ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2006, том 46, № 11, с. 1987–2000

УДК 519.626

НОВЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И НЕКОТОРЫЕ ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ ТЕОРИИ p-РЕГУЛЯРНОСТИ[1)]

© 2006 г. О.А. Брежнева* Ю.Г. Евтушенко**, А.А. Третьяков**,***

(* Dept. of Math. and Statist., 123 Bachelor Hall, Miami Univ., Oxford, Ohio, 45056 USA;
** 119991 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ РАН;
*** System Res. Inst., Polish Acad. Sie, Newelska 6, 01-447 Warsaw,
and University of Podlasie, 08-110 Siedlce, Poland)

e-mail: brezhnoa@muohio.edu; evt@ccas.ru

Поступила в редакцию 31.03.2006 г.
Переработанный вариант 06.06.2006 г.

Теория p-регулярности применяется к задачам оптимизации и к вырожденным обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ). В первом случае на основе 2-фактор-преобразования дается обоснование специального варианта метода модифицированных функций Лагранжа, введенного Ю.Г. Евтушенко для решения задач условной оптимизации с ограничениями типа неравенств. Во втором вводится теорема о неявной функции в вырожденном случае и на ее основе показывается существование решения краевой задачи для нелинейного дифференциального уравнения в случае резонанса. Предлагаются новые численные методы, включая p-фактор-метод решения ОДУ с малым параметром. Библ. 13.

Ключевые слова: теория p-регулярности отображений, метод модифицированных функций Лагранжа, задачи оптимизации, вырожденные ОДУ, теорема о неявной функции в вырожденном случае.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1]–[3] описан ряд приложений теории p-регулярности в различных областях математики. В нашей статье рассматриваются новые приложения развиваемой теории, а именно: в первой части статьи теория p-регулярности применяется для обоснования специального варианта метода модифицированных функций Лагранжа (МФЛ), предложенного Ю.Г. Евтушенко в [4] для решения задач условной оптимизации с ограничениями типа неравенств в вырожденном случае. Во второй части теория p-регулярности используется для анализа существования решения вырожденной нелинейной краевой задачи для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения. Кроме того, предлагается метод решения вырожденных ОДУ, который представляет собой модификацию метода малого параметра.

[1)]Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке Программы поддержки ведущих научных школ (код проекта НШ-2240.2006.1), Программы фундаментальных исследований РАН (проект 1.11) и проекта Президиума РАН (код проекта 14-2, 2006).

2. p-ФАКТОР-ОПЕРАТОР И p-РЕГУЛЯРНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Рассмотрим отображение $F : X \to Z$, где $F \in C^{p+1}(X, Z)$, X и Z — банаховы пространства. Через x^* обозначим решение уравнения

$$F(x) = 0. \tag{1}$$

Предположим, что

$$\operatorname{Im} F'(x^*) \neq Z,$$

т. е. отображение F вырождено в точке x^*.

В данной статье используется p-фактор-оператор как аппаратное средство для получения различного рода результатов в вырожденном случае. Не ограничивая общности, считаем, что пространство Z разложимо в прямую сумму замкнутых подпространств Z_i, $i = 1, 2, \dots, p$:

$$Z = Z_1 \oplus \ldots \oplus Z_p,$$

где $Z_1 = \operatorname{cl}(\operatorname{Im} F'(x^*))$, $Z_i = \operatorname{cl}(\operatorname{span} \operatorname{Im} P_{W_i} F^{(i)}(x^*)[\cdot]^i)$, $i = 2, 3, \dots, p-1$, $Z_p = W_p$, W_i — замкнутое дополнение подпространства $(Z_1 \oplus \ldots \oplus Z_{i-1})$ до пространства Z, $i = 2, 3, \dots, p$, и $P_{W_i} : Z \to W_i$ — оператор проектирования на W_i вдоль $(Z_1 \oplus \ldots \oplus Z_{i-1})$. Следуя [5], определим отображения

$$f_i(x) : X \to Z_i, \qquad f_i(x) = P_{Z_i} F(x), \qquad i = 1, 2, \dots, p,$$

где $P_{Z_i} : Z \to Z_i$ — оператор проектирования на Z_i вдоль $(Z_1 \oplus \ldots \oplus Z_{i-1} \oplus Z_{i+1} \oplus \ldots \oplus Z_p)$, $i = 1, 2, \dots, p$.

Определение 1. *Линейный оператор* $\Psi_p(h) \in \mathcal{L}(X, Z_1 \oplus \ldots \oplus Z_p)$, $h \in X$, $h \neq 0$,

$$\Psi_p(h) = f_1'(x^*) + f_2''(x^*)[h] + \ldots + \frac{1}{(p-1)!} f_p^{(p)}(x^*)[h]^{p-1} \tag{2}$$

называется p-**фактор-оператором отображения** $F(x)$ *на элементе* h *в точке* x^*.

Определение 2. *Отображение* $F(x)$ *называется* p-**регулярным в точке** x^* **на элементе** h, *если*

$$\operatorname{Im} \Psi_p(h) = Z,$$

или $\|\{\Psi_p(h)\}^{-1}\| < \infty$. *Здесь*

$$\|\{\Psi_p(h)\}^{-1}\| = \sup_{\|z\|=1} \inf\{\|y\| \, |\Psi_p(h)[y]| = z\}.$$

Определение 3. *Отображение* $F(x)$ *называется* p-**регулярным в точке** x^*, *если* $F(x)$ *p-регулярно в точке* x^* *на элементах*

$$h \in \bigcap_{k=1}^{p} \operatorname{Ker}^k f_k^{(k)}(x^*),$$

где k-ядро отображения $f_k^{(k)}(x^*)$ *определяется следующим образом:*

$$\operatorname{Ker}^k f^{(k)}(x^*) = \left\{ h \in X \mid f_k^{(k)}(x^*)[h]^k = 0 \right\}.$$

2.1. 2-фактор-методы решения вырожденных уравнений

Следуя [6], рассмотрим методы решения вырожденных уравнений. Пусть в уравнении (1) отображение F действует из пространства $\mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbb{R}^n$. Предполагаем, что в решении x^* уравнения (1) матрица Якоби $F'(x^*)$ вырождена, т. е. $\operatorname{Im} F'(x^*) \neq \mathbb{R}^n$. Рассмотрим два варианта p-фактор-метода для решения вырожденной системы (1) при $p = 2$.

