РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА (ИСА РАН)
ДИНАМИКА НЕОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ
Под редакцией член-корреспондента РАН Ю.С. Попкова
2006, № 10, с. 104–117.

Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г.

НАХОЖДЕНИЕ НОРМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ[1]

Большие задачи линейного программирования (ЛП), как правило, имеют неединственное решение. Различные методы решения задач ЛП (симплекс-метод, метод внутренних точек, метод квадратичной штрафной функции) дают возможность получать различные решения в случае неединственности. Так симплекс-метод дает решение, которое принадлежит вершине многогранного множества. Методы внутренней точки сходятся к решению, в котором выполнено условие строгой дополняющей нежесткости.

В данной работе метод квадратичной штрафной функции применяется к двойственной задаче ЛП, что дает возможность получить точное нормальное решение прямой задачи ЛП в результате однократной безусловной минимизации при конечном значении коэффициента штрафа. Аналогично показано как, применяя квадратичную штрафную функцию к прямой задаче ЛП, при конечном значении коэффициента штрафа получить точное нормальное решение двойственной задачи ЛП. Применение обобщенного метода Ньютона для минимизации таких штрафных функций дает возможность находить нормальные решения для задач ЛП с очень большим числом переменных (несколько миллионов) при умеренном числе ограничений (несколько тысяч). В работе предложен несколько нестандартный вид квадратичного штрафа для задач ЛП и приведены оценки порогового значения коэффициента штрафа, начиная с которого в результате однократной минимизации находится точное нормальное решение задачи ЛП.

Пусть задана прямая задача ЛП в стандартной форме

$$f_* = \min_{x \in X} c^\top x, \quad X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b,\ x \geq 0_n\}. \tag{P}$$

Двойственная к ней имеет вид

$$f_* = \max_{u \in U} b^\top u, \quad U = \{u \in \mathbb{R}^m : A^\top u \leq c\}. \tag{D}$$

Здесь $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$ и $b \in \mathbb{R}^m$ заданы, x — вектор прямых переменных, а u — двойственных, через 0_i обозначен i-мерный нулевой вектор.

Предположим, что множество решений X_* прямой задачи (P) непусто, следовательно множество решений U_* двойственной задачи (D) также непусто. Необходимые и достаточные условия оптимальности (условия Куна–Таккера) для задач (P) и (D) запишем в виде

$$Ax_* - b = 0_m, \qquad x_* \geq 0_n, \qquad D(x_*)v_* = 0_n, \tag{1}$$

$$v_* = c - A^\top u_* \geq 0_n. \tag{2}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 06-01-00547), по программе поддержки ведущих научных школ (код проекта НШ-2240.2006.1).

Здесь в ограничения двойственной задачи (D) введен неотрицательный вектор дополнительных переменных $v = c - A^\top u \geq 0_n$. Через $D(z)$ обозначена диагональная матрица, у которой i-й диагональный элемент есть i-я компонента вектора z.

Рассмотрим задачи нахождения нормального решения прямой задачи (P) и двойственной задачи (D) или, что то же самое, задачи определения проекций начала координат на множество решений X_* прямой задачи (P) и на множество решений U_* двойственной задачи (D) соответственно:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|\widehat{x}_*\|^2 &= \min_{x \in X_*} \frac{1}{2}\|x\|^2, \quad X_* = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b,\ c^\top x = f_*,\ x \geq 0_n\}, && (3)\\
\frac{1}{2}\|\widehat{u}_*\|^2 &= \min_{u \in U_*} \frac{1}{2}\|u\|^2, \quad U_* = \{u \in \mathbb{R}^m : A^\top u \leq c,\ b^\top u = f_*\}. && (4)
\end{aligned}$$

Здесь и всюду ниже используется евклидова норма векторов, f_* — оптимальное значение целевой функции исходной задачи ЛП.

Для этих задач введем функции Лагранжа

$$\begin{aligned}
L^1(x, p, \beta) &= \frac{1}{2}\|x\|^2 + p^\top(b - Ax) + \beta(c^\top x - f_*),\\
L^2(u, y, \alpha) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 + y^\top(A^\top u - c) + \alpha(f_* - b^\top u).
\end{aligned}$$

Здесь $p \in \mathbb{R}^m$, $\beta \in \mathbb{R}^1$ и $y \in \mathbb{R}^n_+$, $\alpha \in \mathbb{R}^1$ суть множители Лагранжа соответственно для задач (3) и (4).

