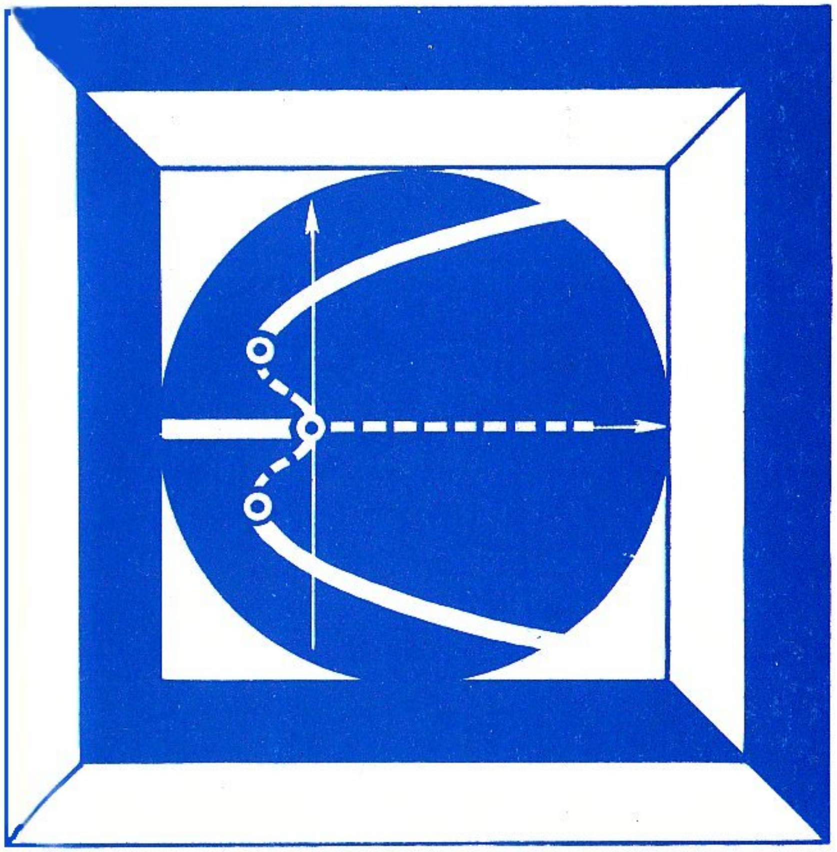
Цена 40 коп.

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ И СТАБИЛИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ



ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР АН СССР
МОСКВА 1987

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ И СТАБИЛИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ

ВЦ АН СССР

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР АН СССР
МОСКВА 1987

Ответственный редактор
чл.-корр. АН СССР В.В. Румянцев

Рассматриваются вопросы бифуркации и устойчивости стационарных движений в ряде задач динамики твердого тела, в неголономных системах и системах с упругими элементами. Изучаются условия существования линейных интегралов в неконсервативных механических системах. Исследуется вопрос о неустойчивости решений интегро-дифференциальных уравнений в критическом случае пары чисто мнимых корней.

Рецензенты: Ю.Н. Павловский,
В.И. Возлинский

УДК 531.36

А.А. БУРОВ

О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА, НЕСУЩЕГО ПОДВИЖНУЮ МАССУ НА ПРУЖИНЕ

Задача о движении твердого тела, несущего подвижные массы на упругих пружинах - одна из простейших по постановке практически важных задач динамики систем связанных тел. Этой задаче посвящены работы многих исследователей (см. [1-3], а также обзоры в [4]).

Настоящая работа посвящена исследованию движения системы "тело+грузик" в приближении упругой квазистатики, при котором предполагается, что в каждый момент времени грузик находится в равновесии относительно тела под действием потенциальных сил и сил инерции, обусловленных переносным движением. Изучается структура уравнений движения, указываются случаи их интегрируемости, исследуются необходимые условия существования дополнительного интеграла.

1. Рассмотрим твердое тело, совершающее вращение вокруг неподвижной точки O. Предположим, что вдоль фиксированной в теле прямой l движется грузик массы m, соединенный с телом упругой пружиной. Пусть $J = (J_{ij}) = \mathrm{diag}(J_1, J_2, J_3)$ - тензор инерции тела относительно точки O, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ - вектор угловой скорости тела, $r = (r_1, r_2, r_3)$ - радиус-вектор OR неподвижной в теле точки R, x - удаление грузика от точки R, $e = (e_1, e_2, e_3)$ - единичный вектор, направленный по прямой l. Для удобства будем считать, что точка R совпадает с положением равновесия грузика в неподвижном теле при отсутствии внешних сил. Все векторные и тензорные величины задаются своими проекциями на оси $O\xi_1\xi_2\xi_3$, жестко связанные с телом. Тогда выражение для кинетической энергии системы имеет вид

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mx(\omega\times r)\cdot e + \frac{1}{2}J(x)\omega\cdot\omega = T_1 + T_2 + T_3, \qquad (1.1)$$

$$J_{ij}(x) = J_{ij} + m\delta_{ij}((r + xe)^2 - (r_i + xe_i)^2) - m(1-\delta_{ij})(r_i + xe_i)(r_j + xe_j).$$

Предположим, что система "тело плюс грузик" совершает движение в осесимметричном поле сил. Потенциал упругих и внешних сил запишем в виде

$$U = U(x, \gamma),$$

где $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ – единичный вектор, направленный по оси симметрии внешнего силового поля.

При этом уравнения движения запишутся в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_\pi}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L_\pi}{\partial x}, \qquad (1.2)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_\pi}{\partial \omega} = \frac{\partial L_\pi}{\partial \omega}\times\omega - \gamma\times\frac{\partial L_\pi}{\partial \gamma}, \qquad (1.3)$$

$$L_\pi = T_1 + T_2 + T_3 - U. \qquad (1.4)$$

Так как внешнее силовое поле осесимметрично, то уравнения (1.2), (1.3) помимо интеграла энергии

$$F_0 = \dot{x}\,\partial L_\pi/\partial\dot{x} + \omega\cdot\partial L_\pi/\partial\omega - L_\pi \qquad (1.5)$$

и геометрического интеграла $F_2 = \gamma^2$ допускают интеграл $F_1 = \partial L_\pi/\partial\omega\cdot\gamma$. В общем случае для их интегрируемости недостает двух дополнительных интегралов.

Можно указать два простых случая, когда уравнения движения имеют по крайней мере один дополнительный интеграл.

1. Пусть $U = U(x)$, т.е. внешнее силовое поле отсутствует. Дополнительный интеграл имеет вид

$$F_3 = (\partial L_\pi/\partial\omega)^2.$$

2. Пусть $J_1 = J_2$, $l = O\xi_3$, $U = U(x, \gamma_3)$. Дополнительный интеграл – $F_3 = \partial L_\pi/\partial\omega_3$.

Если $J_1 = J_2$, $l = O\xi_3$, $U = U(x)$, то уравнения движения (1.2), (1.3) вполне интегрируемы.

2. В рамках приближения упругой квазистатики предполагается, что характерные значения величин T_1 и T_2 пренебрежимо малы по сравнению с характерными значениями остальных слагаемых, входящих в выражение для функции L_π. Движение при этом описывается уравнениями

$$0 = \partial L/\partial x, \qquad (2.1)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\omega} = \frac{\partial L}{\partial\omega}\times\omega - \gamma\times\frac{\partial L}{\partial\gamma}, \quad \frac{d}{dt}\gamma = \gamma\times\omega, \qquad (2.2)$$

$$L(x, \omega, \gamma) = L_\pi - T_1 - T_2. \qquad (2.3)$$

Предположим, что уравнение (2.1) может быть разрешено относительно x:

$$x = x(\omega, \gamma). \qquad (2.4)$$

Рассмотрим функцию

$$\Lambda(\omega, \gamma) = L(x(\omega, \gamma), \omega, \gamma) \qquad (2.5)$$

Утверждение.

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\omega_i} = \frac{\partial L}{\partial\omega_i}\bigg|_{x=x(\omega,\gamma)}, \quad \frac{\partial\Lambda}{\partial\gamma_i} = \frac{\partial L}{\partial\gamma_i}\bigg|_{x=x(\omega,\gamma)}, \qquad (2.6)$$

$$\frac{\partial^2\Lambda}{\partial\omega_i\partial\omega_j} = \frac{\partial^2 L}{\partial\omega_i\partial\omega_j}\bigg|_{x=x(\omega,\gamma)} - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}\right)^{-1}_{x=x(\omega,\gamma)}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial\omega_i}\bigg|_{x=x(\omega,\gamma)}\right)\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial\omega_j}\bigg|_{x=x(\omega,\gamma)}\right). \qquad (2.7)$$

Доказательство. В силу (2.5)

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\omega_i} = \frac{\partial L}{\partial\omega_i}\bigg|_{x=x(\omega,\gamma)} + \frac{\partial x}{\partial\omega_i}\frac{\partial L}{\partial x}\bigg|_{x=x(\omega,\gamma)} = \frac{\partial L}{\partial\omega_i}\bigg|_{x=x(\omega,\gamma)}.$$

Второе соотношение (2.6) доказывается аналогично.

В силу (2.6)

$$\frac{\partial^2\Lambda}{\partial\omega_i\partial\omega_j} = \frac{\partial^2 L}{\partial\omega_i\partial\omega_j}\bigg|_{x=x(\omega,\gamma)} + \frac{\partial x}{\partial\omega_j}\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial\omega_i}\bigg|_{x=x(\omega,\gamma)}. \qquad (2.8)$$

Продифференцируем тождество

$$0 = \frac{\partial L(x(\omega,\gamma), \omega, \gamma)}{\partial x}$$

по ω_i. Имеем

$$0 = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}\bigg|_{x=x(\omega,\gamma)}\frac{\partial x}{\partial\omega_i} + \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial\omega_i}\bigg|_{x=x(\omega,\gamma)}. \qquad (2.9)$$

В силу (2.9)

$$\frac{\partial x}{\partial\omega_i} = -\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}\bigg|_{x=x(\omega,\gamma)}\right)^{-1}\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial\omega_i}\bigg|_{x=x(\omega,\gamma)}. \qquad (2.10)$$

Подставляя (2.10) в (2.8), получим соотношение (2.7).