Первый вариант 2-фактор-метода. В силу того, что $\ker F'(x^*) \neq \{0\}$, существует вектор $h \neq 0$ такой, что $F'(x^*)h = 0$. Поэтому точка x^* является также решением системы

$$F(x) + F'(x)h = 0_n \tag{3}$$

и схема 2-фактор-метода имеет вид

$$x_{k+1} = x_k - \{F'(x_k) + F''(x_k)h\}^{-1}[F(x_k) + F'(x_k)h], \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{4}$$

Отметим, что в данной статье, учитывая специфику задачи, вектор h строится без использования информации о решении задачи x^*. Отметим также, что схема 2-фактор-метода (4) совпадает с методом Ньютона, примененным не к исходному уравнению (1), а к модифицированной системе (3).

Второй вариант 2-фактор-метода. В силу того, что $\operatorname{Im} F'(x^*) \neq \mathbb{R}^n$, оператор проектирования P на $\operatorname{Im} F'(x^*)$ ненулевой, т. е. $P \neq 0$. Поэтому точка x^* является также решением системы

$$F(x) + PF'(x)\xi = 0_n$$

для любого $\xi \neq 0$. При этом вторая схема 2-фактор-метода имеет вид

$$x_{k+1} = x_k - \{F'(x_k) + PF''(x_k)\xi\}^{-1}[F(x_k) + PF'(x_k)\xi], \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{5}$$

Обоснованием сходимости 2-фактор-методов (4) и (5) являются следующие теоремы, доказательства которых следуют из свойств метода Ньютона.

Теорема 1. *Пусть $F \in C^3(\mathbb{R}^n)$ и для $h \in \ker F'(x^*)$, $h \neq 0_n$, существует $[F'(x^*) + F''(x^*)h]^{-1}$. Тогда для 2-фактор-метода* (4) *имеет место оценка скорости сходимости*

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq \alpha_1 \|x_k - x^*\|^2, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

где $x_0 \in U_\varepsilon(x^*)$, $\varepsilon > 0$ достаточно малое, $\alpha_1 > 0$ — независимая константа.

Теорема 2. *Пусть $F \in C^3(\mathbb{R}^n)$ и для некоторого элемента $\xi \neq 0_n$ существует $[F'(x^*) + PF''(x^*)\xi]^{-1}$. Тогда для 2-фактор-метода* (5) *имеет место оценка скорости сходимости*

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq \alpha_2 \|x_k - x^*\|^2, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

где $x_0 \in U_\varepsilon(x^*)$, $\varepsilon > 0$ достаточно малое, $\alpha_2 > 0$ — независимая константа.

Замечание. В случае существования $h \in \operatorname{Ker} F'(x^*)$ такого, что $\operatorname{Im} F''(x^*)h = \mathbb{R}^n$, схема 2-фактор-метода может быть следующей:

$$x_{k+1} = x_k - [F''(x_k)h]^{-1} F'(x_k)h. \tag{6}$$

При этом для квадратичных отображений $F(x) = Q[x]^2 + Ax + B$, где $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — — квадратичная форма, $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — матрица, B — вектор размерности n, будет верна точная формула для решения x^*:

$$x^* = -\frac{1}{2}[Qh]^{-1}(Ah), \tag{7}$$

где h удовлетворяет условию $(2Qx^* + A)h = 0_n$. Отметим, что метод (6) сходится для квадратичных отображений за один шаг.

2.2. Теоремы о неявной функции в вырожденном случае

Рассмотрим вопрос о существовании решения $y = y(x)$ уравнения

$$F(x, y) = 0,$$

где $F \in C^{p+1}(X \times Y, Z)$, X, Y и Z — банаховы пространства, $F(x^*, y^*) = 0$ и

$$\operatorname{Im} F'_y(x^*, y^*) \neq Z.$$

Определим p-фактор-оператор для отображения $F(x, y)$ аналогично (2), заменив всюду $F(x)$ на $F(x, y)$, производные — на производные по переменной y, т.е. $F^{(k)}(x^*)$ на $F_y^{(k)}(x^*, y^*)$, а $f_i(x)$ — на $f_i(x, y)$.

Введем смешанный оператор p-го порядка $\Psi_p : Y \to Z$:

$$\Psi_p = \left(f'_{1y}(x^*, y^*), \frac{1}{2} f''_{2y}(x^*, y^*), \ldots, \frac{1}{p!} f^{(p)}_{py}(x^*, y^*) \right),$$

причем действие Ψ_p на элемент y определяется по формуле

$$\Psi_p[y]^p = f'_{1y}(x^*, y^*)[y] + \ldots + \frac{1}{p!} f^{(p)}_{py}(x^*, y^*)[y]^p,$$

и обратный (многозначный) оператор Ψ_p^{-1}, определяемый формулой

$$\Psi_p^{-1}(z) = \left\{ h \in Y \mid f'_{1y}(x^*, y^*)[h] + \ldots + \frac{1}{p!} f^{(p)}_{py}(x^*, y^*)[h]^p = z \right\}.$$

Следуя [3], приведем следующий результат.

Теорема 3 (о неявной функции в вырожденном случае). *Пусть X, Y и Z — банаховы пространства, $U(x^*)$, $U(y^*)$ — некоторые достаточно малые окрестности точек x^* и y^*, $F \in C^{p+1}(X \times Y)$ и $F(x^*, y^*) = 0$. Предположим, что выполнены следующие условия:*

1) **условия вырожденности***:*

$$f^{(r)}_{i\,\underbrace{x\ldots x}_{q}\,\underbrace{y\ldots y}_{r-q}}(x^*, y^*) = 0, \quad r = 1, 2, \ldots, i-1, \;\; q = 0, 1, \ldots, r-1, \;\; i = 1, 2, \ldots, p,$$

$$f^{(i)}_{i\,\underbrace{x\ldots x}_{q}\,\underbrace{y\ldots y}_{i-q}}(x^*, y^*) = 0, \quad q = 1, 2, \ldots, i-1, \;\; i = 1, 2, \ldots, p;$$