Двойственные задачи к (3) и к (4) имеют вид

$$\max_{p \in \mathbb{R}^m} \max_{\beta \in \mathbb{R}^1} \min_{x \in \mathbb{R}^n_+} L^1(x, p, \beta), \tag{5}$$

$$\max_{y \in \mathbb{R}^n_+} \max_{\alpha \in \mathbb{R}^1} \min_{u \in \mathbb{R}^m} L^2(u, y, \alpha). \tag{6}$$

Запишем условия Куна–Таккера для задачи (3):

$$x - A^\top p + \beta c \geq 0_n, \quad D(x)(x - A^\top p + \beta c) = 0_n, \quad x \geq 0_n, \tag{7}$$

$$Ax = b, \qquad c^\top x = f_*. \tag{8}$$

Условия Куна–Таккера для задачи (4) имеют вид

$$\begin{gathered}
u + Ay - \alpha b = 0_m, \quad A^\top u - c \leq 0_n, \quad D(y)(A^\top u - c) = 0_n,\\
y \geq 0_n, \qquad f_* - b^\top u = 0.
\end{gathered} \tag{9}$$

Легко проверить, что формулы (7) эквивалентны выражению

$$x = (A^\top p - \beta c)_+, \tag{10}$$

где a_+ обозначает вектор a, у которого все отрицательные компоненты заменены на нули. Эта формула дает решение внутренней задачи минимизации в задаче (5). Из (9) получаем решение внутренней задачи минимизации в (6):

$$u = \alpha b - Ay. \tag{11}$$

Подставляя (10) в функцию Лагранжа $L^1(x,p,\beta)$ и подставляя (11) в функцию Лагранжа $L^2(u,y,\alpha)$, получаем двойственные функции соответственно для задач (5) и (6):

$$\begin{aligned}\widetilde{L}^1(p,\beta) &= \quad b^\top p - \frac{1}{2}\|(A^\top p - \beta c)_+\|^2 - \beta f_*,\\ \widetilde{L}^2(y,\alpha) &= -c^\top y - \frac{1}{2}\|\alpha b - Ay\|^2 + \alpha f_*.\end{aligned}$$

Функция $\widetilde{L}^1(p,\beta)$ вогнута, кусочно-квадратична и непрерывно дифференцируема по своим переменным p и β. Функция $\widetilde{L}^2(y,\alpha)$ вогнута, квадратична и дважды непрерывно дифференцируема по своим аргументам.

Двойственные задачи (5) и (6) соответственно сводятся к решению внешних задачи максимизации

$$\max_{p\,\in\,\mathbb{R}^m}\ \max_{\beta\in\mathbb{R}^1} \widehat{L}^1(p,\beta), \tag{12}$$

$$\max_{y\,\in\,\mathbb{R}^n_+}\ \max_{\alpha\in\mathbb{R}^1} \widehat{L}^2(y,\alpha). \tag{13}$$

Решив задачу (12), найдем оптимальные p и β. После их подстановки в (10) получаем решение задачи (3), т.е. нормальное решение $\widehat{x}_*$ прямой задачи ЛП (P). Необходимые и достаточные условия оптимальности для задачи (12) имеют вид

$$\begin{aligned}\widehat{L}^1_p(p,\beta) &= b - A(A^\top p - \beta c)_+ = b - Ax = 0_m,\\ \widehat{L}^1_\beta(p,\beta) &= c^\top(A^\top p - \beta c)_+ - f_* = c^\top x - f_* = 0,\end{aligned}$$

где x определен формулой (10). Эти условия выполнены тогда и только тогда, когда $x \in X_*$ и $x = \widehat{x}_*$.

Решив задачу (13), найдем оптимальные y и α, после их подстановки в (11) получаем решение задачи (4), т.е. нормальное решение $\widehat{u}_*$ двойственной задачи ЛП (D). Приведем необходимые и достаточные условия оптимальности для задачи (13):

$$\begin{aligned}&\widehat{L}^2_y(y,\alpha) = -c + A^\top(\alpha b - Ay) = -c + A^\top u \le 0_n,\\ &D(y)(-c + A^\top u) = 0_n, \qquad y \ge 0_n,\\ &\widehat{L}^2_\alpha(y,\alpha) = -b^\top(\alpha b - Ay) + f_* = -b^\top u + f_* = 0.\end{aligned}$$

Здесь вектор u определен формулой (11). Эти условия оптимальности выполнены тогда и только тогда, когда $u \in U_*$ и $u = \widehat{u}_*$.