Доказанное утверждение позволяет переписать уравнения (2.2) в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Lambda}{\partial\omega} = \frac{\partial\Lambda}{\partial\omega}\times\omega + \frac{\partial\Lambda}{\partial\gamma}\times\gamma, \quad \frac{d}{dt}\gamma = \gamma\times\omega, \tag{2.11}$$

Пусть

$$M = \partial\Lambda/\partial\omega. \tag{2.12}$$

Предположим, что выполнено условие

$$\det(\partial^2\Lambda/\partial\omega^2) \neq 0. \tag{2.13}$$

Тогда систему (2.12) можно (по крайней мере, локально) разрешить относительно $\omega : \omega = \omega(M, \gamma)$. При этом система (2.11) запишется в виде

$$\dot M = M\times\partial H/\partial M + \gamma\times\partial H/\partial\gamma, \quad \dot\gamma = \gamma\times\partial H/\partial M, \tag{2.14}$$

$$H(M, \gamma) = (\omega\cdot\partial\Lambda/\partial\omega - \Lambda)_{\omega=\omega(M,\gamma)}. \tag{2.15}$$

Следует заметить, что в общем случае функция Λ имеет достаточно сложный вид.

ПРИМЕР. Пусть $l = O\xi_3$, $U = \frac{kx^2}{2} + mg(r_3 + x)\gamma_3$. Тогда в силу уравнения (2.1)

$$m(x + r_3)(\omega_1^2 + \omega_2^2) - kx - mg\gamma_3 = 0.$$

и, следовательно,

$$x = \frac{mg\gamma_3 - mr_3(\omega_1^2 + \omega_2^2)}{m(\omega_1^2 + \omega_2^2) - k},$$

$$x + r_3 = \frac{mg\gamma_3 - r_3 k}{m(\omega_1^2 + \omega_2^2) - k}.$$

При этом функция (2.5) записывается в виде

$$\Lambda(\omega, \gamma) = \frac{1}{2}\left(\left(J_1 + m\left(\frac{mg\gamma_3 - r_3 k}{m(\omega_1^2+\omega_2^2) - k}\right)^2\right)\omega_1^2 + \left(J_2 + m\left(\frac{mg\gamma_3 - r_3 k}{m(\omega_1^2+\omega_2^2) - k}\right)^2\right)\omega_2^2 + \right.$$

$$\left. + J_3\omega_3^2\right) - \frac{k}{2}\left(\frac{mg\gamma_3 - mr_3(\omega_1^2+\omega_2^2)}{m(\omega_1^2 + \omega_2^2) - k}\right)^2 - mg\gamma_3\frac{mg\gamma_3 - r_3 k}{m(\omega_1^2+\omega_2^2) - k}.$$

Введем в пространстве бесконечно дифференцируемых функций на $R^6(M, \gamma)$ скобку Пуассона $\{,\}$, полагая

$$\{M_i, M_j\} = -e_{ijk}M_k, \quad \{M_i, \gamma_j\} = -e_{ijk}\gamma_k, \quad \{\gamma_i, \gamma_j\} = 0. \tag{2.16}$$

Тогда систему (2.14) можно представить в виде

$$\dot M_i = \{M_i, H\}, \quad \dot\gamma_i = \{\gamma_i, H\}. \tag{2.17}$$

Скобка Пуассона (2.16) вырождена: функции $j_1 = M\cdot\gamma$ и $j_2 = \gamma^2$ коммутируют с любой другой гладкой функцией на $R^6(M, \gamma)$, и, следовательно, наряду с $j_0 = H$ являются первыми интегралами уравнений (2.17). Ограничение скобки Пуассона (2.16) на совместный неособый уровень первых интегралов

$$j_{12}(p) = \{j_1 = p,\ j_2 = 1\}$$

не вырождено и определяет каноническую структуру на четырехмерном многообразии $j_{12}(p)$. Ограничение потока (2.17) на это многообразие описывается системой уравнений Гамильтона с двумя степенями свободы. Для интегрируемости этой системы, а вместе с ней и системы (2.17), как и в задаче о движении твердого тела с неподвижной точкой в осесимметричном потенциальном силовом поле, недостает одного дополнительного интеграла.

Можно указать два случая, когда такой интеграл существует.

1. Внешнее силовое поле отсутствует: $U = U(x)$. Дополнительный интеграл имеет вид $j_3 = M^2$.

2. Пусть $J_1 = J_2$, $l = O\xi_3$, $U = U(x, \gamma_3)$. Дополнительный интеграл – $j_3 = M_3$.

Этим случаям интегрируемости уравнений (2.17) соответствуют отмеченные в п. 1 случаи существования одного дополнительного интеграла уравнений (1.2)-(1.4).

3. Пусть

$$U(x, \gamma) = \frac{kx^2}{2} + U_1(x, \gamma),$$

где $U_1(x, \gamma)$ – аналитическая функция. Введем безразмерный параметр ε, полагая $k = k_0\varepsilon^{-1}$, $k_0 > 0$. Тогда уравнение (2.1) запишется в виде

$$f(x, \varepsilon) = k_0 x + \varepsilon\frac{\partial U_1}{\partial x} - \varepsilon\frac{1}{2}\frac{\partial J}{\partial x}\omega\cdot\omega = 0. \tag{3.1}$$

При $\varepsilon = 0$ уравнение (3.1) имеет решение $x(0) = 0$. Так как $\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} \neq 0$, то при достаточно малых значениях ε это уравнение обладает однопараметрическим семейством решений

$$x(\varepsilon) = \varepsilon\varphi(\gamma, \omega, \varepsilon),$$

причем для всякого компакта $K_{\gamma,\omega} \subset R^6(\gamma, \omega)$ существует $\varepsilon(K_{\gamma,\omega}) > 0$ такое, что функция $\varphi(\gamma, \omega, \varepsilon)$ аналитична на множестве $[0, \varepsilon(K_{\gamma,\omega}))\times K_{\gamma,\omega}\subset R^1(\varepsilon)\times R^1(\gamma,\omega)$. Тогда для всякого компакта $K_{\gamma,M}\subset R^6(\gamma,M)$ найдется $\varepsilon(K_{\gamma,M})>0$ такое, что функция Гамильтона (2.15) аналитична на прямом произведении $[0, \varepsilon(K_{\gamma,M}))\times K_{\gamma,M}\subset R^1(\varepsilon)\times R^6(\gamma,M)$. Разложим функцию (2.15) в ряд по степеням ε. Тогда

$$H = H_0(M,\gamma) + \varepsilon H_1(M,\gamma) + \dots, \tag{3.2}$$

$$H_0(M,\gamma) = \frac{1}{2} I^{-1} M\cdot M + U_1(0,\gamma), \tag{3.3}$$

$$I_{ij} = J_{ij} + m\delta_{ij}(r^2 - r_i^2) - m(1-\delta_{ij})r_i r_j,$$

В пределе при $\varepsilon = 0$ система уравнений (2.14), (3.3) совпадает с системой уравнений движения твердого тела с неподвижной точкой в осесимметричном поле сил с потенциалом $U_1(0,\gamma)$. В ряде случаев неинтегрируемость уравнений (2.14), (3.3) влечет за собой отсутствие при достаточно малых значениях $\varepsilon \neq 0$ дополнительного интеграла системы уравнений (2.14), (3.2), аналитического в некоторых областях фазового пространства. В частности, в силу результатов работ [5-7] справедлива

Теорема 1. Пусть $U_1(0,\gamma) = c\cdot\gamma$, I_1, I_2, I_3 - собственные числа оператора I.

Если величины I_α, $\alpha = 1, 2, 3$ различны, $c \neq 0$, то для любого достаточно большого $M_0>0$ существует $\varepsilon_0>0$ такое, что при достаточно малых значениях $\varepsilon\subset(0,\varepsilon_0)$ система уравнений (2.14), (3.3) не имеет дополнительного интеграла, аналитического по фазовым переменным на множестве $K_{\gamma,M}=\{\gamma^2 = 1\}\times\{M^2\leq M_0^2\}$.

Если $I_1 = I_2 \neq I_3$, а $c \neq 0$ не является собственным вектором оператора I, то для любого достаточно большого $M_0>0$ существует $\varepsilon_0>0$ такое, что при достаточно малых значениях $\varepsilon\subset(0,\varepsilon_0)$ система уравнений (2.14), (3.3) не имеет дополнительного интеграла, аналитического по параметру ε и фазовым переменным на множестве $K_{\gamma,M}=\{\gamma^2 = 1\}\times\{M^2\leq M_0^2\}$.

Из результатов работы [8] следует

Теорема 2. Пусть $U_1(\gamma, 0) = 1/2c\gamma\cdot\gamma$, I_1, I_2, I_3 - собственные числа матрицы I, c_1, c_2, c_3 - собственные числа матрицы C.

Если в главных осях тензора инерции I тензор C не диагонален или не выполнено условие

$$I_1(c_3 - c_2) + I_2(c_1 - c_3) + I_3(c_2 - c_1) = 0,$$

то для любого достаточно большого $M_0>0$ существует $\varepsilon_0>0$ такое, что при достаточно малых значениях $\varepsilon\subset(0,\varepsilon_0)$ система уравнений (2.14), (3.3) не имеет дополнительного интеграла, аналитического по фазовым переменным на множестве $K_{\gamma,M}=\{\gamma^2 = 1\}\times\{M^2\leq M_0^2\}$.

4. Предположим, что внешнее силовое поле отсутствует. В этом случае согласно теореме Рауса стационарным движениям системы соответствуют стационарные точки интеграла F_0 на фиксированном уровне интеграла $F_3 = f_3$. Пусть

$$\Phi = F_0 + \frac{\lambda}{2}(F_3 - f_3). \tag{4.1}$$

Стационарные точки находятся из условий

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{x}} = \frac{\partial^2 L_\pi}{\partial\omega\partial\dot{x}}\cdot\left(\omega+\lambda\frac{\partial L_\pi}{\partial\omega}\right) - \frac{\partial L_\pi}{\partial\dot{x}} = 0, \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\partial^2 L_\pi}{\partial\omega\partial x}\cdot\left(\omega+\lambda\frac{\partial L_\pi}{\partial\omega}\right) + \frac{\partial^2 L_\pi}{\partial x^2} = 0, \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\omega} = \frac{\partial^2 L_\pi}{\partial\omega^2}\left(\omega+\lambda\frac{\partial L_\pi}{\partial\omega}\right) + \frac{\partial^2 L_\pi}{\partial\omega\partial\dot{x}}\dot{x} = 0, \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda} = 0. \tag{4.5}$$

Так как квадратичная форма $T(\dot{x},\omega) = T_1 + T_2 + T_3$ положительно определена, то система (4.3), (4.4) допускает лишь тривиальное решение

$$\dot{x} = 0,\quad \omega + \lambda\partial L_\pi/\partial\omega = 0. \tag{4.6}$$

Этому решению соответствуют перманентные вращения системы "тело+грузик" как твердого целого. При этом стационарные значения угловой скорости $\omega = \omega(f_3)$ и смещения грузика $x = x(f_3)$ определяются (в общем случае - неоднозначно) из уравнений (4.2), (4.5), (4.6). Подставляя выражения $\omega = \omega(f_3)$, $x = x(f_3)$, $\dot{x} = 0$ в F_0, получим зависимость $f_0 = F_0(\omega(f_3), x(f_3), 0) = f_0(f_3)$, также не являющуюся в общем случае однозначной. Эта зависимость определяет на плоскости (f_0, f_3) множество бифуркационных кривых.