2) **условие p-фактор-аппроксимации**:

$$\left\| f_i(x, y^* + y_1) - f_i(x, y^* + y_2) - \frac{1}{i!} f_i^{(i)}(x^*, y^*)[y_1]^i + \frac{1}{i!} f_i^{(i)}(x^*, y^*)[y_2]^i \right\| \le$$
$$\le \quad \varepsilon \left(\|y_1\|^{i-1} + \|y_2\|^{i-1} \right) \|y_1 - y_2\|, \quad i = 1, 2, \ldots, p,$$

для всех $x \in U(x^*)$, $y_1, y_2 \in (U(y^*) - y^*)$ и $\varepsilon > 0$ достаточно малого;

3) **условие Банаха**: *для $x \in U(x^*)$ существует h такое, что*

$$\Psi_p[h]^p = -F(x, y^*), \quad \|h\| \le c_1 \sum_{r=1}^{p} \|f_r(x, y^*)\|_{Z_r}^{1/r},$$

где c_1 — независимая константа;

4) **условие p-регулярности по переменной** y: *для $h = h(x)$, определенных в условии Банаха, существует независимая от x константа c_2 такая, что*

$$\left\| \{\Psi_p(h/\|h\|)\}^{-1} \right\| \le c_2.$$

Тогда для любого $\delta > 0$ существуют $\sigma > 0$, $k > 0$ и отображение $\varphi : U(x^*, \sigma) \to$ $\to U(y^*, \delta)$ такие, что выполнены соотношения

$$\varphi(x^*) = y^*,$$
$$F(x, \varphi(x)) = 0,$$
$$\|\varphi(x) - y^*\|_Y \le k \sum_{r=1}^{p} \|f_r(x, y^*)\|_{Z_r}^{1/r} \quad \forall x \in U(x^*, \sigma).$$

Доказательство этой теоремы аналогично ее доказательству для случая $p = 2$ (см., например, [3]), но с использованием общей конструкции из [5].

Ниже потребуется еще одна модификация теоремы о неявной функции.

Теорема 4. *Пусть $F(x, y) \in C^{p+1}(X \times Y)$, $F : X \times Y \to Z$, X, Y и Z — банаховы пространства, $F(x^*, y^*) = 0$ и выполнено условие p-регулярности по переменной y на элементе*

$$h \in \bigcap_{k=1}^{p} \operatorname{Ker}^k f_k^{(k)}(x^*, y^*), \qquad h = (x, 0),$$

т. е.

$$\{f_1'(x^*, y^*) + f_2''(x^*, y^*)[h] + \ldots + f_p^{(p)}(x^*, y^*)[h]^{p-1}\}(\{0\} \times Y) = Z.$$

Тогда для $x \in U(x^*)$ существует $y = y(x)$ такое, что

$$F(x, y(x)) = 0 \qquad и \qquad \|y(x) - y^*\| \le c\|x - x^*\|.$$

Здесь $U(x^*)$ — достаточно малая окрестность точки x^*, а $c > 0$ — независимая константа.

Доказательство аналогично доказательству теоремы о неявной функции из [7], но с использованием сжимающего отображения

$$\Phi(y) = y - \left\{ f_1'(x^*, y^*) + \ldots + \frac{1}{(p-1)!} f_p^{(p)}(x^*, y^*)[h]^{p-1} \right\}_Y^{-1} F(x, y^* + y).$$

3. 2-ФАКТОР-МЕТОД МОДИФИЦИРОВАННЫХ ФУНКЦИЙ ЛАГРАНЖА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Рассмотрим задачу нелинейного программирования о нахождении

$$\min_{x\in X}\varphi(x) \tag{8}$$

с допустимым множеством

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \le 0_m\},$$

0_m — нулевой вектор из $\mathbb{R}^m$, $(g(x))^\top = (g_1(x), \dots, g_m(x))$ — вектор-функция (строка). Относительно задачи (8) считаем, что множество ее решений $X^* \in \mathbb{R}^n$ непусто.

Определим функцию Лагранжа:

$$L(x, v) = \varphi(x) + \sum_{i=1}^{m} v_i g_i(x).$$

Всюду ниже предполагается выполненным условие регулярности ограничений (УРО), иными словами: градиенты активных ограничений линейно независимы. Это условие гарантирует, что каждому $x^* \in X^*$ соответствует единственный вектор множителей Лагранжа $v^* \ge 0$ такой, что выполнено соотношение

$$\nabla L(x^*, v^*) = \nabla\varphi(x^*) + \sum_{i=1}^{m} v_i^* \nabla g_i(x^*) = 0_n$$

и $v_i^* = 0$, если $g_i(x^*) > 0$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Рассмотрим предложенный в [4] нестандартный вариант метода модифицированной функции Лагранжа (МФЛ), в котором функция Лагранжа имеет вид

$$L_E(x, \lambda) = \varphi(x) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 g_i(x),$$

где $\lambda \in \mathbb{R}^m$. Объединим векторы x и λ одним символом $w \in \mathbb{R}^{n+m}$. Аналогично, пару $[x^*, \lambda^*]$ будем обозначать через w^*, поэтому $L_E(x, \lambda) = L_E(w)$.

Согласно теореме Куна–Таккера, вектор w^* удовлетворяет системе уравнений

$$G(w) = \begin{bmatrix} \nabla\varphi(x) + \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i^2 \nabla g_i(x) \\ D(\lambda) g(x) \end{bmatrix} = 0_{n+m}. \tag{9}$$

Здесь $D(\lambda)$ — диагональная матрица, размерность которой определяется размерностью вектора λ, у нее i-м диагональным элементом является λ_i. Отметим, что система (9) может иметь бесконечное множество решений в окрестности точки w^*.