К сожалению, задачи безусловной оптимизации (12) и (13) содержат неизвестную априори величину f_* — оптимальное значение целевой функции задачи ЛП. Однако эти задачи можно упростить, избавившись от этого недостатка. Для этого вместо (12) предлагается решать следующую упрощенную задачу безусловной максимизации:

$$I_1 = \max_{p\in\mathbb{R}^m} S^1(p,\beta), \tag{14}$$

где скаляр β фиксирован, а функция $S^1(p,\beta)$ определена следующим образом:

$$S^1(p,\beta) = b^\top p - \frac{1}{2}\|(A^\top p - \beta c)_+\|^2. \tag{15}$$

Вместо (13) также будем решать следующую упрощенную задачу максимизации на положительном ортанте:

$$I_1 = \max_{y\in\mathbb{R}^n_+} S^2(y,\alpha), \tag{16}$$

где скаляр α фиксирован, а функция $S^2(y,\alpha)$ определена следующим образом:

$$S^2(y,\alpha) = -c^\top y - \frac{1}{2}\|\alpha b - Ay\|^2. \tag{17}$$

Сначала рассмотрим задачу (14) и ее связь с прямой задачей ЛП (P). Заметим, что, в отличие от задачи (3), двойственная к ней задача (12) имеет неединственное решение. Естественно возникает вопрос о нахождении среди всех решений задачи (12) минимального значения β_* множителя Лагранжа β. Тогда в двойственной задаче (12), как будет показано в теореме 1, можно зафиксировать $\beta \geq \beta_*$ и решать задачу максимизации двойственной функции $\widehat{L}^1(p,\beta)$ только по переменным p, т.е. решать задачу (14). При этом пара $[p,\beta]$ является решением задачи (12), тройка $[\widehat{x}_*, p, \beta]$ — седловая точка задачи (3), в которой нормальное решение $\widehat{x}_*$ задачи (P) определяется по формуле (10).

Для нахождения минимального β обратимся к условиям Куна–Таккера для задачи (3), которые для этой задачи являются необходимыми и достаточными условиями оптимальности. Без потери общности предположим, что первые ℓ компонент вектора $\widehat{x}_*$ строго больше нуля. В соответствии с этим предположением представим векторы $\widehat{x}_*$, c и матрицу A в виде

$$\widehat{x}_*^\top = [\widehat{x}_*^{\ell\top}, \widehat{x}_*^{d\top}], \quad c^\top = [c^{\ell\top}, c^{d\top}], \quad A = [A_\ell \mid A_d], \tag{18}$$

где $\widehat{x}_*^\ell > 0_\ell$, $\widehat{x}_*^d = 0_d$, $d = n - \ell$.

В соответствии с разбиением (18) оптимальный вектор дополнительных переменных v_* из условий Куна–Таккера (1), (2) для задач (P) и (D) представим в виде $v_*^\top = [v_*^{\ell\top}, v_*^{d\top}]$. Тогда согласно условию дополняющей нежесткости $x_*^\top v_* = 0$, $x_* \geq 0_n$, $v_* \geq 0_n$ выражение (2) запишется в виде

$$\begin{aligned} v_*^\ell &= c^\ell - A_\ell^\top u_* = 0_\ell, & (19)\\ v_*^d &= c^d - A_d^\top u_* \geq 0_d. & (20) \end{aligned}$$

С использованием обозначений из (18) необходимые и достаточные условия оптимальности (7), (8) для задачи (3) можно переписать в развернутом виде

$$\begin{aligned} \widehat{x}_*^\ell &= A_\ell^\top p - \beta c^\ell > 0_\ell, & (21)\\ \widehat{x}_*^d &= 0_d, \qquad A_d^\top p - \beta c^d \leq 0_d, & (22)\\ A_\ell \widehat{x}_*^\ell &= b, \qquad c^{\ell\top}\widehat{x}_*^\ell = f_*. & (23) \end{aligned}$$

Среди решений системы (21) – (23) найдем такие множители Лагранжа $[p,\beta]$, что β является минимальным, т.е. приходим к задаче линейного программирования

$$\beta_* = \inf_{\beta\in\mathbb{R}^1} \inf_{p\in\mathbb{R}^m} \{\beta : A_\ell^\top p - \beta c^\ell = \widehat{x}_*^\ell,\ \ A_d^\top p - \beta c^d \leq 0_d\}. \tag{24}$$

Ограничения в этой задаче совместны, но целевая функция может быть не ограничена снизу. В этом случае будем полагать $\beta_* = \gamma$, где γ — некоторое число.

Как будет доказано ниже в теореме 1, если система уравнений в (24) однозначно разрешима относительно p, то величина β_* представима в виде

$$\beta_* = \begin{cases} \max\limits_{i\in\sigma} \dfrac{\left[A_d^\top \left(A_\ell A_\ell^\top\right)^{-1} A_\ell\, \widehat{x}_*^\ell\right]^i}{(v_*^d)^i}, & \text{если } \sigma \neq \emptyset,\\ \gamma > -\infty, & \text{если } \sigma = \emptyset. \end{cases} \tag{25}$$

Здесь введено индексное множество $\sigma = \{\ell+1 \le i \le n : (v_*^d)^i > 0\}$ и γ — произвольное число.

