i \in [1 : m]$, то это неравенство переходит в равенство.

Аналогично из (4.5) для $a > 0$, $b < 0$ получим

$$\langle a, b\rangle \le -\|a\|_\alpha \cdot \|b\|_\beta, \qquad B_2^0(a) = \|a\|_\alpha. \tag{4.8}$$

5. Воспользуемся функцией (2.5) и неравенствами (4.7), (4.8):

$$F_8(x, t, \tau) = f(x) + t\|u_+^*(x)\|_q \cdot \|h_+(x)\|_p - \tau\|u_-^*(x)\|_\alpha \cdot \|h_-(x)\|_\beta,$$

$$F_9(x, t, \tau) = f(x) + tc_1\|h_+(x)\|_p - \tau c_2\|h_-(x)\|_\beta,$$

$$c_1 = \|u_*\|_q, \qquad c_2 = \min_{i\in[1:m]} u_*^i.$$

Из теоремы 2 следует, что при $t > 1$, $0 < \tau < 1$ множество точек, доставляющих безусловный минимум функциям F_8 и F_9, совпадает с X_*. Воспользуемся неравенством (4.8), считая, что $h_-(x) = h(x) < 0$. Пусть $\beta = -1$, $\alpha = 1/2$, тогда

$$f(x_*) \le f(x) - \tau c^2 \left[\sum_{i=1}^{m} |h^i(x)|^{-1}\right]^{-1}, \qquad c = \sum_{i=1}^{m} \sqrt{u_*^i}. \tag{5.1}$$

Если $\beta = 1/2$, $\alpha = -1$, то

$$f(x_*) \le f(x) - \frac{\tau}{d} \left[\sum_{i=1}^{m} \sqrt{-h^i(x)}\right]^2, \qquad d = \sum_{i=1}^{m} (u_*^i)^{-1}. \tag{5.2}$$

Если $0 < \tau < 1$ и минимумы правых частей (5.1) и (5.2) достигаются в точках $\bar{x} \in X$, то они принадлежат множеству X_*.

Перейдем к формулам, вытекающим из неравенства Юнга (1.7). Пусть точки x таковы, что $h(x) < 0$, тогда из (1.9), (4.5) следует

$$f(x_*) + \frac{1}{\alpha} \|\tau u_*\|_\alpha^\alpha \le f(x) - \frac{1}{\beta} \left\| \frac{h(x)}{\tau} \right\|_\beta^\beta.$$

Положим, в частности, $\beta = -1$, $\alpha = 1/2$, получим

$$f(x_*) + 2\sqrt{\tau}\, c \le f(x) + \tau \sum_{i=1}^{m} [-h^i(x)]^{-1}. \tag{5.3}$$

При $\beta = 1/2$, $\alpha = -1$ имеем

$$f(x_*) - \tau d \le f(x) - 2\sqrt{\tau} \sum_{i=1}^{m} \sqrt{-h^i(x)}. \tag{5.4}$$

Если минимумы правых частей (5.3) и (5.4) достигаются соответственно в точках $\bar{x}$ и $\tilde{x}$, принадлежащих X, то

$$f(x_*) + 2c\sqrt{\tau} \le f(\bar{x}) + \tau \sum_{i=1}^{m} [-h^i(\bar{x})]^{-1} \le f(x_*) + \tau \sum_{i=1}^{m} [-h^i(x_*)]^{-1},$$
$$f(x_*) - \tau d \le f(\tilde{x}) - 2\sqrt{\tau} \sum_{i=1}^{m} \sqrt{-h^i(\tilde{x})} \le f(x_*) - 2\sqrt{\tau} \sum_{i=1}^{m} \sqrt{-h^i(x_*)}.$$

Погрешности определения значения $f(x_*)$, возникающие при замене исходной задачи на задачи безусловной минимизации, стремятся к нулю при $\tau \to 0$. Обычно в методе внутренних штрафных функций используются функции, определенные на внутренней части X и стремящиеся к бесконечности, когда x приближается к границе области, например $\sum_{i=1}^{m} [-h^i(x)]^{-1}$. В том случае, если $0 < \beta < 1$, такого свойства нет. Класс таких функций впервые был введен в [6].

6. Рассмотрим внешние штрафные функции в случае, когда $h(x) \geq 0$. Положим

$$A(h) = \frac{1}{p}\|th_+\|_p^p, \qquad B(h) = \|h_+\|_p.$$

Тогда из (1.9) и (1.10) следует

$$f(x_*) - \frac{1}{q}\left\|\frac{u_*}{t}\right\|_q^q \leq f(x) + \frac{1}{p}\|th_+(x)\|_p^p, \tag{6.1}$$

$$f(x_*) \leq f(x) + \left\|\frac{u_*}{t}\right\|_q^{\cdot} \|th_+(x)\|_p. \tag{6.2}$$

Пусть минимум правой части (6.1) достигается в точке $\bar{x}$, тогда из (6.1) получим

$$f(x_*) - \frac{1}{q}\left\|\frac{u_*}{t}\right\|_q^q \leq f(\bar{x}) + \frac{1}{p}\|th_+(\bar{x})\|_p^p \leq f(x_*). \tag{6.3}$$