Пусть $g'(x)$ — матрица Якоби отображения $g(x)$. В свою очередь, матрица Якоби для системы (9) имеет вид

$$G'(w) = \left[\begin{array}{c|c} \nabla^2\varphi(x) + \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i^2 \nabla^2 g_i(x) & [g'(x)]^\top D(\lambda) \\ \hline D(\lambda) g'(x) & D(g(x)) \end{array}\right]. \tag{10}$$

Для пары $[x^*, \lambda^*]$ определим множество активных ограничений $I(x^*)$, множество слабоактивных ограничений $I_0(x^*)$ и множество строго активных ограничений $I_+(x^*)$ с помощью следующих соотношений:

$$
\begin{aligned}
I(x^*) &= \{j = 1, 2, \ldots, m \mid g_j(x^*) = 0\}, \\
I_0(x^*) &= \{j = 1, 2, \ldots, m \mid \lambda_j^* = 0,\ \ g_j(x^*) = 0\}, \\
I_+(x^*) &= \{j = 1, 2, \ldots, m \mid \lambda_j^* \neq 0,\ \ g_j(x^*) = 0\}.
\end{aligned} \tag{11}
$$

При обосновании и анализе метода МФЛ обычно помимо УРО вводятся следующие условия:

1) условие строгой дополняющей нежесткости (УСДН), т.е.

$$v_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

и если $g_i(x^*) = 0$, то $v_i^* \neq 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots, m$;

2) достаточное условие оптимальности 2-го порядка: существует число $\nu > 0$ такое, что

$$z^\top \nabla_{xx}^2 L(x^*, v^*) z \geq \nu \|z\|^2 \tag{12}$$

для всех $z \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условиям $[\nabla g_j(x^*)]^\top z \leq 0$ и $j \in I(x^*)$.

Предположим, что в точке x^* не выполнено УСДН. Тогда для некоторого индекса i выполнены оба равенства $\lambda_i^* = 0$ и $g_i(x^*) = 0$, поэтому множество $I_0(x^*)$ непусто. В этом случае матрица (10) становится вырожденной в точке w^* и, следовательно, методы типа Ньютона для решения системы уравнений (9) неприемлемы. Покажем, что в этой ситуации эффективным будет применение аппарата p-фактор-операторов.

Рассмотрим систему нелинейных уравнений (9). Пусть отображение G нерегулярно в точке w^* или, иными словами, матрица Якоби (10) вырождена и $\operatorname{rank} G'(w^*) = r < n + m$. В этом случае w^* называется **вырожденным решением системы** (9). Условие вырожденности матрицы $G'(w^*)$ записывается в виде $\operatorname{Im} G'(w^*) \neq \mathbb{R}^{n+m}$. Это означает, что существует по крайней мере один вектор h ($\|h\| \neq 0$) такой, что $G'(w^*)h = 0_{n+m}$. Очевидно, что решение системы (9) будет и решением модифицированной системы

$$\Psi(w) = G(w) + G'(w)h = 0_{n+m}; \tag{13}$$

более того, если матрица $G'(w^*)$ вырождена, то, напротив, матрица $\Psi'(w^*) = G'(w^*) + G''(w^*)h$ не вырождена и решение w^* системы (13) локально единственно. Здесь h — некоторый вектор из $\operatorname{Ker} G'(w^*)$, один из примеров построения которого приводится ниже. Свойство невырожденности матрицы $\Psi'(w^*)$ положено в основу конструкции 2-фактор-метода решения вырожденных систем нелинейных уравнений.

Для отображения G введем 2-фактор-оператор

$$G'(w) + G''(w)h,$$

где вектор $h \in \operatorname{Ker} G'(w^*)$ определен так, что

$$\operatorname{rank} [G'(w^*) + G''(w^*)h] = n + m.$$

Конкретный вид h формируется с учетом специфики системы (9).

Рассмотрим первый вариант 2-фактор-метода (4) для решения системы (9):

$$w_{k+1} = w_k - [G'(w_k) + G''(w_k)h]^{-1} [G(w_k) + G'(w_k)h], \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{14}$$

Ниже покажем, что при выполнении достаточных условий оптимальности для задачи (8) отображение G, определенное в (9), является 2-регулярным в решении w^* на некотором $h \in \operatorname{Ker} G'(w^*)$. Следовательно, для решения системы $G(w) = 0_{n+m}$ можно применить 2-фактор-метод (4) и, согласно теореме 1, полученный метод будет обладать квадратичной скоростью сходимости, которой не удается достичь при применении метода Ньютона к решению системы (11).

Предположим, что УСДН в точке x^* не выполнено и без ограничения общности можно считать, что множество $I_0(x^*)$ состоит из первых s индексов, т. е. $I_0(x^*) = \{1, 2, \ldots, s\}$. Для численного определения множества $I_0(x^*)$ может быть использована так называемая процедура идентификации нулевых элементов, впервые предложенная в [8].

Отметим, что метод Ньютона вместе с дифференцируемым штрафом использовался для решения задач линейного программирования с ограничениями типа неравенства в работах [9, 10], где показано, что при коэффициентах штрафа, бóльших некоторого порогового значения, из результатов минимизации штрафной функции по простым формулам находится точное решение задачи.

3.1. Процедура идентификации нулевых элементов (выделение активных ограничений)

Идею выделения нулевых элементов можно проиллюстрировать на примере отображения $F(z) : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^\ell$, $F \in C^2(\mathbb{R}^\ell)$, $F(z) = [f_1(z), \ldots, f_\ell(z)]^\top$. Предположим, что для заданного отображения F существует такая функция $\eta(z)$, что $\eta(z^*) = 0$ и

$$c_1\|z - z^*\|^p \leq \eta(z) \leq c_2\|z - z^*\|, \quad p \in N,$$

для всех точек $z \in U_\varepsilon(z^*)$, где $c_1, c_2 > 0$ — независимые константы; тогда будет верна

Теорема 5 (альтернатива). *Пусть $F \in C^2(\mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^\ell)$ и F является p-регулярной в точке z^*. Тогда существует $\varepsilon > 0$ достаточно малое и такое, что для всех $1 \leq i \leq \ell$ и любой точки $z \in U_\varepsilon(z^*)$ будет верно одно из двух утверждений:*

1) *либо $|f_i(z)| > \eta(z)^{1/(p+1)}$, и тогда $f_i(z^*) \neq 0$ (ненулевой элемент);*

2) *либо $|f_i(z)| < \eta(z)^{1/(p+1)}$, и тогда $f_i(z^*) = 0$ (нулевой элемент).*

Доказательство аналогично доказательству теоремы-альтернативы в [1] и поэтому не приводится.