Теорема 1. *Пусть множество решений* X_* *задачи* (P) *непусто. Тогда при любом* $\beta \ge \beta_*$, *где* β_* *определяется формулой* (24), *пара* $[p(\beta), \beta]$, *где* $p(\beta)$ — *решение задачи безусловной максимизации* (14) *или, что то же самое, решение системы* $A(A^\top p - \beta c)_+ = b$, *определяет нормальное решение* $\widehat{x}_*$ *прямой задачи* (P) *по формуле*

$$\widehat{x}_* = (A^\top p(\beta) - \beta c)_+. \tag{26}$$

Если дополнительно ранг матрицы A_ℓ, *соответствующий ненулевым компонентам вектора* $\widehat{x}_*$, *равен* m, *то* β_* *определяется по формуле* (25), *а точное решение двойственной задачи* (D) *определяется по формуле*

$$u_* = \frac{1}{\beta}\left[p(\beta) - (A_\ell A_\ell^\top)^{-1} A_\ell\, \widehat{x}_*\right]. \tag{27}$$

Доказательство. При $X_* \ne \emptyset$ ограничения в (24) всегда совместны. Если целевая функция в этой задаче ограничена, то найдем ее решение $(p(\beta_*), \beta_*)$, если не ограничена, то в качестве $(p(\beta_*), \beta_*)$ возьмем любую допустимую точку. Из условий (21) – (23) следует, что $p(\beta_*)$ есть решение задачи (14), пара $[p(\beta_*), \beta_*]$ является решением задачи (12), тройка $[\widehat{x}_*, p(\beta_*), \beta_*]$ — седловая точка задачи (3), в которой нормальное решение $\widehat{x}_*$ задачи (P) определяется в соответствии с формулой (10):

$$\widehat{x}_* = (A^\top p(\beta_*) - \beta_* c)_+. \tag{28}$$

Покажем, что при любом β больше найденного β_* существует решение $p(\beta)$ задачи (14) и нормальное решение $\widehat{x}_*$ находится из формулы (26), т.е. покажем, что пара $[p(\beta_*) + \delta p, \beta_* + \delta\beta]$, где приращение $\delta\beta > 0$, удовлетворяет условиям (21), (22). Для этого необходимо показать, что совместна система

$$\delta\beta > 0, \quad A_\ell^\top \delta p - \delta\beta c^\ell = 0_\ell, \quad A_d^\top \delta p - \delta\beta c^d \le 0_d. \tag{29}$$

Воспользуемся теоремой Мотцкина об альтернативах для однородных линейных систем, которая утверждает, что всегда совместна либо система

$$Cx > 0_m, \quad Dx \ge 0_m, \quad Fx = 0_m, \tag{30}$$

либо система

$$C^\top z_1 + D^\top z_2 + F^\top z_3 = 0_n, \quad z_1 \ge 0_m, \quad \|z_1\| \ne 0, \quad z_2 \ge 0_m. \tag{31}$$

Перепишем систему (29) в обозначениях системы (30), т.е. положим

$$C = [0_m^\top \mid 1], \quad D = [-A_d^\top \mid c^d], \quad F = [A_\ell^\top \mid c^\ell], \quad x^\top = [\delta p^\top, \delta\beta].$$

Предположим, что система (29) несовместна, тогда совместна система

$$-A_d z_2 + A_\ell z_3 = 0_m, \tag{32}$$

$$z_1 + c^{d\top} z_2 - c^{\ell\top} z_3 = 0, \tag{33}$$

$$z_1 > 0, \qquad z_2 \ge 0_n. \tag{34}$$

Эту систему можно записать в виде

$$-A_d z_2 + A_\ell z_3 = 0_m, \tag{35}$$

$$-c^{d\top} z_2 + c^{\ell\top} z_3 = 0, \tag{36}$$

$$z_2 \geq 0_n. \tag{37}$$

Совместимая система (32) – (37) в соответствии с теоремой об альтернативах неоднородных линейных систем имеет несовместную альтернативную систему

$$-A_d^\top u \geq -c^d, \tag{38}$$

$$A_\ell^\top u = c^\ell. \tag{39}$$

Приходим к противоречию, так как система (38) – (39) имеет решение $u_* \in U_*$ по предположению теоремы о разрешимости исходной задачи ЛП. Следовательно, при любом $\delta\beta > 0$ существует такое δp, что пара $[p(\beta_*) + \delta p, \beta_* + \delta\beta]$ является решением задачи (12), $[p(\beta_*) + \delta p]$ является решением задачи (14) при фиксированном параметре $\beta = \beta_* + \delta\beta$ и нормальное решение $\widehat{x}_*$ находится из (26).