Исследуем теперь вопрос о стационарных точках интеграла j_0 на многообразии $j_3 = p_3$. Пусть

$$j = j_0 + \frac{\lambda}{2}(j_3 - p_3). \tag{4.7}$$

Стационарные точки находятся из условий

$$\frac{\partial j}{\partial \omega} = \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \omega^2}\left(\omega + \lambda \frac{\partial \Lambda}{\partial \omega}\right) = 0, \qquad (4.8)$$

$$\frac{\partial j}{\partial \lambda} = 0. \qquad (4.9)$$

Уравнения (4.8) допускают решение

$$\omega + \lambda \partial\Lambda/\partial\omega = 0, \qquad (4.10)$$

причем при выполнении условия

$$\det(\partial^2\Lambda/\partial\omega^2) \neq 0 \qquad (4.11)$$

это решение единственно. В силу утверждения п. 2 и соотношений (4.2), (4.5), (4.6) соотношения (2.1), (4.10), (4.9) позволяют определить значения угловой скорости $\omega = \omega(p_3)$ и смещения грузика $x = x(p_3)$ на всех стационарных движениях системы "тело+грузик". Подставляя выражения $\omega = \omega(p_3)$ в j_0, получим зависимость $p_0 = j_0(\omega(p_3)) = p_0(p_3)$, определяющую бифуркационные кривые на плоскости (p_0, p_3). Так как на стационарных движениях $\dot{x} = 0$, то в силу соотношений (4.2), (4.6), (1.5) и (2.1), (4.10), (2.15) справедливо

Утверждение. Для любого $x \subset R$

$$f_0(x) \equiv p_0(x).$$

В области, где условие (4.11) не выполнено, система (4.8) может иметь решения, отличные от (4.10). Этим решениям нельзя поставить в соответствие стационарные движения рассматриваемой механической системы.

5. Пусть $I = 0\xi_3$, $r_3 > 0$, $J_i \neq J_j$, $i \neq j$, $U = \dfrac{kx^2}{2}$.

Система уравнений (4.2), (4.5), (4.6) допускает решения

$$\omega_i = \omega_{i0}, \quad \omega_j = 0, \quad j \neq i, \qquad (5.1)$$

$$\dot{x} = 0, \quad x = x_0 = \frac{m r_3 \omega_{i0}^2 (1 - \delta_{i3})}{k - m\omega_{i0}^2},$$

$$\lambda = J_i^{-1}(x_0) = \left(J_i + \frac{m r_3^2 k^2 (1 - \delta_{i3})}{(k - m\omega_{i0}^2)^2}\right)^{-1},$$

$$f_3 = (p_3) = J_i^2(x_0)\,\omega_{i0}^2.$$

Этим решениям соответствуют перманентные вращения системы "тело+грузик" вокруг главных осей инерции. Необходимые условия устойчивости вращения системы вокруг

i-й оси, получаемые из анализа уравнений в вариациях для решений (5.1), имеют вид

$$(J_i(x_0) - J_{i+1}(x_0))(J_i(x_0) - J_{i+2}(x_0)) > 0 \quad i \bmod 3, \qquad (5.2)$$

$$\frac{4m^2\omega_{i0}^2 k r_3}{(k - m\omega_{i0}^2)^2} - \left(J_i + \frac{m r_3^2 k^2}{(k - m\omega_{i0}^2)^2}\right)(m\omega_{i0}^2 - k) > 0, \quad i = 1, 2. \qquad (5.3)$$

Заметим, что в физически интересном случае, когда

$$x_0 > 0 \;\; (k - m\omega_{i0}^2 < 0) \quad i = 1, 2, \qquad (5.4)$$

условие (5.3) выполнено. Анализ второй вариации $\delta^2 W$ функции Рауса (4.1) на линейном многообразии $\delta F_3 = 0$ позволяет получить достаточные условия устойчивости вращения вокруг i-й оси

$$J_i(x_0) - J_{i+1}(x_0) > 0, \quad J_i(x_0) - J_{i+2}(x_0) > 0 \quad i \bmod 3, \qquad (5.5)$$

$$\frac{4m^2\omega_{i0}^2 k^2 r_3^2}{(k - m\omega_{i0}^2)^2} - \left(J_i + \frac{m r_3^2 k^2}{(k - m\omega_{i0}^2)^2}\right)(m\omega_{i0}^2 - k) > 0 \quad i = 1, 2. \qquad (5.6)$$

Движения (5.1) могут быть также найдены из уравнений (2.1), (4.10), (4.9). В приближении упругой квазистатики необходимые и достаточные условия устойчивости перманентного вращения вокруг i-й оси совпадают и имеют вид

$$(J_i(x_0) - J_{i+1}(x_0))(J_i(x_0) - J_{i+2}(x_0)) > 0 \quad i \bmod 3. \qquad (5.7)$$

Заметим, что условие (5.7) в общем случае совпадает лишь с частью необходимых условий устойчивости – с условием (5.2). Однако при $i = 3$, а также при выполнении (5.4) необходимые условия устойчивости (5.2), (5.3) и условие (5.7) оказываются эквивалентными.

Предположим, что $i = 3$ или выполнено условие (5.4). Тогда достаточное условие устойчивости (5.7), справедливое для приближения упругой квазистатики, шире достаточного условия (5.5). Оно охватывает помимо (5.5) случай, когда

$$J_i(x_0) - J_{i+1}(x_0) < 0, \quad J_i(x_0) - J_{i+1}(x_0) < 0 \quad i \bmod 3,$$

и, следовательно, степень неустойчивости решения (5.1) системы дифференциальных уравнений (1.2)–(1.4) равна двум.

Литература

1. Черноусько Ф.Л. О движении твердого тела с подвижными внутренними массами//Изв. АН СССР. МТТ.- 1973. - № 4. - С. 33-44.
2. Панкова Н.В., Рубановский В.Н. Устойчивость и бифуркация стационарных вращений свободного твердого тела и упруго связанной с ним точечной массы//Изв. АН СССР. МТТ. - 1976. - № 4. - С. 1-18.
3. Черноусько Ф.Л. О движении твердого тела с упругими и диссипативными элементами//ПММ. - 1978. - Т. 42, № 1. - С. 34-42.
4. Итоги науки и техники. Общая механика. - Т. 5. - М.: ВИНИТИ, 1982. - 200 с.
5. Козлов В.В. Методы качественного анализа в динамике твердого тела. - М.: Изд-во МГУ, 1980. - 230 с.
6. Зиглин С.Л. Ветвление решений, пересечение сепаратрис и несуществование интеграла в динамике твердого тела//Тр. Моск. матем. о-ва. - 1980.-Т. 41. - С. 287-303.
7. Сальникова Т.В. Неинтегрируемость возмущенной задачи Лагранжа//Вестн. МГУ. Матем., мех. - 1984. - № 4. - С. 62-66.
8. Козлов В.В., Онищенко Д.А. Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа//Докл. АН СССР. - 1982. - Т. 266, № 6. - С. 1298-1300.

УДК 531.36

А.В.КАРАПЕТЯН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ

В [1-6] рассмотрена задача об устойчивости относительных положений равновесия голономных механических систем, которая состоит в следующем. Предполагается, что на голономную механическую систему с циклическими координатами, помимо потенциальных, действуют такие силы, что скорости циклических координат сохраняют постоянные значения на всех движениях. При этом стационарным движениям исходной системы отвечают относительные положения равновесия системы с дополнительными силами, и наоборот, однако условия устойчивости стационарных движений и относительных положений равновесия могут, вообще говоря, различаться, причем стационарные движения "более" устойчивы, чем соответствующие относительные положения равновесия. В частности, вековая устойчивость относительных положений равновесия гарантирует вековую устойчивость соответствующих стационарных движений [1-6].

В предлагаемой заметке аналогичная задача рассматривается для неголономных систем. При этом оказывается, что стационарным движениям неголономной системы с циклическими координатами по-прежнему отвечают относительные положения равновесия неголономной системы с дополнительными силами и наоборот. Условия устойчивости соответствующих движений по-прежнему различаются, однако стационарные движения могут быть как "более", так и "менее" устойчивы, чем соответствующие относительные положения равновесия.

1. Рассмотрим механическую систему, положение которой определяется обобщенными координатами $q_1, \dots, q_n$,

скорости которых $\dot q_1, \dots, \dot q_n$ стеснены $n - m$ неинтегрируемыми соотношениями вида

$$\dot q_\mu = \sum_{r=1}^{m} b_{\mu r}(q)\dot q_r \quad (\mu = m+1, \dots, n). \qquad (1.1)$$

Предположим (для простоты), что кинетическая энергия $T(q, \dot q)$, силовая функция $U(q)$ и коэффициенты связей (1.1) $b_{\mu r}(q)$ системы не зависят от $n - m$ последних координат $q_\mu (\mu = m+1, \dots, n)$. Тогда движение системы описывается уравнениями Чаплыгина

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_*}{\partial \dot q_r} = \frac{\partial T_*}{\partial q_r} + \frac{\partial U}{\partial q_r} + \sum_{s,p=1}^{m} \Gamma_{rsp}\dot q_s \dot q_p \; (r = 1, \dots, m), \qquad (1.2)$$

которые можно рассматривать независимо от уравнений связей (1.1). Здесь

$$T_* = T_{(1.1)} = \frac{1}{2}\sum_{r,s=1}^{m} \tau_{rs}(q)\dot q_r \dot q_s,$$

$$\Gamma_{rsp} = \sum_{\mu=m+1}^{n}\left(\frac{\partial b_{\mu r}}{\partial q_s} - \frac{\partial b_{\mu s}}{\partial q_r}\right)\frac{\partial}{\partial \dot q_p}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_\mu}\right)_{(1.1)}$$

При выполнении условий

$$\frac{\partial T_*}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial \Gamma_{rsp}}{\partial q_\alpha} = \Gamma_{\alpha\beta\gamma} = 0 \quad \begin{pmatrix} \alpha, \beta, \gamma = k+1, \dots, m \\ r, s, p = 1, \dots, m \end{pmatrix} \qquad (1.3)$$

координаты q_α являются циклическими в смысле [7] и уравнения (1.2) допускают стационарные решения вида

$$q_i = q_{i0}, \; \dot q_i = 0 \; (i = 1, \dots, k), \; \dot q_\alpha = \dot q_{\alpha 0} \; (\alpha = k+1, \dots, m), \qquad (1.4)$$