Таким образом, для выделения ограничений, активных в точке $x^* \in X$, надо построить функцию $\eta(\cdot)$, обладающую указанными в теореме-альтернативе свойствами. Покажем, как это делается для задачи (8). Рассмотрим функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = \varphi(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x).$$

При выполнении УРО и достаточных условий оптимальности (12) будет справедливо соотношение

$$c_1\|x - x^*\| \leq \|\mathcal{L}'_x(x, \lambda)\| + \sum_{i=1}^{m} |\min\{\lambda_i, -g_i(x)\}| \leq c_2(\|x - x^*\| + \|\lambda - \lambda^*\|)$$

для $x \in U_\varepsilon(x^*)$, где $\varepsilon > 0$ достаточно малое (см., например, [11]). Следовательно, функция $\eta(x, \lambda)$ может быть определена в виде

$$\eta(x, \lambda) = \|\mathcal{L}'_x(x, \lambda)\| + \sum_{i=1}^{m} |\min\{\lambda_i, -g_i(x)\}|.$$

Далее, осуществляя проверку

$$|g_i(x)| \le \eta(x, \lambda)^{1/2}, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

выделяем множество индексов активных ограничений в точке x^*. Для определенности, $I(x^*) = \{1, 2, \ldots, p\}$. В свою очередь, если обозначить

$$L_A(x, \lambda) = \varphi(x) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i(x),$$

то для функции

$$\tilde{\eta}(x, \lambda) = \|(L_A)'_x(x, \lambda)\| + \sum_{i=1}^{p} |g_i(x)|$$

будет иметь место оценка

$$c_1\|(x, \lambda) - (x^*, \lambda^*)\| \le \tilde{\eta}(x, \lambda) \le c_2\|(x, \lambda) - (x^*, \lambda^*)\|,$$

если $(x, \lambda) \in U_\varepsilon(x^*, \lambda^*)$, где $\varepsilon > 0$ достаточно малое. Определим множество индексов $I_0(x^*) = \{1, 2, \ldots, s\}$ проверкой выполнения неравенства

$$|\lambda_i| \le \tilde{\eta}(x, \lambda)^{1/2}, \quad i \in I(x^*).$$

Вернемся к обоснованию 2-фактор-метода (14). Так как $\lambda_j = 0$ и $g_j(x^*) = 0$ для всех $j \in I_0(x^*) = \{1, 2, \ldots, s\}$, то строки матрицы $G'(w^*)$ с $(n+1)$-й по $(n+s)$-ю состоят из одних нулей. Определим вектор $h \in \mathbb{R}^{n+m}$:

$$h^\top = (0_n^\top, 1_s^\top, 0_{p-s}^\top, 0_{m-p}^\top), \tag{15}$$

и рассмотрим отображение

$$\Phi(w) = G(w) + G'(w)h, \tag{16}$$

где вектор h определяется формулой (15).

Для дальнейшего рассмотрения потребуется следующая вспомогательная

Лемма 1. *Пусть V-матрица $n \times n$ и Q-матрица $n \times p$ таковы, что столбцы матрицы Q линейно независимы и*

$$\langle Vx, x\rangle > 0 \ \ \forall\ x \in \{\operatorname{Ker} Q^\top\}\backslash\{0\}.$$

Предположим также, что D_N — диагональная матрица полного ранга размера $\ell \times \ell$. Тогда матрица

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} V & Q & 0 \\ Q^\top & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_N \end{pmatrix}$$

не вырождена.

Лемма 2. *Пусть $\varphi, g_i \in C^3(\mathbb{R}^n)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, выполнены УРО, достаточные условия оптимальности* (12) *и отображение Φ задается формулой* (16). *Тогда 2-фактор-оператор $\Phi'(w) = G'(w) + G''(w)h$ не вырожден в точке $w^* = [x^*, \lambda^*]$.*

Доказательство вытекает из леммы 1, если в ней положить $V = \nabla^2_{xx} L_E(x^*, \lambda^*)$, $D_N = D(g_N(x^*))$, где $g_N(x) = [g_{p+1}(x), \ldots, g_m(x)]^\top$, и

$$Q = \left[\nabla g_1(x^*), \ldots, \nabla g_s(x^*), \lambda^*_{s+1} \nabla g_{s+1}(x^*), \ldots, \lambda^*_p \nabla g_p(x^*)\right].$$

Тогда $\Phi'(w^*) = \bar{A}$.

Из леммы 2 следует, что для решения системы (9) можно применить 2-фактор-метод (14), а именно: имеет место следующая

Теорема 6. *Предположим, что точка x^* — решение задачи* (8). *Пусть $\varphi, g_i \in \in C^3(\mathbb{R}^n)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, выполнены УРО и достаточные условия оптимальности* (12). *Тогда существует достаточно малая окрестность $U_\varepsilon(w^*)$ точки Куна–Таккера $w^* = [x^*, \lambda^*]$ такая, что для метода* (14)*имеет место оценка*

$$\|w_{k+1} - w^*\| \leq \beta \|w_k - w^*\|^2,$$

где $w^0 \in U_\varepsilon(w^*)$ и $\beta > 0$ — независимая константа.

Проиллюстрируем применение описанного метода на следующем примере.

Пример. Рассмотрим задачу

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} x_1^2 + x_2^2 + 4x_1 x_2 \tag{17}$$

при ограничениях

$$-x_1 \leq 0, \quad -x_2 \leq 0.$$

Легко проверить, что точка $x^* = (0, 0)^\top$ — решение задачи (17) с соответствующим множителем Лагранжа $v^* = (0, 0)^\top$. В этом примере $I_0(x^*) = \{1, 2\}$ и модифицированная функция Лагранжа имеет вид

$$L_E(x, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1 x_2 - \frac{1}{2}\lambda_1^2 x_1 - \frac{1}{2}\lambda_2^2 x_2.$$

Пусть $h = (0, 0, 1, 1)^\top$; тогда система (9) запишется следующим образом:

$$G(w) = \begin{bmatrix} 2x_1 + 4x_2 - \lambda_1^2/2 \\ 2x_2 + 4x_1 - \lambda_2^2/2 \\ -\lambda_1 x_1 \\ -\lambda_2 x_2 \end{bmatrix} = 0_4.$$

Матрица Якоби последней системы имеет вид

$$G'(w) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -\lambda_1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & -\lambda_2 \\ -\lambda_1 & 0 & -x_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & 0 & -x_2 \end{bmatrix}.$$

Эта матрица вырождена в точке $(x_1^*, x_2^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*)^\top = (0,0,0,0)^\top$.