Если выполнено предположение теоремы о том, что матрица A_ℓ имеет полный ранг m и $\ell \geq m$, то в (21) линейная система уравнений относительно неизвестных p совместна и единственное решение p этой системы дается формулой

$$p(\beta) = (A_\ell A_\ell^\top)^{-1} A_\ell (\widehat{x}_*^\ell + \beta c^\ell). \tag{40}$$

Подставляя эту формулу в (22), получаем неравенство

$$q \leq \beta z, \tag{41}$$

где введены обозначения $q = A_d^\top (A_\ell A_\ell^\top)^{-1} A_\ell \, \widehat{x}_*^\ell$ и $z = c^d - A_d^\top (A_\ell A_\ell^\top)^{-1} A_\ell \, c^\ell$.

Если p определено согласно (40) и β удовлетворяет неравенству (41), то пара $[p, \beta]$ является решением двойственной задачи (12). Найдем минимальное значение β, при котором выполнено неравенство (41), т.е. дадим аналитическое решение задачи (24).

Из (19) получаем $u_* = (A_\ell A_\ell^\top)^{-1} A_\ell \, c^\ell$. Подставляя это выражение в (20), получаем $v_*^d = z \geq 0_d$. Естественно ввести индексное множество: $\sigma = \{\ell + 1 \leq i \leq n : (v_*^d)^i > 0\}$. Если $\sigma = \emptyset$, то (41) выполнено при любом β. Неравенство (41) имеет место при любом $\beta \geq \beta_*$, где

$$\beta_* = \begin{cases} \max\limits_{i \in \sigma} \dfrac{q^i}{(v_*^d)^i}, & \text{если } \sigma \neq \emptyset, \\ \gamma > -\infty, & \text{если } \sigma = \emptyset \end{cases}$$

и γ — произвольное число. Итак, можно решать упрощенную задачу безусловной максимизации (14). Ее решение одновременно дает решение двойственной задачи (12). Далее, используя формулу (10), получаем нормальное решение $\widehat{x}_*$. Из (40) и (19) следует, что решение задачи (D) выражается через решение $p(\beta)$ задачи (14) при $\beta \geq \beta_*$ по формуле (27). Теорема доказана. $\square$

Теорема 1 позволяет заменить задачу (12), содержащую априори неизвестное число f_*, на задачу (14), в которой вместо этого числа фигурирует полуинтервал $[\beta_*, +\infty)$, что существенно проще с вычислительной точки зрения. Отметим, что значение β_*, найденное из формулы (42), может быть отрицательным.

Теперь рассмотрим задачу (16) и установим ее связь с двойственной задачей ЛП (D). Задача (13), двойственная к (4), в отличие от нее имеет неединственное решение. Рассмотрим вопрос о нахождении среди всех решений двойственной задачи (13) минимального значения α_* множителя Лагранжа α. Тогда в двойственной задаче (13) можно зафиксировать $\alpha \geq \alpha_*$ и решать задачу максимизации двойственной функции $\widehat{L}^2(y, \alpha)$ только по переменным y, т.е. решать задачу (16). Обозначим это решение через $y(\alpha)$. Тогда пара $[y(\alpha), \alpha]$ является решением задачи (13), тройка $[\widehat{u}_*, y(\alpha), \alpha]$ — седловая точка задачи (4) и нормальное решение $\widehat{u}_*$ задачи (D) находится в соответствии с (11).

При некоторых дополнительных предположениях об исходной задаче ЛП можно получить аналитическую формулу для α_*. Будем считать, что прямая задача ЛП (P) имеет единственное, быть может, вырожденное решение x_*. В этом решении $x_*^L > 0_\ell$ — совокупность положительных компонент, $\ell < m$. В случае невырожденного решения $\ell = m$. Обозначим индексное множество, соответствующее положительным компонентам вектора x_*, через I_*^L. Если x_* — вырожденное решение, то двойственная задача ЛП (D) имеет неединственное решение, и в точке $[x_*, \widehat{u}_*]$ ($\widehat{u}_*$ — нормальное решение двойственной задачи (D)) выполнены условия Куна–Таккера для задачи (P), которые в подробной записи имеют вид:

$$\begin{array}{ll} v_*^L = c^L - B_L^\top \widehat{u}_* = 0_\ell, & x_*^L > 0_\ell; \\ v_*^S = c^S - B_S^\top \widehat{u}_* = 0_s, & x_*^S = 0_s; \\ v_*^N = c^N - N^\top \widehat{u}_* > 0_r, & x_*^N = 0_r; \\ B_L x_*^L = b. & \end{array} \tag{42}$$

Здесь матрица $A = [B \mid N]$ представлена в соответствии с разбиением вектора невязок $v_* = c - A^\top \widehat{u}_*$ ограничений двойственной задачи (D) на нулевые $[v_*^{L\top}, v_*^{S\top}] = v_*^{B\top} = 0_k$ и положительные $v_*^N > 0_r$ компоненты, где $k = \ell + s \leq m$, $r = n - k$. Используя это разбиение, представим вектор x_* в виде $x_*^\top = [x_*^{B\top}, x_*^{N\top}]$. В свою очередь матрица B представлена в соответствии с разбиением вектора x_*^B на положительные x_*^L и нулевые x_*^S компоненты, т.е. $B = [B_L \mid B_S]$. В силу единственности решения x_* матрица B состоит из $k \leq m$ линейно независимых столбцов, т.е. ее ранг равен k.