причем m постоянных q_{i0}, $\dot q_{\alpha 0}$ удовлетворяют системе $k < m$ уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} + \sum_{\alpha,\beta=k+1}^{m}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \tau_{\alpha\beta}}{\partial q_i} + \Gamma_{i\alpha\beta}\right)\dot q_\alpha \dot q_\beta = 0 \; (i = 1, \dots, k). \qquad (1.5)$$

Согласно [7–9] исследование устойчивости стационарных движений (1.4) системы (1.2) сводится к исследованию устойчивости положения равновесия "приведенной" системы

$$A_*\ddot x + D_*\dot x + G_*\dot x + C_* x + E_* x = 0. \qquad (1.6)$$

Здесь x – k-мерный вектор, A_*, D_* и C_* – симметричные, а G_* и E_* – кососимметричные $k \times k$-матрицы вида

$$A_* = A - \tilde A, \; D_* = D - \tilde D, \; G_* = G - \tilde G, \; C_* = C - \tilde C, \; E_* = E - \tilde E;$$

$$A = (a_{ij}), \; D = (d_{ij}), \; G = (g_{ij}), \; C = (c_{ij}), \; E = (e_{ij});$$

$$\tilde A = \Big(\sum_{\alpha,\beta} a^{\alpha\beta} a_{\alpha i} a_{\beta j}\Big), \; \tilde D = \Big(\sum_{\alpha,\beta} a^{\alpha\beta}(a_{i\beta} d_{\alpha j} + a_{\alpha j} d_{i\beta})\Big),$$

$$\tilde G = \Big(\sum_{\alpha,\beta} a^{\alpha\beta}(a_{i\beta} g_{\alpha j} + a_{\alpha j} g_{i\beta})\Big), \; \tilde C = \Big(\sum_{\alpha,\beta} a^{\alpha\beta}(g_{i\beta} g_{\alpha j} + d_{i\beta} d_{\alpha j})\Big),$$

$$\tilde E = \Big(\sum_{\alpha,\beta} a^{\alpha\beta}(d_{i\beta} g_{\alpha j} + g_{i\beta} d_{\alpha j})\Big); \; a_{rs} = (\tau_{rs})_0, \; (a^{\alpha\beta}) = (a_{\alpha\beta})^{-1};$$

$$d_{ij} = -\frac{1}{2}\sum_\gamma \dot q_{\gamma 0}(\Gamma_{i\gamma j} + \Gamma_{j\gamma i})_0,$$

$$g_{ij} = \sum_\gamma \dot q_{\gamma 0}\left[\frac{\partial \tau_{i\gamma}}{\partial q_j} - \frac{\partial \tau_{j\gamma}}{\partial q_i} - \Gamma_{ij\gamma} - \frac{1}{2}(\Gamma_{i\gamma j} - \Gamma_{j\gamma i})\right]_0,$$

$$c_{ij} = -\left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 + \frac{1}{2}\sum_{\gamma,\delta}\dot q_{\gamma 0}\dot q_{\delta 0}\left(\frac{\partial^2 \tau_{\gamma\delta}}{\partial q_i \partial q_j} + \frac{\partial \Gamma_{i\gamma\delta}}{\partial q_j} + \frac{\partial \Gamma_{j\gamma\delta}}{\partial q_i}\right)_0\right],$$

$$e_{ij} = -\frac{1}{2}\sum_{\gamma,\delta}\dot q_{\gamma 0}\dot q_{\delta 0}\left(\frac{\partial \Gamma_{i\gamma\delta}}{\partial q_\cdot} - \frac{\partial \Gamma_{j\gamma\delta}}{\partial q}\right)_0, \quad d_{\alpha i} = \frac{1}{2}\sum_\gamma \dot q_{\gamma 0}(\Gamma_{\gamma\alpha i} + \Gamma_{\gamma i\alpha})_0$$

$$g_{\alpha i} = \sum_\gamma \dot g_{\gamma 0}\left[\frac{\partial \tau_{\alpha\gamma}}{\partial q_i} + \Gamma_{i\alpha\gamma} + \frac{1}{2}(\Gamma_{j\alpha i} - \Gamma_{\gamma i\alpha})\right]_0.$$

2. Предположим теперь, что в рассматриваемой системе скорости циклических координат сохраняют постоянные значения на всех движениях: $\dot q_\alpha = \omega_\alpha$ $(\alpha = k+1, \dots, m)$. При этом $q_\alpha = \omega_\alpha(t - t_0) + q_{\alpha 0}$ $(\alpha = k+1, \dots, m)$ и рассматриваемая неголономная система с m степенями свободы переходит в неголономную систему с k степенями свободы. Положение последней определяется обобщенными координатами $q_1, \dots, q_k, q_{m+1}, \dots, q_n$, скорости которых стеснены $n - m$ неинтегрируемыми соотношениями вида

$$\dot q_\mu = \sum_{i=1}^{k} b_{\mu i}(q, t)\dot q_i + b_\mu(q, t) \; (\mu = m+1, \dots, n). \qquad (2.1)$$

Здесь

$$b_{\mu i}(q, t) = (b_{\mu i})_{q_\alpha = \omega_\alpha(t - t_0) + q_{\alpha 0}},$$

$$b_\mu(q, t) = \sum_{\beta=k+1}^{m} \omega_\beta (b_{\mu\beta})_{q_\alpha = \omega_\alpha(t - t_0) + q_{\alpha 0}}.$$

Кинетическая энергия полученной неголономной системы имеет вид $\hat T = \hat T(q, \dot q, t) = (T)_{q_\alpha = \omega_\alpha(t - t_0) + q_{\alpha 0}, \dot q_\alpha = \omega_\alpha}$, а силовая функция – вид $U = U(q)$ (напомним, что согласно (1.3) $U(q)$ не зависит от q_α). Очевидно, как и ранее, функции $T(q, \dot q, t)$, $U(q)$, $b_{\mu i}(q, t)$ и $b_\mu(q, t)$ не зависят от $n - m$ последних координат q_μ.

Уравнения движения полученной неголономной системы

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot q_i}=\frac{\partial T^*}{\partial q_i}+\frac{\partial U}{\partial q_i}+\sum_{j,h=1}^{k}\Gamma^*_{ijh}\dot q_j\dot q_h+\sum_{j=1}^{k}\Gamma^*_{ij}\dot q_j+\Gamma^*_i\ (i=1,\dots,k),\quad(2.2)$$

как и ранее, можно рассматривать независимо от уравнений связей (2.1). Здесь

$$T^*=\hat T_{(2.1)}=T_2^*+T_1^*+T_0^*,$$

$$T_2^*=\frac12\sum_{i,j=1}^{k}\tau_{ij}(q)\dot q_i\dot q_j,\quad T_1^*=\sum_{i=1}^{k}\tau_i(q,\omega)\dot q_i,\quad T_0^*=\tau(q,\omega),$$

$$\tau_i=\frac12\sum_{\alpha=k+1}^{m}(\tau_{i\alpha}+\tau_{\alpha i})\omega_\alpha,\quad \tau=\frac12\sum_{\alpha,\beta=k+1}^{m}\tau_{\alpha\beta}\omega_\alpha\omega_\beta,$$

$$\Gamma^*_{ijh}=\Gamma_{ijh},\quad \Gamma^*_{ij}=\sum_{\alpha=k+1}^{m}(\Gamma_{ij\alpha}+\Gamma_{i\alpha j})\omega_\alpha,\quad \Gamma^*_i=\sum_{\alpha,\beta=k+1}^{m}\Gamma_{i\alpha\beta}\omega_\alpha\omega_\beta.$$

(τ_{rs} и Γ_{rsp} имеют вид, указанный в п. 1).

Очевидно, при условиях (1.3) уравнения движения (2.2) не зависят явно от времени.

Уравнения (2.2) допускают решения (относительные положения равновесия) вида

$$q_i=q_{i0},\quad \dot q_i=0\ (i=1,\dots,k),\quad(2.3)$$

причем k постоянных q_{i0} удовлетворяют системе k уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial q_i}+\sum_{\alpha,\beta=k+1}^{m}\left(\frac12\frac{\partial\tau_{\alpha\beta}}{\partial q_i}+\Gamma_{i\alpha\beta}\right)\omega_\alpha\omega_\beta=0\ (i=1,\dots,k).\quad(2.4)$$

Сравнивая (2.4) и (1.5) и полагая в последних $\dot q_{\alpha0}=\omega_\alpha$, заключаем, что стационарным движениям (1.3) исходной системы (1.2) отвечают относительные положения равновесия системы (2.2) и наоборот.

Согласно [10] исследование устойчивости относительных положении равновесия (2.3) системы (2.2) сводится к исследованию устойчивости положения равновесия "приведенной" системы

$$A^*\ddot y+D^*\dot y+G^*\dot y+C^*y+E^*y=0.\quad(2.5)$$

Здесь y – k-мерный вектор, A^*, D^* и C^* – симметричные, а G^* и E^* кососимметричные $k\times k$-матрицы, причем

$$A^*=A,\ D^*=D,\ G^*=G,\ C^*=C,\ E^*=E$$

(коэффициенты матриц A, D, G, C и E приведены выше в п. 1).

Поскольку матрицы инерционных, диссипативно-ускоряющих, гироскопических, потенциальных и непотенциальных позиционных сил в приведенных системах (1.6) и (2.5) значительно различаются (соответственно на матрицы $\tilde A, \tilde D, \tilde G, \tilde C$ и $\tilde E$), то условия устойчивости положений равновесия в этих системах также могут существенно различаться. Следовательно, и условия устойчивости стационарных движений (1.4) системы (1.2) и относительных положений равновесия (2.3) системы (2.2) могут существенно различаться.

Сравним, например, матрицы потенциальных сил C_* и C^*. Их различие определяется матрицей $\tilde C$ ($C^*=C_*+\tilde C$), которую можно представить в виде $\tilde C=\tilde C_1+\tilde C_2$, где

$$\tilde C_1=\sum_{\alpha,\beta}a^{\alpha\beta}g_{i\beta}g_{\alpha j},\quad \tilde C_2=\sum_{\alpha,\beta}a^{\alpha\beta}d_{i\beta}d_{\alpha j}.$$

Поскольку $g_{\alpha i}=-g_{i\alpha}$, $d_{\alpha i}=d_{i\alpha}$, то все собственные значения матрицы $\tilde C_1$ неположительны, а матрицы $\tilde C_2$ неотрицательны. Таким образом, слагаемое $\tilde C_1$ способствует уменьшению коэффициентов устойчивости Пуанкаре в "приведенной" системе (2.5) по сравнению с "приведенной" системой (1.6), а слагаемое $\tilde C_2$ – их увеличению. Следовательно, возможны ситуации, когда, в отличие от голономных систем, измененная потенциальная энергия $1/2x'C_*x$ системы (1.6) имеет минимум, а измененная потенциальная энергия $1/2y'C^*y$ системы (2.5) минимума не имеет. Однако возможны, конечно, ситуации, когда, как и в голономных системах, минимум измененной потенциальной энергии системы (2.5) гарантирует минимум измененной потенциальной энергии системы (1.6) (например, это имеет место всегда, если все $d_{\alpha i}=0$).