Однако отображение G является 2-регулярным в точке $(0,0,0,0)^\top$ на введенном элементе h, и схема 2-фактор-метода запишется в виде

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -\lambda_1 - 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & -\lambda_2 - 1 \\ -\lambda_1 - 1 & 0 & -x_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 - 1 & 0 & -x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 - x_1 \\ \bar{x}_2 - x_2 \\ \bar{\lambda}_1 - \lambda_1 \\ \bar{\lambda}_2 - \lambda_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2x_1 + 4x_2 - \lambda_1^2/2 - \lambda_1 \\ 2x_2 + 4x_1 - \lambda_2^2/2 - \lambda_2 \\ -\lambda_1 x_1 - x_1 \\ -\lambda_2 x_2 - x_2 \end{bmatrix},$$

где $k = 0, 1, \ldots$ и

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2)^\top &= [(x_1)_k, (x_2)_k, (\lambda_1)_k, (\lambda_2)_k]^\top, \\ (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2)^\top &= [(x_1)_{k+1}, (x_2)_{k+1}, (\lambda_1)_{k+1}, (\lambda_2)_{k+1}]^\top. \end{aligned}$$

В данном примере система (13) имеет неединственное решение, поэтому отсутствует глобальная сходимость указанной версии метода. Однако можно применить упрощенную версию 2-фактор-метода (6), решая систему

$$\Psi(w) = G'(w)h = 0_4, \tag{18}$$

где $h \in \operatorname{Ker} G'(w^*)$. В силу 2-регулярности отображения G на элементе h в точке $w^* = 0_4$ матрица $\Psi'(w^*)$ не вырождена и, следовательно, эта задача имеет единственное решение w^*. Для w^* справедлива точная формула (7), поскольку система (18) линейна относительно w и $w^* = w_0 - [G''(w_0)h]^{-1}[G'(w_0)h]$ для любого $w_0 \in \mathbb{R}^4$ или $w^* = -(1/2)[Qh]^{-1}(Ah)$, где

$$Qh = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad h = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4. p-ФАКТОР-ПОДХОД ДЛЯ РЕШЕНИЯ ВЫРОЖДЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Покажем, как может быть применен аппарат фактор-операторов для анализа и решения вырожденных (ОДУ).

Рассмотрим ОДУ вида

$$\ddot{y}(t) + y(t) + g(y(t)) = x(t) \tag{19}$$

при условии

$$y(0) = y(\pi) = 0, \quad x(0) = x(\pi) = 0. \tag{20}$$

Считаем, что $y(\cdot) \in C^2[0,\pi]$, $x(\cdot) \in C[0,\pi]$ и $g(\cdot) \in C^{p+1}(C^2[0,\pi])$. Кроме того, предполагаем, что

$$g(0) = g'(0) = 0. \tag{21}$$

Исследуем вопрос существования решения уравнения (19). Введем обозначения и определения. Определим отображение

$$F(x, y) = \ddot{y} + y + g(y) - x,$$

где $F : X \times Y \to Z$, $F \in C^{p+1}(X \times Y)$, $X = \{x \in C[0, \pi] \mid x(0) = x(\pi) = 0\}$, $Y = \{y \in C^2[0, \pi] \mid y(0) = y(\pi) = 0\}$, $Z = \{z \in C[0, 1] \mid z(0) = z(\pi) = 0\}$ и $g \in C^{p+1}(Y)$. Тогда уравнение (19) можно переписать в виде

$$F(x, y) = 0.$$

Не ограничивая общности, считаем, что $x^*(t) = 0$ и $y^*(t) = 0$.

При этом оператор $F'_y(0,0) = \ddot{(\cdot)} + (\cdot) + g'(0)$ вырожден в точке $(0,0)$ (именно поэтому уравнение (19) является вырожденным). Действительно, оператор

$$F'_y(0,0)y = \ddot{y} + y$$

не является сюръективным, так как для $z(t) = \sin t$ краевая задача

$$\ddot{y}(t) + y(t) = \sin t, \qquad y(0) = y(\pi) = 0,$$

не имеет решения (см. [12]). Согласно теории Штурма–Лиувилля, краевая задача

$$\ddot{y}(t) + y(t) = x(t), \quad y(0) = y(\pi) = 0,$$

имеет решение только при выполнении условия (см. [13])

$$\int\limits_0^\pi \sin(\tau) x(\tau) d\tau = 0,$$

поэтому вопрос о существовании решения вырожденного уравнения

$$F(x, y) = \ddot{y} + y + g(y) - x = 0, \quad y(0) = y(\pi) = 0,$$

не может быть исследован при помощи классической теоремы о неявной функции. Покажем, что для $F(x, y)$ можно применить теорему 3 при соответствующих предположениях о $g(\cdot)$ и $x(t)$. В нашем случае

$$Z_1 = \operatorname{Im} F'_y(0,0) = \left\{ z(t) \in Z \,\middle|\, \int\limits_0^\pi \varphi(\tau) z(\tau) d\tau = 0 \right\} \neq Z, \quad \varphi(t) = \sin t.$$

Подпространство $W_2 = \operatorname{span}\{\varphi(t)\}$, поэтому в соответствии с [3] проектор P_{W_2} вводится следующим образом:

$$P_{W_2} z = \frac{2}{\pi} \varphi(t) \int\limits_0^\pi \varphi(\tau) z(\tau) d\tau, \quad z \in Z,$$

и

$$\begin{aligned} Z_2 &= \operatorname{span} \left(\operatorname{Im} P_{W_2} F''{}_y(0,0)[\,\cdot\,]^2\right) = \\ &= \operatorname{span} \left(z(t) \mid \exists y \in Y : z(t) = \frac{2}{\pi} \sin t \int\limits_0^\pi \sin(\tau) g''(0) [y(\tau)]^2 d\tau \right). \end{aligned} \tag{22}$$