Для дальнейшего потребуется вектор $\eta \in \mathbb{R}^k$, определенный следующим образом: $\eta = (B^\top B)^{-1} c^B$. Заметим, что если $k = m$, то вектор η легко приводится к виду $\eta = B^{-1}\widehat{u}_*$. Кроме того, определим следующую величину:

$$\alpha_* = \begin{cases} \max\limits_{i \in I_*^L} \dfrac{(\eta^L)^i}{(x_*^L)^i}, & \text{если } I_*^L \neq \emptyset, \\ \gamma > -\infty, & \text{если } I_*^L = \emptyset, \end{cases} \tag{43}$$

где γ — произвольное число.

Теорема 2. *Пусть множество решений U_* задачи* (D) *непусто и ранг матрицы B, соответствующий нулевым компонентам вектора дополнительных переменных $v_*^B = c^B - B^\top \widehat{u}_* = 0_k$, вычисленных в нормальном решении $\widehat{u}_*$, равен $k \leq m$. Тогда при любом $\alpha \geq \alpha_*$, где α_* определяется формулой* (43), *пара $[y(\alpha), \alpha]$, где $y(\alpha)$ — решение задачи* (16) *— имеет вид*

$$y(\alpha) = \begin{bmatrix} y^B \\ y^N \end{bmatrix}, \quad y^B = \begin{bmatrix} y^L \\ y^S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_*^L - \eta^L \\ -\eta^S \end{bmatrix} \geq 0_k, \quad y^N = 0_r, \tag{44}$$

и определяет нормальное решение $\widehat{u}_*$ двойственной задачи (D) *по формуле*

$$\widehat{u}_* = \alpha b - A y(\alpha). \tag{45}$$

Доказательство. Вектор $\widehat{u}_*$ является единственным решением задачи (4), и существуют такие множители Лагранжа $y \in \mathbb{R}^n_+$, $\alpha \in \mathbb{R}^1$, что точка $[\widehat{u}_*, y, \alpha]$ удовлетворяет условиям Куна–Таккера для задачи (4):

$$\begin{gathered} D(y)v_* = 0_n, \quad v_* = c - A^\top \widehat{u}_* \geq 0_n, \quad y \geq 0_n, \\ \widehat{u}_* - \alpha b + Ay = 0_m, \quad b^\top \widehat{u}_* = f_*. \end{gathered} \tag{46}$$

Множители Лагранжа y и α не единственны, и при предположении теоремы можно найти минимальный множитель α_*, при котором однозначно определяется множитель $y(\alpha_*)$, являющийся одновременно решением задачи (16). Учитывая, что точка $[x_*, \widehat{u}_*]$ удовлетворяет условиям Куна–Таккера (42), перепишем соотношения (46) в виде

$$v_*^B = c^B - B^\top \widehat{u}_* = 0_k, \quad y^B \geq 0_k, \tag{47}$$

$$v_*^N = c^N - N^\top \widehat{u}_* > 0_r, \quad y^N = 0_r, \tag{48}$$

$$\widehat{u}_* - \alpha b + By^B = 0_m, \tag{49}$$

$$b^\top \widehat{u}_* = f_*. \tag{50}$$

Решая систему уравнений (47) и (49), получим

$$\begin{aligned} &y^B = \alpha (B^\top B)^{-1} B^\top b - \eta \geq 0_k, \\ &\widehat{u}_* = \alpha M b + B\eta. \end{aligned} \tag{51}$$

Здесь $M = I - B(B^\top B)^{-1}B^\top$ — матрица проектирования, и так как вектор b лежит в пространстве столбцов матрицы B_L, то $Mb = 0_m$. Так как матрица B состоит из линейно независимых столбцов, то существует только один вектор $\eta = \begin{bmatrix} \eta^L \\ \eta^S \end{bmatrix}$ такой, что $\widehat{u}_* = B\eta = B_L \eta^L + B_S \eta^S$. Покажем, что $-\eta^S \geq 0_s$. Из условия $Bx_*^B = b$ следует

$$x_*^B = (B^\top B)^{-1} B^\top b = \begin{bmatrix} x_*^L \\ x_*^S \end{bmatrix} \begin{array}{l} > 0_\ell, \\ = 0_s. \end{array} \tag{52}$$

В (51) множитель Лагранжа α должен быть таким, чтобы $y^B \geq 0_k$. С учетом (52) из (51) получаем

$$y^B = \begin{bmatrix} y^L \\ y^S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_*^L - \eta^L \\ -\eta^S \end{bmatrix} \geq 0_k.$$