3. В качестве примера рассмотрим задачу о путевой устойчивости автомобиля с упругими по Рокару колесами, для простоты пренебрегая угловыми перемещениями его передних колес и передней подвески ([11], стр. 414).

В этом случае уравнения движения автомобиля в окрестности его прямолинейного движения с постоянной скоростью v имеют вид

$$\begin{aligned}&m\ddot u+(a_1+a_2)v^{-1}\dot u-(l_1a_1-l_2a_2)v^{-1}\dot\theta+(a_1+a_2)\theta=U(u,\theta,\dot\theta),\\&m\rho^2\ddot\theta+(l_1^2a_1+l_2^2a_2)v^{-1}\dot\theta-(l_1a_1-l_2a_2)\theta-\\&\qquad-(l_1a_1-l_2a_2)v^{-1}\dot u=\Theta(u,\theta,\dot\theta).\end{aligned}\quad(3.1)$$

Здесь m – масса автомобиля, ρ – радиус инерции, l_1 и l_2 – расстояния от центра масс автомобиля до его передней и задней осей, a_1 и a_2 – коэффициенты сопротивления уводу передних и задних колес, u – возмущение скорости автомобиля, θ – угол между его продольной осью и направлением движения, U и Θ – нелинейные члены.

Согласно [11] устойчивость невозмущенного движения автомобиля имеет место при выполнении неравенства

$$(l_1 + l_2)^2 a_1 a_2 v^{-2} - m(l_1 a_1 - l_2 a_2) > 0, \tag{3.2}$$

которое, как нетрудно показать, определяет условие минимума измененной потенциальной энергии "приведенной" системы вида (1.6).

Если теперь предположить, что скорость автомобиля постоянна на всех движениях (для этого в правую часть первого уравнения системы (3.1) необходимо добавить такие силы, что $u \equiv 0$), то уравнения движения автомобиля в окрестности его прямолинейного движения примут вид

$$m\rho^2\ddot{\theta} + (l_1^2 a_1 + l_2^2 a_2)v^{-1}\dot{\theta} - (l_1 a_1 - l_2 a_2)\theta = \Theta(0, \theta, \dot{\theta}). \tag{3.3}$$

При этом измененная потенциальная энергия "приведенной" системы вида (2.5) имеет минимум и невозмущенное движение устойчиво при условии

$$-(l_1 a_1 - l_2 a_2) > 0. \tag{3.4}$$

Сравнивая (3.2) и (3.4), заключаем, что при выполнении второго из них первое также выполняется, но не наоборот. Неравенство (3.2) может выполняться и при условии $-(l_1 a_1 - l_2 a_2) < 0$, если при этом $v^2 < v_0^2$, где

$$v_0^2 = \frac{(l_1 + l_2)^2 a_1 a_2}{l_1 a_1 - l_2 a_2}.$$

Заметим, что хотя коэффициенты диссипативно-ускоряющих сил в "приведенных" системах вида (1.6) и (2.5) для данного примера также не совпадают

$$(d_* = [(\rho^2 + l_1^2)a_1 + (\rho^2 + l_2^2)a_2]v^{-1}, \; d^* = (l_1^2 a_1 + l_2^2 a_2)v^{-1}),$$

это различие не существенно (при $v > 0$ d_* и d^* положительны одновременно).

Литература

1. H. Poincarè. Sur l'equilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation//Acta math. – 1885. – V. 7. – P. 259–380.
2. Румянцев В.В. Об устойчивости равномерных вращений механических систем//Изв. АН СССР. ОТН, Механ. и машиностроение. – 1962. – № 6. – С. 113–121.
3. Степанов С.Я. О соотношении условий устойчивости при трех различных режимах циклических движений в системе//Пробл. аналит. мех., теорий устойчивости и управления. – Т. 2. – Казань: КАИ, 1976. – С. 303–308.
4. Pascal M. Sur la recherchè des mouvements stationaires dans les systemes ayant des variables cycliques.//Celest. Mech. – 1975. – V. 12. – P. 337–358.
5. Hagedorn P. On the stability of steady motions in free and restrained dynamical systems.//Trans. ASME, J. Appl. Mech. – 1979. – V. 46. – N 2. – P. 427–432.
6. Hagedorn P., Teschner W. An instability theorem for steady motions in free and restrained dynamical systems.//Trans. ASME, J. Appl. Mech. – 1980. – V. 47. – N 4. – P. 908–912.
7. Карапетян А.В. Об устойчивости стационарных движений неголономных систем Чаплыгина//ПММ. – 1978. – Т. 42. – Вып. 5. – С. 801–807.
8. Карапетян А.В. К вопросу об устойчивости стационарных движений неголономных систем//ПММ. – 1980. – Т. 44. – Вып. 3. – С. 418–426.
9. Карапетян А.В., Румянцев В.В. Устойчивость консервативных и диссипативных систем//Итоги науки и техники. Общая механика. – Т. 6. – М.: ВИНИТИ, 1983. – С. 3–128.
10. Карапетян А.В. Об устойчивости стационарных движений систем с неоднородными дифференциальными связями//Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. – М.: ВЦ АН СССР, 1986. – С. 77–85.
11. Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Динамика неголономных систем. – М.: Наука, 1967. – 520 с.

УДК 531.36

В.Н.РУБАНОВСКИЙ, Т.И.МАМНИАШВИЛИ

О ПЕРМАНЕНТНЫХ ВРАЩЕНИЯХ ГИРОСТАТА, ПОДВЕШЕННОГО НА СТЕРЖНЕ

Указан конус перманентных осей тяжелого гиростата, подвешенного на стержне.

1. Рассмотрим в однородном поле сил тяжести движение твердого тела, которое подвешено к неподвижной точке O_1 при помощи невесомого недеформируемого стержня и двух сферических шарниров, при этом другой конец стержня закреплен в произвольной точке O тела. Будем считать, что с телом неизменно связана ось вращения статически и динамически уравновешенного ротора, который вращается относительно тела с постоянной угловой скоростью.

Пусть $Cx_1x_2x_3$ – система координат с началом в центре масс C гиростата и осями, совпадающими с главными осями центрального тензора инерции $\bar{\Theta}$ гиростата. Введем обозначения: m – масса гиростата, $\bar{v}$ и $\bar{\omega}$ – скорость центра масс гиростата и мгновенная угловая скорость тела, $\bar{\gamma}$ и $\bar{\nu}$ – единичные векторы восходящей вертикали и направления стержня от точки O_1 к точке O, $a\bar{e}$ – радиус-вектор точки подвеса O относительно центра масс C, $\bar{e}$ – единичный вектор, $\bar{\kappa}$ – гиростатический момент гиростата, g и l – ускорение силы тяжести и длина стержня, N – реакция стержня, отнесенная к единице массы гиростата.

Уравнения движения гиростата, отнесенные к системе координат $Cx_1x_2x_3$, можно записать в виде

$$\frac{d\bar{v}}{dt} + \bar{\omega}\times\bar{v} = -g\bar{\gamma} + N\bar{\nu},$$

$$\frac{d\bar{\Theta}\cdot\bar{\omega}}{dt} + \bar{\omega}\times\bar{\Theta}\cdot\omega + \bar{\omega}\times\bar{\kappa} = maN\,(\bar{e}\times\bar{\nu}), \qquad (1.1)$$

$$\frac{d\bar{\gamma}}{dt} + \bar{\omega}\times\bar{\gamma} = 0, \quad \frac{dl\bar{\nu}}{dt} + \bar{\omega}\times l\bar{\nu} = \bar{v} + \bar{\omega}\times a\bar{e}.$$

Первые два из уравнений (1.1) выражают соответственно теорему о движении центра масс и теорему о моменте количеств движения относительно центра масс, третье – уравнение Пуассона, последнее – кинематическое соотношение, левая и правая части которого дают два различных выражения для скорости точки O.

Эти уравнения допускают первые интегралы

$$m\bar{v}^2 + \bar{\omega}\cdot\bar{\Theta}\cdot\bar{\omega} - 2mg\,(l\bar{\nu} - a\bar{e})\cdot\bar{\gamma} = \text{const},$$

$$[(l\bar{\nu} - a\bar{e})\times m\bar{v} + \bar{\Theta}\cdot\bar{\omega} + \bar{\kappa}]\cdot\bar{\gamma} = k = \text{const},$$

$$\bar{\gamma}\cdot\bar{\gamma} = 1, \quad \bar{\nu}\cdot\bar{\nu} = 1,$$

представляющие собой соответственно интегралы энергии, площадей и геометрические интегралы.

Другие интегралы уравнений (1.1) в общем случае неизвестны. Однако при определенных предположениях о распределении массы тела, положении точки подвеса O и ориентации относительно тела вектора гиростатического момента $\bar{\kappa}$ можно указать дополнительные первые интегралы и интегральные соотношения уравнений (1.1). Укажем два таких случая.

Пусть твердое тело обладает динамической симметрией, точка O находится на оси симметрии, а вектор $\bar{\kappa}$ параллелен этой оси. Тогда существует еще интеграл, выражающий постоянство проекции мгновенной угловой скорости на ось динамической симметрии тела.

Рассмотрим теперь второй случай. Для этого запишем второе из уравнений (1.1) в скалярной форме

$$J_1\frac{d\omega_1}{dt} + (J_3 - J_2)\,\omega_2\omega_3 + \kappa_3\omega_2 - \kappa_2\omega_3 = maN\,(e_2\nu_{3*} - e_3\nu_{2*}) \quad (123), \qquad (1.2)$$

где J_s ($s = 1, 2, 3$) – моменты инерции гиростата относительно осей x_s, а $\omega_s, \nu_{s*}, e_s, \kappa_s$ – проекции на оси x_s векторов ω, ν, e, κ.

Пусть выполнены соотношения

$$\frac{J_1 e_1}{(J_2 - J_1)e_3} = \frac{J_3 e_3}{(J_3 - J_2)e_1} = \mu, \quad e_2 = \kappa_2 = 0. \qquad (1.3)$$

Тогда умножая первое и третье из уравнений (1.2) соответственно на e_1 и e_3, складывая их, получим с учетом (1.3) уравнение

$$\mu\frac{d\Gamma}{dt} + \omega_2\Gamma = 0, \quad \Gamma = e_3(J_2 - J_1)\omega_1 + e_1(J_3 - J_2)\omega_3 + e_1\kappa_3 - e_3\kappa_1,$$

из которого получаем интегральное соотношение $\Gamma = 0$, аналогичное соотношению Гесса в задаче о движении тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой [1]. Отметим, что при $\bar{\kappa} = 0$ аналогичное соотношение для задачи о движении твердого тела, подвешенного на стержне, указано в [2].