Остальные конструкции — подпространства $Z_3, \ldots, Z_p$ и отображения $f_2(x,y), \ldots$ $\ldots, f_p(x,y)$ — вводятся аналогично и зависят только от свойств отображения $g(y)$. В соответствии с (21) $g'(0)=0$, а также

$$F''_y(0,0) = g''(0), \ \ldots, \ F^{(p)}_y(0,0) = g^{(p)}(0).$$

Поэтому p-фактор-оператор имеет вид

$$\Psi_p(h) = (\ddot{\cdot}) + (\cdot) + P_{Z_2} g''(0)[h] + \ldots + \frac{1}{(p-1)!} P_{Z_p} g^{(p)}(0)[h]^{p-1}.$$

Вернемся к теореме 3. Напомним, что в нашем рассмотрении $x^*(t)=0$, $y^*(t)=0$. Условие 1) теоремы 3 выполнено в соответствии с построением отображений $f_i(x,y)$ и свойств отображения $g(y)$. Условие 2) (p-фактор-аппроксимация) зависит только от свойств отображения $g(y)$, т. е. если

$$\begin{aligned} & P_{Z_k}\left[\left(g(y_1) - g(y_2) - \frac{1}{k!} g^{(k)}(0)[y_1]^k + \frac{1}{k!} g^{(k)}(0)[y_2]^k\right)\right] \le \\ \le \ \ & \varepsilon\left(\|y_1\|^{k-1} + \|y_2\|^{k-1}\right)\|y_1 - y_2\|, \end{aligned} \tag{23}$$

где $\varepsilon > 0$ достаточно малое, $y_1, y_2 \in U_Y(0)$, то условие 2) выполнено.

Условия 3) и 4) равносильны, соответственно, существованию такого $h(t)$, что выполнены соотношения

$$\begin{aligned} & \ddot{h}(t) + h(t) + \frac{P_{Z_2} g''(0) h^2}{2} + \ldots + \frac{P_{Z_p} g^{(p)}(0)[h]^p}{(p!)} = x(t), \\ & \|h(t)\| \le c_1 \|F(x,0)\|^{1/p}, \ \ x \in U_x(0), \end{aligned} \tag{24}$$

$$\left\| \left\{ (\ddot{\cdot}) + (\cdot) + P_{Z_2} g''(0)[\bar{h}] + \ldots + \frac{P_{Z_p} g^{(p)}(0)[\bar{h}]^{p-1}}{(p-1)!} \right\}^{-1} \right\| \le c_2, \qquad x \in U_x(0), \tag{25}$$

где $\bar{h}(t) = h(t)/\|h(t)\|$, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ — независимые константы. Таким образом, имеет место

Теорема 7. *Пусть для краевой задачи* (19), (20) *существуют такие достаточно малые окрестности $U_x(0)$ и $U_y(0)$, что выполнены условия* (23)–(25). *Тогда для $x(t) \in U_x(0)$ существует решение $y = y(x,t)$, причем*

$$\|y(x,t)\| \le m \|x(t)\|^{1/p},$$

где $m > 0$ — независимая константа.

Для иллюстрации теоремы рассмотрим уравнение

$$\ddot{y}(t) + y(t) + y^2(t) = v \sin t, \quad y(0) = y(\pi) = 0, \tag{26}$$

часто встречающееся в технических приложениях. Здесь $g(y) = y^2$, $x(t) = v \sin t$, $F(x,y) = \ddot{y} + y + y^2 - v\sin t$, $F : X \times Y \to Z$, X, Y и Z были определены выше. Нетрудно проверить, что для отображения $F(x,y)$ выполнены условия теоремы 7 при $v \geq 0$ достаточно малом и $p = 2$. Таким образом, существует решение $y(x)$ уравнения (26) при $v \geq 0$, причем

$$\|y(t)\| \leq m\|v \sin t\|^{1/2} \leq cv^{1/2}.$$

Аналогично можно проиллюстрировать применение теоремы 4 к уравнениям с малым параметром ε вида

$$\varepsilon \dot{y}(t) + g(y, \varepsilon) = 0,$$

где $g(0,0) = g'(0,0) = g''(0,0) = 0$ и $y(0) = y_0$.

Положим $F(\varepsilon, y) = \varepsilon \dot{y}(t) + g(y, \varepsilon)$; здесь роль x будет играть ε. Например, если $g(y, \varepsilon) = y^3 + \varepsilon^3$, то для уравнения $\varepsilon \dot{y}(t) + y^3(t) + \varepsilon^3 = 0$ можно показать, что $h = (\varepsilon, 0)^\top$ и выполнены условия теоремы 4. Поэтому существует решение $y = y(\varepsilon, t)$ такое, что

$$\|y(\varepsilon, t)\| \leq c\varepsilon, \quad y(\varepsilon, 0) = y_0,$$

где $c > 0$ — константа, $t \in U(0)$ — малая окрестность точки 0.

5. ТЕОРИЯ p-РЕГУЛЯРНОСТИ И МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА ПУАНКАРЕ

При решении уравнения

$$\ddot{y}(t) + a^2 y(t) + \mu y^2(t) = \sin t, \quad y(0) = y(\pi) = 0, \tag{27}$$

где $a \neq 0$, $\mu > 0$ — малый параметр, наиболее популярен поиск решения в виде ряда (см. [12])

$$y(t) = y_0(t) + \mu y_1(t) + \mu^2 y_2(t) + \ldots. \tag{28}$$

Подставляя (28) в (27) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, получаем первое уравнение для определения $y_0(t)$:

$$\ddot{y}_0(t) + a^2 y_0(t) = \sin t, \quad y_0(0) = y_0(\pi) = 0, \tag{29}$$

откуда

$$y_0(t) = \frac{c \sin t}{a^2 - 1}.$$

При $a^2 = 1$ эта техника неприменима, так как уравнение (29) не имеет решения. Однако исходное уравнение (27) имеет решение при $a^2 = 1$ и $\mu > 0$ малом.

Заметим, что задача (27) эквивалентна следующей системе:

$$\begin{aligned} &P_1[y''(t) + y(t) + \mu y^2(t)] = P_1(\sin t), \quad y(0) = y(\pi) = 0, \\ &P_2[y''(t) + y(t) + \mu y^2(t)] = P_2(\sin t), \end{aligned} \tag{30}$$

где P_i — проектор на Z_i, $i = 1, 2$.