Отсюда следует, что $\eta^S \leq 0_s$ и на α должно накладываться условие $\alpha \geq \alpha_*$. При фиксированном $\alpha \geq \alpha_*$ $y(\alpha)$ однозначно определяется из условий Куна–Таккера (46) и является единственным решением задачи (16). Пара $[y(\alpha), \alpha]$ — решение задачи (13), тройка $[\widehat{u}_*, y(\alpha), \alpha]$ — седловая точка задачи (4), и нормальное решение $\widehat{u}_*$ задачи (D) находится в соответствии с (11), т.е. приходим к формуле (45). Теорема доказана. $\square$

Задача (14) и задача квадратичного программирования

$$\min_{x \in X} \left\{ \beta c^\top x + \frac{1}{2}\|x\|^2 \right\}, \qquad X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, \ x \geq 0_n\} \tag{53}$$

являются взаимно двойственными. При любом $\beta \geq \beta_*$ единственное решение $\widehat{x}_*$ задачи (53) есть проекция нуля на множество решений X_* прямой задачи (P), т.е. является нормальным решением задачи (P). Решение $\widehat{x}_*$ задачи квадратичного программирования (53) определяется через $[p(\beta), \beta]$ в результате решения задачи безусловной максимизации (14) по формуле (26), которая согласно теореме 1 дает нормальное решение при $\beta \geq \beta_*$.

Рассмотрим случай, когда $\beta \geq \beta_*$ и $\beta > 0$. В задаче (14) сделаем замену переменных, положив $p = \beta u$. Тогда задача (14) заменяется эквивалентной задачей

$$\max_{u \in \mathbb{R}^m} \left\{ b^\top u - \frac{\beta}{2} \|(A^\top u - c)_+\|^2 \right\}, \tag{54}$$

т.е. приходим к методу внешнего квадратичного штрафа, примененному к задаче (D). В этом случае из теоремы 1 следует, что вектор $u(\beta)$, полученный в результате максимизации дифференцируемой внешней штрафной функции в задаче (54), определяет по формуле

$$\tilde{x}_* = \beta(A^\top u(\beta) - c)_+ \tag{55}$$

нормальное решение задачи (P) при $\beta > \beta_*$. Из хорошо известных свойств метода внешнего квадратичного штрафа следует, что $u(\beta) = p(\beta)/\beta$ стремится к u_* асимптотически при $\beta \to +\infty$. Задача (14) была введена в работах [1, 2]. Так как задача (14) эквивалентна (54), то (14) может рассматриваться как новый вариант внешней штрафной функции, примененной к двойственной задаче (D).

Таким образом, приведенные в (24) и в (25) выражения для β_* дают оценки коэффициента штрафа для классического метода внешнего квадратичного штрафа, примененного к задаче (D), т.е. к задаче ЛП с ограничениями типа неравенств. Если $\beta_* \leq 0$, то при любом положительном β, и если $\beta_* > 0$, то при любом $\beta \geq \beta_*$ с помощью решения $u(\beta)$ задачи (54) получаем нормальное решение прямой задачи (P).

Задача (54) является взаимно двойственной к следующей задаче регуляризации ЛП (см., например, [3, 4, 5]):

$$\min_{x \in X} \left\{ c^\top x + \frac{1}{2\beta} \|x\|^2 \right\}.$$

Если $\beta_* > 0$, то положим $\varepsilon_* = 1/\beta_*$, если $\beta_* \leq 0$, то ε_* можно полагать любым положительным числом, где β_* определяется согласно теореме 1. Итак, приходим к оценке параметра регуляризации ε в классической задаче регуляризации по Тихонову задачи ЛП

$$\min_{x \in X} \left\{ c^\top x + \frac{\varepsilon}{2} \|x\|^2 \right\}. \tag{56}$$

При $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_*$ решение задачи (56) и нормальное решение задачи (P) совпадают.

Совершенно аналогично для задачи (16) можно получить взаимно двойственную задачу квадратичного программирования, которая имеет вид

$$\min_{u \in U} \left\{ -\alpha b^\top u + \frac{1}{2} \|u\|^2 \right\}, \qquad U = \{u \in \mathbb{R}^m : A^\top u \leq c\}. \tag{57}$$

Эту задачу можно рассматривать как возмущенную, или регуляризованную двойственную задачу (D). Решение $u(\alpha)$ задачи (57) связано с решением $y(\alpha)$ задачи (16) следующим образом:

$$u(\alpha) = \alpha b - Ay(\alpha).$$

Согласно теореме 2 при $\alpha \geq \alpha_*$ имеем $u(\alpha) = \widehat{u}_*$, т.е. решение регуляризованной задачи (57) является нормальным решением $\widehat{u}_*$ двойственной задачи (D).