Отметим, что в случае, когда точка O крепления стержня к телу совпадает с центром масс гиростата ($a = 0$), уравнения (1.1) полностью разделяются, движение центра масс и движение гиростата вокруг центра масс не зависят одно от другого. Центр масс C движется как сферический маятник вокруг точки O_1, а движение гиростата вокруг центра масс происходит как в случае уравновешенного гиростата, закрепленного в центре масс. Уравнения движения каждой из указанных задач интегрируются в эллиптических функциях времени [1, 3].

2. Среди действительных движений рассматриваемой механической системы имеются стационарные движения, при которых тело и стержень вращаются как одно твердое тело вокруг вертикальной неподвижной оси O_1y_3 с некоторой угловой скоростью Ω. Такие движения эквивалентны круговому движению центра масс C гиростата со скоростью ΩR, направленной в сторону вращения вокруг оси O_1y_3, где R – расстояние от точки C до оси O_1y_3, и вращению тела с угловой скоростью Ω вокруг вертикальной оси Cy_3', проходящей через центр масс. Последняя занимает в теле при стационарном движении неизменное положение, т.е. является перманентной осью. Представляет большой интерес нахождение стационарных движений гиростата, подвешенного на стержне, и в частности определение в теле геометрического места его осей перманентных вращений.

Стационарные движения найдем из условия стационарности измененной потенциальной энергии системы [4]

$$W = \frac{(k - \bar{\kappa}\cdot\bar{\gamma})^2}{J} + \Pi,$$

где k – постоянная интеграла площадей, J – момент инерции системы относительно оси O_1y_3, Π – потенциальная энергия сил тяжести.

Введем вспомогательную систему осей координат $O_1y_1y_2y_3$, вращающуюся вокруг направленной вертикально вверх оси y с угловой скоростью $\Omega = (k - \kappa\gamma)J^{-1}$. Обозначим через ν_j и τ_j проекции на оси y_j ($j = 1, 2, 3$)

векторов $\bar{\nu}$ и $\bar{e}$. Тогда для Π и J будем иметь выражения

$$\Pi = mg(l\nu_3 - a\tau_3),$$

$$J = J_1\gamma_1^2 + J_2\gamma_2^2 + J_3\gamma_3^2 + m[(l\nu_1 - a\tau_1)^2 + (l\nu_2 - a\tau_2)^2].$$

Поскольку переменные ν_j, τ_j, γ_j связаны очевидными соотношениями

$$V_1 = \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 - 1 = 0,\quad V_2 = \tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2 - 1 = 0,$$

$$V_3 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 - 1 = 0,\quad V_4 = e_1\gamma_1 + e_2\gamma_2 + e_3\gamma_3 - \tau_3 = 0, \tag{2.1}$$

то далее вместо W будем рассматривать функцию

$$2\Omega^2 W_* = 2W + \Omega^2(\lambda V_1 + \mu V_2 + \sigma V_3 + 2\rho V_4),$$

где

$$\Omega = (k - \kappa_1\gamma_1 - \kappa_2\gamma_2 - \kappa_3\gamma_3)J^{-1}, \tag{2.2}$$

а $\lambda, \mu, \sigma, \rho$ – неопределенные множители Лагранжа.

Уравнения стационарных движений системы, получаемые из условия стационарности функции W_* по отношению к введенным переменным, имеют вид

$$\frac{\partial W_*}{\partial \gamma_1} = -J_1\gamma_1 - \Omega^{-1}\kappa_1 + \sigma\gamma_1 + \rho e_1 = 0\ (123),$$

$$\frac{\partial W_*}{\partial \nu_3} = mgl\,\Omega^{-2} + \lambda\gamma_3 = 0,\quad \frac{\partial W_*}{\partial \tau_3} = -mga\,\Omega^{-2} + \mu\tau_3 - \rho = 0,$$

$$\frac{\partial W_*}{\partial \nu_1} = -ml(l\nu_1 - a\tau_1) + \lambda\nu_1 = 0,$$

$$\frac{\partial W_*}{\partial \tau_1} = ma(l\nu_1 - a\tau_1) + \mu\tau_1 = 0,$$

$$\frac{\partial W_*}{\partial \nu_2} = -ml(l\nu_2 - a\tau_2) + \lambda\nu_2 = 0,$$

$$\frac{\partial W_*}{\partial \tau_2} = ma(l\nu_2 - a\tau_2) + \mu\tau_2 = 0. \tag{2.3}$$

К этим уравнениям следует присоединить уравнения (2.1).

Последние четыре уравнения в (2.3) образуют независимую подсистему относительно ν_1, τ_1, ν_2, τ_2 и приводят к необходимости рассмотрения двух случаев, когда

$$\nu_1 = \nu_2 = \tau_1 = \tau_2 = 0 \tag{2.4}$$

или

$$(\lambda - ml^2)(\mu - ma^2) = (mal)^2. \tag{2.5}$$

Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

3. Пусть выполняются равенства (2.4). Тогда из уравнений (2.1) и соотношения (2.2) находим

$$\nu_3 = \pm 1, \quad \tau_3 = \pm 1, \quad \gamma_j = \tau_3 e_j \quad (j = 1, 2, 3),$$
$$\Omega = [k - \tau_3(e_1\kappa_1 + e_2\kappa_2 + e_3\kappa_3)]\,(J_1 e_1^2 + J_2 e_2^2 + J_3 e_3^2)^{-1},$$

где возможна любая комбинация знаков.

С учетом (3.1) первые три уравнения (2.3) примут вид

$$J_1 e_1 - (\sigma + \tau_3 \rho) e_1 + \tau_3 \Omega^{-1} \kappa_1 = 0 \ (123).$$

Условие совместности этих уравнений приводит к соотношению

$$\begin{vmatrix} J_1 e_1 & e_1 & \kappa_1 \\ J_2 e_2 & e_2 & \kappa_2 \\ J_3 e_3 & e_3 & \kappa_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \sum_{(123)} \kappa_1 (J_2 - J_3) e_2 e_3 = 0, \tag{3.2}$$

при выполнении которого из приведенных уравнений находим

$$\frac{J_2 e_2 \kappa_3 - J_3 e_3 \kappa_2}{e_2 \kappa_3 - e_3 \kappa_2} = \frac{J_3 e_3 \kappa_1 - J_1 e_1 \kappa_3}{e_3 \kappa_1 - e_1 \kappa_3} = \frac{J_1 e_1 \kappa_2 - J_2 e_2 \kappa_1}{e_1 \kappa_2 - e_2 \kappa_1} = \sigma + \tau_3 \rho. \tag{3.3}$$

Наконец, из четвертого и пятого уравнений (2.3) получаем

$$\lambda = -\nu_3\, mgl\, \Omega^{-2}, \quad \mu = \tau_3 (\rho + mga\, \Omega^{-2}), \tag{3.4}$$

где ρ произвольно.

Итак, соотношения (2.4) и (3.1) описывают четыре однопараметрических семейства равномерных вращений системы вокруг оси $O_1 y_3$ с угловой скоростью Ω, в которых стержень и отрезок CO вертикальны, при этом точка O может находиться как ниже ($\nu_3 = -1$), так и выше ($\nu_3 = 1$) точки O_1, а центр масс C – ниже ($\tau_3 = 1$) или выше ($\tau_3 = -1$) точки O. Для этих движений гиростатический момент должен удовлетворять условию (3.2), которое при заданных значениях параметров J_j, κ_j ($j = 1, 2, 3$) представляет собой уравнение неизменно связанного с телом конуса второго порядка, на котором должен лежать радиус-вектор точки подвеса O относительно центра масс гиростата.

4. Рассмотрим теперь случай (2.5). Из четвертого и пятого уравнений (2.3) находим

$$\tau_1 = \frac{ml^2 - \lambda}{mal}\,\nu_1, \quad \tau_2 = \frac{ml^2 - \lambda}{mal}\,\nu_2.$$

Отсюда следует, что проекции векторов $\bar{\nu}$ и $\bar{e}$ на горизонтальную плоскость $y_3 = 0$ коллинеарны. Поэтому в стационарном движении гиростата точки O_1, O и C, а также стержень и перманентная ось находятся в одной и той же вертикальной плоскости независимо от положения в теле оси вращения ротора и величины его угловой скорости. Для одного тела (без ротора), подвешенного на струне, этот замечательный факт установлен в [5]. Как и в случае твердого тела с неподвижной точкой [6], будем называть эту плоскость центральной вертикальной плоскостью.

Не ограничивая общности, будем далее предполагать, что центральная вертикальная плоскость совпадает с плоскостью $y_2 = 0$, тогда

$$\nu_2 = \tau_2 = 0, \tag{4.1}$$

и последние два уравнения в (2.3) удовлетворяются тождественно. Из шестого и седьмого уравнений (2.3) получаем для λ и μ выражения

$$\lambda = \frac{ml(l\nu_1 - a\tau_1)}{\nu_1}, \quad \mu = -\frac{ma(l\nu_1 - a\tau_1)}{\tau_1}, \tag{4.2}$$

которые тождественно удовлетворяют соотношению (2.5). Из четвертого и пятого уравнений (2.3) находим

$$\Omega^{-2} = -\frac{(l\nu_1 - a\tau_1)\nu_3}{g\nu_1}, \quad \rho = \frac{ma(l\nu_1 - a\tau_1)}{\nu_1 \tau_1}\,(\tau_1 \nu_3 - \tau_3 \nu_1) \tag{4.3}$$

а из первых трех

$$\Omega^{-1} = \frac{D_1}{D}, \quad \rho = \frac{D_2}{D}, \quad \sigma = \frac{D_3}{D}, \tag{4.4}$$

где

$$D = \begin{vmatrix} \gamma_1 & e_1 & \gamma_1 \\ \kappa_2 & e_2 & \gamma_2 \\ \kappa_3 & e_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \qquad D_1 = \begin{vmatrix} J_1\gamma_1 & \gamma_1 & e_1 \\ J_2\gamma_2 & \gamma_2 & e_2 \\ J_3\gamma_3 & \gamma_3 & e_3 \end{vmatrix},$$
$$D_2 = \begin{vmatrix} J_1\gamma_1 & \gamma_1 & \kappa_1 \\ J_2\gamma_2 & \gamma_2 & \kappa_2 \\ J_3\gamma_3 & \gamma_3 & \kappa_3 \end{vmatrix}, \qquad D_3 = \begin{vmatrix} J_1\gamma_1 & \kappa_1 & e_1 \\ J_2\gamma_2 & \kappa_2 & e_2 \\ J_3\gamma_3 & \kappa_3 & e_3 \end{vmatrix}. \tag{4.5}$$