Из (6.2) следует также и другая оценка:

$$f(x_*) - \frac{1}{2}\left\|\frac{u_*}{t}\right\|_q^2 \leq f(x) + \frac{1}{2}\|th_+(x)\|_p^2 = F_{10}(x,t).$$

Если минимум $F_{10}(x,t)$ по x достигается в точке $\bar{x}$, то

$$\frac{1}{2}\|th_+(\bar{x})\|_p^2 \leq f(x_*) - f(\bar{x}). \tag{6.4}$$

Вновь применим (6.2) для оценки разности, стоящей в правой части (6.4):

$$\|th_+(\bar{x})\|_p \leq 2\left\|\frac{u_*}{t}\right\|_q, \tag{6.5}$$

$$f(x_*) - f(\bar{x}) \leq 2\left\|\frac{u_*}{t}\right\|_q^2, \tag{6.6}$$

$$f(x_*) - \frac{1}{2}\left\|\frac{u_*}{t}\right\|_q^2 \leq F_{10}(\bar{x},t) \leq f(x_*). \tag{6.7}$$

Если $p = 2$, $\tau = t^2/2$, тогда $q = 2$ и из (6.5) – (6.7) следует

$$f(x_*) - \frac{1}{4\tau}\sum_{i=1}^{m}(u_*^i)^2 \leq f(\bar{x}) + \tau\sum_{i=1}^{m}[h_+^i(\bar{x})]^2 \leq f(x_*), \tag{6.8}$$

$$\tau\left[\sum_{i=1}^{m}[h_+^i(\bar{x})]^2\right]^{1/2} \leq \left[\sum_{i=1}^{m}(u_*^i)]^2\right]^{1/2} = \|u_*\|_2, \tag{6.9}$$

$$f(x_*) - f(\bar{x}) \leq \frac{1}{\tau}\|u_*\|_2^2. \tag{6.10}$$

Формулу (6.8) можно получить и непосредственно из (6.3). Оценки, близкие к (6.8) – (6.10), были получены в [7] для задач выпуклого программирования. Заметим, что здесь не делалось никаких предположений о выпуклости или дифференцируемости вспомогательных функций и функций, определяющих задачу (1.1).

7. Изложенный выше подход можно обобщить на вспомогательные функции вида

$$\begin{aligned} F_{11}(x,u,t) &= L(x,u)+A(h(x))+A^*(u_*-u), \\ F_{12}(x,u,t) &= L(x,u)+tB(h(x))B^0(u_*-u). \end{aligned}$$

Пусть функция $B(h)$ и вектор v таковы, что $B(h)=0$ при всех $h\in\mathbb{R}^m_-$ и $0\le B(h(x))B^0(u_*-u)<+\infty$ при всех $b\in\mathbb{R}^m_+$. Тогда при $t\ge 1$ задача минимизации F_{12} по x разрешима и

$$f(x_*)=\min_{x\in\mathbb{R}^n} F_{12}(x,u,t).$$

Если в качестве B взять $B=\|h_+\|_p$, то $B^0(u_*-u)=\|u_*-u\|_q$, при этом считается, что $u_*\ge u\ge 0$.

Полученные в предыдущем пункте оценки переносятся на случай использования вспомогательной функции F_{11}. Особенно просто это делается, если считать, что $u_*\ge u>0$. Если минимум F_{11} по x достигается в точке $\bar{x}$, то оценка (6.1), например, примет вид

$$f(x_*)-\frac{1}{q}\left\|\frac{u_*-u}{t}\right\|_q^q\le L(\bar{x},u)+\frac{1}{p}\,\|th_+(\bar{x})\|_p^p\le f(x_*).$$

Аналогично можно получить и другие оценки.

Литература

1. Еремин И.И. Метод “штрафов” в выпуклом программировании // Докл. АН СССР. 1967. Т. 173, N° 4. С. 748–751.

2. Zangwill W. Non-linear programming via penalty function // Manag. Sci. 1967. P. 344–358.

3. Скарин В.Д. О методе штрафных функций для задач нелинейного программирования // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. 1973. Т. 13, N° 5. С. 1186–1199.

4. Жадан В.Г. О некоторых оценках коэффициента штрафа в методах точных штрафных функций. Там же. 1984. Т. 24, N° 8. С. 1164–1171.

5. Evtushenko J.G. Numerical optimization techniques // Optimization. N.Y.: Software Inc., 1985.

6. Hamala M. Quasibarrier method for convex programming // Abstr. IX Intern/ Symp. Math. Program. 1976. Vol. 11, N° 3. P. 263–281.

7. Еремин И.И., Мазуров В.Д. Нестационарные процессы математического программирования. М.: Наука, 1979.

8. Скарин В.Д. Об одной модификации метода штрафных функций в выпуклом программировании // Нелинейная оптимизация и приложения в планировании. Свердловск: Изд-во ин-та прикл. мат. и мех. УНЦ, 1973. С. 51–62.