Отметим, что согласно формуле (43) значение α_* может быть в том числе и отрицательным. Если $\alpha_* \leq 0$ и положить $\alpha = 0$, то регуляризованная задача (57) превращается в задачу нахождения проекции начала координат на допустимое множество U двойственной задачи (D). Т.е. вектор $\widehat{u}_*$ одновременно является нормальным вектором допустимого множества U и множества решений U_* двойственной задачи (D). Регуляризованная задача (57) отличается от традиционно рассматриваемой регуляризованной задачи

$$\min_{u\in U}\left\{-b^\top u+\frac{1}{2\alpha}\|u\|^2\right\},\qquad U=\{u\in\mathbb{R}^m: c-A^\top u\geq 0_n\}$$

тем, что в последней коэффициент регуляризации α всегда положителен.

Безусловная максимизация в (14) может выполняться любым методом, например, методом сопряженного градиента. Но, как показал О. Мангасарьян, для безусловной оптимизации кусочно квадратичной функции особенно эффективен обобщенный метод Ньютона [6, 7]. Приведем краткое описание этого метода и результаты численного эксперимента.

Максимизируемая функция $S^1(p,\beta)$ в задаче (14) является вогнутой, кусочно-квадратичной и дифференцируемой. Для этой функции обычная матрица Гессе не существует. Действительно, градиент

$$S^1_p(p,\beta)=b-A(A^\top p-\beta c)_+$$

функции $S^1(p,\beta)$ не дифференцируем. Но для этой функции можно определить обобщенную матрицу Гессе, которая является $m\times m$ симметричной отрицательно полуопределенной матрицей следующего вида:

$$\partial^2_p S^1(p,\beta)=-AD^\sharp(z)A^\top,$$

где через $D^\sharp(z)$ обозначена $n\times n$ диагональная матрица с i-м диагональным элементом z^i, равным 1, если $(A^\top p-\beta c)^i>0$, и равным 0, если $(A^\top p-\beta c)^i\leq 0$, $i=1,\dots,n$. Так как обобщенная матрица Гессе может быть вырожденной, используется следующее модифицированное ньютоновское направление:

$$-[\partial^2_p S^1(p,\beta)-\delta I_m]^{-1}S^1_p(p,\beta),$$

где δ есть малая положительная величина (обычно при расчетах полагалось $\delta=10^{-4}$) и I_m — единичная матрица порядка m. В этом случае модифицированный метод Ньютона имеет вид

$$p_{s+1}=p_s-[\partial^2_p S^1(p_s,\beta)-\delta I_m]^{-1}S^1_p(p_s,\beta). \tag{58}$$

Критерий окончания его работы полагался следующим:

$$\|p_{s+1}-p_s\|\leq tol.$$

О. Мангасарьян исследовал сходимость обобщенного метода Ньютона для безусловной минимизации подобной выпуклой кусочно-квадратичной функции с выбором шага по правилу Армихо. Доказательство конечной глобальной сходимости обобщенного метода Ньютона можно найти в [2, 6, 7].

Метод нахождения нормального решения прямой задачи с использованием обобщенного метода Ньютона реализован в системе MATLAB 6.5. Численные эксперименты на компьютере P-IV 3 ГГц с оперативной памятью 1Гб со случайно сгенерированными задачами ЛП показали высокую эффективность метода при решении задач ЛП с большим числом неотрицательных переменных (несколько десятков миллионов) и средним числом ограничений-равенств (несколько тысяч) [8]. Время решения таких задач составляло от нескольких десятков секунд до полутора часов. Эти результаты объясняются тем, что основная вычислительная трудность предлагаемого метода приходится на решение вспомогательной задачи безусловной максимизации, размерность которой определяется количеством ограничений типа равенств, число которых существенно меньше, чем число переменных в исходной задаче ЛП.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г.* Отыскание нормальных решений в задачах линейного программирования // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. № 12. С. 1766–1786.

2. *Kanzow C., Qi H., Qi L.* On the Minimum Norm Solution of Linear Programs // Journal of Optimization Theory and Applications. 2003. Vol. 116. P. 333–345.

3. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.

4. *Еремин И.И.* Теория линейной оптимизации. Екатеринбург: УрО РАН, 1998.

5. *Васильев Ф.П., Иваницкий А.Ю.* Линейное программирование. М.: Факториал, 2003.

6. *Mangasarian O.L.* A Finite Newton Method for Classification // Optimizat. Meth. and Software. 2002. V. 17. P. 913–930.

7. *Mangasarian O.L.* A Newton Method for Linear Programming // Journal of Optimization Theory and Applications. 2004. V. 121. P. 1–18.

8. *Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г., Моллаверди Н.* Применение метода Ньютона к решению задач линейного программирования большой размерности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44. № 9. С. 1564–1573.