Теперь из сопоставления выражений для Ω^{-2} и Ω^{-1} в (4.3) и (4.4), а также выражений для ρ, даваемых теми же формулами, получаем соотношения

$$\frac{D_1^2}{D^2} = \frac{(l\nu_1 - a\tau_1)\nu_3}{g\nu_1}, \quad \frac{D_2}{D} = \frac{ma(l\nu_1 - a\tau_1)}{\nu_1\tau_1}(\tau_1\nu_3 - \tau_3\nu_1),$$

которые представим в виде

$$\nu_3 = \frac{g\nu_1 D_1^2}{(l\nu_1 - a\tau_1)D^2}, \quad \nu_3 = \frac{\nu_1[\tau_1 D_2 + ma(l\nu_1 - a\tau_1)\tau_3 D]}{ma(l\nu_1 - a\tau_1)\tau_1 D}. \tag{4.4}$$

В результате приравнивания правых частей выражений (4.4) получаем уравнение, из которого находим

$$\nu_1 = \frac{\tau_1(ma^2\tau_3 D^2 - mgaD_1^2 - DD_2)}{\tau_3 mal\, D^2}. \tag{4.5}$$

Наконец, возводя первое из уравнений (4.4) в квадрат и подставляя в него значения $\nu_3 = 1 - \nu_1^2$ и $\tau_3 = e_1\gamma_1 + e_2\gamma_2 + e_3\gamma_3$ из (2.1) с учетом (4.1) и значение ν_1 из (4.5), получим уравнение

$$[DD_2 + mgaD_1^2 - ma^2(e_1\gamma_1 + e_2\gamma_2 + e_3\gamma_3)D^2][(DD_2 + mgaD_1^2)^2 -$$
$$-(e_1\gamma_i + e_2\gamma_3 + e_3\gamma_3)^2(DD_2 + 2mgaD_1^2)DD_2] =$$
$$= (mal)^2(e_1\gamma_1 + e_2\gamma_2 + e_3\gamma_3)^2(DD_2 + mgaD_1^2)D^4. \tag{4.6}$$

Этим уравнением определяется линия пересечения с единичный сферой $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$ конуса осей перманентных вращений гиростата, подвешенного на стержне.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

Пусть ротор не вращается относительно тела или отсутствует; тогда $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 0$, $D = D_2 = 0$, и уравнение (4.6) приводится к виду $D_1 = 0$. Это уравнение представляет собой указанный В.В. Румянцевым [7] конус осей перманентных вращений твердого тела, подвешенного на струне, аналогичный конусу Штауде [6] осей перманентных вращений тяжелого твердого тела с одной закрепленной точкой.

Пусть теперь точка подвеса O совпадает с центром масс C гиростата; тогда $a = 0$ и уравнение (4.6) приводится к виду $D_2 = 0$. Это уравнение представляет собой конус осей перманентных вращений уравновешенного гиростата, указанный В.В. Румянцевым [8].

Рассмотрим еще случай, когда $l = 0$ (тело закреплено в точке O); тогда уравнение (4.6) приводится к виду

$$mgaD_1^2 + DD_2 - ma^2(e_1\gamma_1 + e_2\gamma_2 + e_3\gamma_3)D^2 = 0$$

и определяет линию пересечения с единичной сферой $V_3 = 0$ конуса осей перманентных вращений тяжелого гиростата с одной неподвижной точкой. Если это уравнение записать в системе координат $Ox_1'x_2'x_3'$ с началом в точке O и осями x_s', параллельными осям x_s, то оно будет аналогично уравнению, указанному П.В. Харламовым для тяжелого гиростата [9].

Литература

1. Суслов Г.К. Теоретическая механика. - М.-Л.: Гостехиздат, 1944. - 655 с.

2. Буров А.А. О частном интеграле в задаче о движении тяжелого твердого тела, подвешенного на стержне//Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. - М.: ВЦ АН СССР, 1986. - С. 93-95.

3. Volterra V. Sur la théorie des variations des latitudes // Acta math. - 1899. - V. 22. - P. 257-273.

4. Румянцев В.В. Об устойчивости стационарных движений спутников. - М.: ВЦ АН СССР, 1967. - 142 с.

5. Ишлинский А.Ю., и др. О стационарных движениях подвешенного на струне твердого тела при вертикальном расположении одной из его главных центральных осей инерции// Изв. АН СССР. МТТ. - 1980. - № 2. - С. 34-45.

6. Граммель Р. Гироскоп, его теория и применения. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1952. 352 с.

7. Румянцев В.В. К динамике твердого тела, подвешенного на струне//Изв. АН СССР. МТТ. - 1983. - № 4. - С. 5-15.

8. Румянцев В.В. Об устойчивости движения гиростатов. ПММ. - 1961. - Т. 25. - Вып. 1. - С. 9-16.

9. Харламов П.В. О равномерных вращениях тела, имеющего неподвижную точку//ПММ. - 1965. - Т. 29. - Вып. 2. - С. 373-375.

УДК 531.36

В.Н. РУБАНОВСКИЙ, К.С. РСЫМБЕТОВ

ОБ ОТНОСИТЕЛЬНОМ РАВНОВЕСИИ НА КРУГОВОЙ ОРБИТЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ГИБКИМ УПРУГИМ СТЕРЖНЕМ

Рассматривается движение в центральном ньютоновском поле сил твердого тела с тонким гибким упругим стержнем, который может изгибаться только в одной плоскости, неизменно связанной с твердым телом. Для описания деформации стержня использована точная теория упругого изгиба тонкого стержня (полоски) в одной плоскости [1]. Исследуются относительные равновесия системы, в которых стержень находится в недеформированном состоянии и направлен соответственно по радиусу-вектору, касательной и бинормали орбиты центра масс системы. Получены достаточные условия устойчивости относительных равновесий на основе анализа второй вариации измененной потенциальной энергии системы.

1. Рассмотрим в центральном ньютоновском поле сил движение твердого тела с прямолинейным тонким нерастяжимым упругим стержнем. Пренебрегая влиянием относительного движения системы на движение ее центра масс, будем считать, что последний равномерно движется по кеплеровой круговой орбите с угловой скоростью Ω.

Введем правые прямоугольные системы осей координат: орбитальную $Cxyz$ с началом в центре масс C системы и осями, направленными по касательной, бинормали и радиусу-вектору орбиты соответственно, и связанную $Ox_1x_2x_3$, имеющую начало в центре масс O твердого тела и оси, направленные по осям его центрального эллипсоида инерции. Пусть $\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3$ – единичные векторы, направленные по осям x_1, x_2, x_3. Орты осей y и z обозначим через $\bar{\beta}$ и $\bar{\gamma}$, а их проекции на оси x_1, x_2, x_3 – через $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ и $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$; эти величины связаны соотношениями

$$\chi_1 = \bar{\gamma}\cdot\bar{\gamma} - 1 = 0, \quad \chi_2 = \bar{\beta}\cdot\bar{\beta} - 1 = 0, \quad \chi_3 = \bar{\gamma}\cdot\bar{\beta} = 0. \qquad (1.1)$$

Будем считать, что стержень длины l защемлен в теле в точке A_0, лежащей на оси x_3 и отстоящей от точки O на расстоянии a, и в недеформированном состоянии располагается вдоль оси x_3, при этом для точек оси стержня $a \le x_3 \le a + l$. Кроме того, будем предполагать, что стержень может изгибаться только в плоскости Ox_1x_3.

Обозначим через $x_1(t, s)$, $x_3(t, s)$ координаты точки A упругой линии стержня, положение которой определяется дуговой координатой s, отсчитываемой от точки A_0 вдоль оси стержня, а через θ угол, который образует с осью x_3 касательная к упругой линии в точке A. Тогда будем иметь

$$x_1(t, s) = \int_0^s \sin\theta d\xi, \quad x_3(t, s) = a + \int_0^s \cos\theta d\xi. \qquad (1.2)$$

Для потенциальной энергии упругой деформации стержня имеем выражение [1]

$$\Pi_d = \frac{1}{2}\int_0^l EI\theta'^2 ds \quad \left(\theta' = \frac{\partial\theta}{\partial s}\right), \qquad (1.3)$$

где E – модуль упругости (модуль Юнга), I – осевой момент инерции площади поперечного сечения, EI – жесткость стержня при изгибе.

Выражение для потенциальной энергии сил притяжения Π_g, вычисленной с точностью до членов порядка l^3R^{-3}, где R – радиус-орбиты, имеет вид [2]

$$\Pi_g = \frac{1}{2}\Omega^2(3\bar{\gamma}\cdot\bar{\Theta}^c\cdot\bar{\gamma} - \mathrm{sp}\,\bar{\Theta}^c),$$

где $\bar{\Theta}^c$ – тензор инерции системы для точки C с компонентами, вычисленными в системе координат $Ox_1x_2x_3$:

$$\theta_{11} = J_1 - Mx_{3c}^2 + \rho\sigma\int_0^l x_3^2(t, s)ds,$$

$$\theta_{22} = J_2 - M(x_{3c}^2 + x_{1c}^2) + \rho\sigma\int_0^l [x_3^2(t, s) + x_1^2(t, s)]ds,$$

$$\theta_{33} = J_3 - Mx_{1c}^2 + \rho\sigma\int_0^l x_1^2(t, s)ds,$$

$$\theta_{13} = Mx_{1c}x_{3c} - \rho\sigma\int_0^l x_1(t, s)x_3(t, s)ds, \quad \theta_{12} = \theta_{23} = 0. \qquad (1.4)$$

Здесь M, J_1, J_2, J_3 – масса и главные центральные моменты инерции системы в ее недеформированном состоянии, ρ – плотность стержня, x_{1c}, x_{2c}, x_{3c} – проекции радиуса-вектора $\bar{r}_c$ центра масс системы относительно точки O, вычисляемые по формулам

$$x_{1c} = \frac{\rho\sigma}{M}\int_0^l x_1(t, s)\,ds = \frac{\rho\sigma}{M}\int_0^l (l-\xi)\sin\theta\,d\xi,\quad x_{2c}=0,$$
$$x_{3c} = \frac{\rho\sigma}{M}\int_0^l x_3(t, s)\,ds = \frac{m}{M}a + \frac{\rho\sigma}{M}\int_0^l (l-\xi)\cos\theta\,d\xi, \tag{1.5}$$

где m – масса стержня.

Рассматриваемая механическая система допускает обобщенный интеграл энергии $T + W = \mathrm{const}$, где T – кинетическая энергия системы в ее движении относительно орбитальной системы осей координат, а

$$W = \frac{1}{2}\Omega^2[3\bar\gamma\cdot\bar\Theta^c\cdot\bar\gamma - \bar\beta\cdot\bar\Theta^c\cdot\bar\beta - \mathrm{sp}\,\bar\Theta^c] + \Pi_d \text{ –} \tag{1.6}$$

потенциальная энергия гравитационных, центробежных и упругих сил [2].