Ищем решение $y(t)$ в виде

$$y(t) = h(t) + y_0(t) + \mu^{1/2} y_1(t) + \mu y_2(t) + \mu^{3/2} y_3(t) + \ldots, \tag{31}$$

где $y_i(t)$, $i = 0, 1 \ldots$, определяются по формулам

$$y_i(t) = \tilde{y}_i(t) + \hat{y}_i(t), \quad P_1(\hat{y}_i) = 0,$$

а $h(t)$ вычисляется как решение уравнения

$$P_2(\mu h^2(t)) = \sin t,$$

или

$$\frac{2\mu \sin t}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(\tau) h^2(\tau) d\tau = \sin t.$$

Решая это уравнение, получаем

$$h(t) = \sqrt{\frac{3\pi}{8\mu}} \sin t.$$

Подставив (31) в первое уравнение системы (30) и приравняв свободные члены, получим следующую задачу для определения $\tilde{y}_0$:

$$\tilde{y_0}''(t) + \tilde{y_0}(t) + \frac{3\pi}{8} \sin^2 t - \sin t = 0, \quad \tilde{y_0}(0) = \tilde{y_0}(\pi) = 0.$$

Решая это уравнение, находим

$$\tilde{y}_0(t) = \frac{\pi}{4} \cos t + \sin t - \frac{t}{2} \cos t - \frac{3\pi}{16} - \frac{\pi}{16} \cos(2t). \tag{32}$$

Подстановкой (31) во второе уравнение системы (30), сравнивая коэффициенты у $\mu^{1/2}$, получаем уравнение для определения функции $\hat{y}$:

$$0 = \int_0^{\pi} \sin(\tau)[\mu h(\tau)\tilde{y}_0(\tau) + \mu h(\tau)\hat{y}_0(\tau)]d\tau = \int_0^{\pi} \sin^2(\tau)[\tilde{y}_0(\tau) + \hat{y}_0(\tau)]d\tau.$$

Ищем функцию $\hat{y}$ в виде $\hat{y} = A \sin t$ где A — константа, определяемая по формуле

$$A \int_0^{\pi} \sin^2(\tau) \sin(\tau) d\tau = - \int_0^{\pi} \sin^2(\tau) \tilde{y}_0(\tau) d\tau.$$

Подставляя $\tilde{y}_0(\tau)$, определенное в (32), в последнее уравнение и интегрируя получившееся выражение, находим A и, следовательно, $\hat{y}_0(t)$.

Действуя последовательно, подставляем $y(t)$ с найденными компонентами то в первое, то во второе уравнение системы (30) и сравниваем коэффициенты при одних и тех же степенях μ, чтобы найти очередную составляющую в разложении функции $y(t)$.

Окончательно получаем решение

$$y(t) = \frac{\sqrt{3\pi}}{2\sqrt{2\mu}} \sin t + \tilde{y}_0(t) + \hat{y}(t) + \sqrt{\mu}\, [\tilde{y}_1(t) + \hat{y}_1(t)] + \ldots . \tag{33}$$

Для приближенного построения решения уравнения (27) при $a^2 = 1$ можно также применить 2-фактор-метод, схема которого имеет вид

$$y_{k+1} = y_k - [F'_y(0,0) + PF''_{yy}(0,0)h]^{-1}F(x, h + y_k), \quad k = 0, 1, \dots, \tag{34}$$

где

$$y_0 = 0, \;\; h(t) = \sqrt{\frac{3\pi}{8\mu}}\sin t,$$

$$F(\sin t, y) = \ddot{y}(t) + y(t) + \mu y^2(t) - \sin t, \quad P(\cdot) = \frac{2\sin t}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\sin\tau(\cdot)d\tau.$$

Схема (34) эквивалентна, например, при $k = 0$ уравнению

$$\ddot{y}_1(t) + y_1(t) + \frac{\sqrt{6\mu}\sin t}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\pi}\sin^2(\tau)y_1(\tau)d\tau = \sin t - \frac{3\pi}{8}\sin^2 t.$$

Очевидно, что последнее уравнение имеет решение. Процесс будет сходиться для любых достаточно малых $\mu > 0$ в силу свойств 2-фактор-метода и специфики отображения F.

Работа выполнена на основе совместных исследований, проводимых в ВЦ РАН (Москва, Россия), Академии Подляска (Седлице, Польша), Институте системных исследований ПАИ (Варшава, Польша) и Miami University (США).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Брежнева О.А., Третьяков А.А.* Методы решения существенно нелинейных задач. М.: ВЦ РАН, 2000.

2. *Tret'yakov A.A., and Marsden J.E.* Factor-analysis of nonlinear mapping: p-regularity theory // Commun. Pure and Appl. Analys. 2003. V. 2. P. 425–445.

3. *Измайлов А.Ф., Третьяков А.А.* 2-регулярные решения нелинейных задач. М.: Физматгиз, 1999.

4. *Evtushenko Yu.* Generalized Lagrange multiplier technique for nonlinear programming // J. of Optimizat. Theory and Applic., 1977. V. 21. No. 2. P. 121–135.

5. *Третьяков А.А.* Теорема о неявной функции в вырожденных задачах // Успехи матем. наук. 1987. Т. 42. Вып. 5. С. 215–216.

6. *Белаш К.Н., Третьяков А.А.* Методы решения вырожденных задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1988. Т.28. N° 7. С. 1097–1102.

7. *Измайлов А.Ф., Третьяков А.А.* Фактор-анализ нелинейных отображений. М.: Наука, 1994.

8. Третьяков А.А. Структуры нелинейных вырожденных отображений и их применение к построению численных методов. Дисс. на соиск. уч. степ. докт. физ.-мат. наук. М.: 1987. 167 с.

9. *Mangasarian O.L.* A Newton method for linear programming // J. Optimizat. Theory and Appl. 2004. V. 121. P. 1–18.

10. *Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г., Моллаверди Н.* Применение метода Ньютона к решению задач линейного программирования большой размерности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44. N° 9. С. 1564–1573.

11. *Facchinei F., Fisher A., and Kanzow C.* On the accurate identification of active constraints // SIAM J. Optim. 1998. V. 9. P. 14–32.

12. *Эльсгольц Л.Э.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.-Л.: Гостехтеориздат, 1950.

13. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971.