Поскольку векторы $\bar\gamma$ и $\bar\beta$ связаны соотношениями (1.1), то далее вместо W будем рассматривать функционал

$$W_* = W + \frac{1}{2}\Omega^2(-3\pi_1\chi_1 + \pi_2\chi_2 + 2\pi_3\chi_3),$$

где π_1, π_2, π_3 – неопределенные множители Лагранжа.

2. Найдем положения относительного равновесия системы. Уравнения относительного равновесия и естественные граничные условия получим из принципа возможных перемещений, вычислив и приравняв нулю первую вариацию δW_*. Для δW_* имеем выражение

$$(\Omega^2 ml^2)^{-1}\delta W_* = (ml^2)^{-1}[(3\Theta^c\bar\gamma - 3\pi_1\bar\gamma + \pi_3\bar\beta)\,\delta\bar\gamma +$$
$$+(\pi_2\bar\beta + \pi_3\bar\gamma - \Theta^c\bar\beta)\,\delta\beta] + \kappa\theta'(1)\,\delta\theta(1) + \int_0^1\{-\kappa\theta'' -$$
$$-\mu(1-s)\,(3\gamma_1^2 + 3\gamma_2^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2 - 2)\sin\theta + (3\gamma_1\gamma_3 - \beta_1\beta_3)\cos\theta] +$$
$$+\cos\theta\int_0^1 K(s, \xi)[(3\gamma_2^2 + 3\gamma_3^2 - \beta_2^2 - \beta_3^2 - 2)\sin\theta -$$
$$-(3\gamma_1\gamma_3 - \beta_1\beta_3)\cos\theta]\,d\xi - \sin\theta\int_0^1 K(s, \xi)[(3\gamma_1^2 + 3\gamma_2^2 -$$
$$-\beta_1^2 - \beta_2^2 - 2)\cos\theta - (3\gamma_1\gamma_3 - \beta_1\beta_3)\sin\theta]\,d\xi +$$
$$+\varepsilon\mu(1-s)[(3\gamma_1^2 + 3\gamma_2^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2 - 2)\sin\theta +$$
$$+(3\gamma_1\gamma_3 - \beta_1\beta_3)\cos\theta] - \varepsilon(1-s)[(3\gamma_2^2 + 3\gamma_3^2 -$$
$$-\beta_2^2 - \beta_3^2 - 2)\cos\theta + (3\gamma_1\gamma_3 - \beta_1\beta_3)\sin\theta]\int_0^1(1-\xi)\sin\theta\,d\xi +$$

$$+\varepsilon(1-s)[(3\gamma_1^2 + 3\gamma_2^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2 - 2)\sin\theta +$$
$$+(3\gamma_1\gamma_3 - \beta_1\beta_3)\cos\theta]\int_0^1(1-\xi)\cos\theta\,d\xi\}\,\delta\theta\,ds.$$

Здесь выполнен переход к безразмерной дуге s, $0 \le s \le 1$ и введены обозначения

$$\varepsilon = \frac{m}{M},\ \mu = \frac{a}{l},\ \kappa = \frac{EI}{m\Omega^2 l^3},\ K(s,\eta) = \begin{cases} 1-s, & \text{если } \eta \le s,\\ 1-\eta, & \text{если } \eta \ge s.\end{cases} \tag{2.2}$$

Из равенства $\delta W_* = 0$ получаем искомые уравнения относительного равновесия системы

$$3\Theta^c\cdot\bar\gamma - 3\pi_1\bar\gamma + \pi_3\bar\beta = 0,$$
$$-\Theta^c\cdot\bar\beta + \pi_2\bar\beta + \pi_3\bar\gamma = 0, \tag{2.3}$$

$$\kappa\frac{\partial^2\theta}{\partial s^2} + \sin\theta\int_0^1 K(s,\xi)[(3\gamma_1^2 + 3\gamma_2^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2 - 2)\cos\theta -$$
$$-(3\gamma_1\gamma_3 - \beta_1\beta_3)\sin\theta]\,d\xi - \cos\theta\int_0^1 K(s,\xi)[(3\gamma_2^2 + 3\gamma_3^2 - \beta_2^2 - \beta_3^2 - 2)\sin\theta -$$
$$-(3\gamma_1\gamma_3 - \beta_1\beta_3)\cos\theta]\,d\xi + \mu(1-s)[(3\gamma_1^2 + 3\gamma_2^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2 - 2)\sin\theta +$$
$$+(3\gamma_1\gamma_3 - \beta_1\beta_3)\cos\theta] + \varepsilon(1-s)\{[(3\gamma_2^2 + 3\gamma_3^2 - \beta_2^2 - \beta_3^2 - 2)\cos\theta +$$
$$+(3\gamma_1\gamma_3 - \beta_1\beta_3)\sin\theta]\int_0^1(1-\xi)\sin\theta\,d\xi - [(3\gamma_1^2 + 3\gamma_2^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2 - 2)\sin\theta +$$
$$+(3\gamma_1\gamma_3 - \beta_1\beta_3)\cos\theta\int_0^1(1-\xi)\cos\theta\,d\xi - \mu[(3\gamma_1^2 + 3\gamma_2^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2 - 2)\sin\theta +$$
$$+(3\gamma_1\gamma_3 - \beta_1\beta_3)\cos\theta]\} = 0, \tag{2.4}$$

$$\theta(0) = 0,\quad \theta'(1) = 0. \tag{2.5}$$

К этим уравнениям следует присоединить еще уравнения (1.1).

С учетом уравнений (1.1) уравнение (2.4) можно представить в виде

$$\kappa\theta'' + \sin\theta\int_0^1 K(s,\xi)[(\beta_3^2 - 3\gamma_3^2)\cos\theta + (\beta_1\beta_3 - 3\gamma_1\gamma_3)\sin\theta]\,d\xi -$$
$$-\cos\theta\int_0^1 K(s,\xi)[(\beta_1^2 - 3\gamma_1^2)\sin\theta + (\beta_1\beta_3 - 3\gamma_1\gamma_3)\cos\theta]\,d\xi +$$

$$+\mu(1-s)[(\beta_3^2-3\gamma_3^2)\sin\theta+(3\gamma_1\gamma_3-\beta_1\beta_3)\cos\theta]+$$
$$+\varepsilon(1-s)\{[(\beta_1^2-3\gamma_1^2)\cos\theta+(3\gamma_1\gamma_3-\beta_1\beta_3)\sin\theta\int_0^1(1-\xi)\sin\theta\,d\xi-$$
$$-[(\beta_3^2-3\gamma_3^2)\sin\theta+(3\gamma_1\gamma_3-\beta_1\beta_3)\cos\theta\int_0^1(1-\xi)\cos\theta\,d\xi-$$
$$-\mu[(\beta_3^2-3\gamma_3^2)\sin\theta+(3\gamma_1\gamma_3-\beta_1\beta_3)\cos\theta]\}=0. \qquad (2.6)$$

Из уравнений (2.3) и (1.1) находим

$$\pi_1=\bar{\gamma}\cdot\bar{\Theta}^c\cdot\bar{\gamma},\quad \pi_2=\bar{\beta}\cdot\bar{\Theta}^c\cdot\bar{\beta},\quad \pi_3=-\bar{\gamma}\cdot\bar{\Theta}^c\cdot\bar{\beta}. \qquad (2.7)$$

3. Уравнения (2.3), (2.6), (2.7) и (1.1) допускают следующие решения:

$$\gamma_1=\gamma_2=\beta_1=\beta_3=0,\quad \gamma_3=\pm 1,\quad \beta_2=1,\quad \theta(s)\equiv 0,$$
$$\pi_1=\theta_{33}^0,\quad \pi_2=\theta_{22}^0,\quad \pi_3=0, \qquad (3.1)$$
$$\gamma_1=\gamma_2=\beta_2=\beta_3=0,\quad \gamma_3=\pm 1,\quad \beta_1=1,\quad \theta(s)\equiv 0, \qquad (3.2)$$
$$\pi_1=\theta_{33}^0,\quad \pi_2=\theta_{11}^0,\quad \pi_3=0,$$
$$\gamma_1=\gamma_3=\beta_2=\beta_3=0,\quad \gamma_2=\beta_1=1,\quad \theta(s)\equiv 0,$$
$$\pi_1=\theta_{22}^0,\quad \pi_2=\theta_{11}^0,\quad \pi_3=0, \qquad (3.3)$$
$$\gamma_2=\gamma_3=\beta_1=\beta_3=0,\quad \gamma_2=1,\quad \beta_2=-1,\quad \theta(s)\equiv 0,$$
$$\pi_1=\theta_{11}^0,\quad \pi_2=\theta_{22}^0,\quad \pi_3=0, \qquad (3.4)$$
$$\gamma_2=\gamma_3=\beta_1=\beta_2=0,\quad \gamma_1=\beta_3=1,\quad \theta(s)\equiv 0, \qquad (3.5)$$
$$\pi_1=\theta_{11}^0,\quad \pi_2=\theta_{33}^0,\quad \pi_3=0,$$
$$\gamma_1=\gamma_3=\beta_1=\beta_2=0,\quad \gamma_2=-1,\quad \beta_3=1,\quad \theta(s)\equiv 0, \qquad (3.6)$$
$$\pi_1=\theta_{22}^0,\quad \pi_2=\theta_{33}^0,\quad \pi_3=0,$$

где

$$\theta_{11}^0=J_1+\frac{1}{12}\varepsilon Ml^2[1+3(1-\varepsilon)(1+2\mu)^2],$$
$$\theta_{22}^0=J_2+\frac{1}{12}\varepsilon Ml^2[1+3(1-\varepsilon)(1+2\mu)^2],\quad \theta_{33}^0=J_3. \qquad (3.7)$$

Этим решениям отвечают положения относительного равновесия на круговой орбите твердого тела с упругим стержнем, для которых он находится в недеформированном состоянии и направлен по радиусу-вектору орбиты для (3.1) и (3.2) в направлении к центру (от центра) притяжения для $\gamma_3=-1$ ($\gamma_3=1$), по касательной к орбите для (3.3) и (3.4) и по бинормали к орбите для (3.5) и (3.6). Плоскость изгибных колебаний Ox_1x_3 стержня совпадает с плоскостью орбиты для (3.1) и (3.4), перпендикулярна к плоскости орбиты и проходит через радиус-вектор орбиты для (3.2) и (3.5) и перпендикулярна к плоскости орбиты и проходит через касательную к орбите для (3.3) и (3.6).

Исследуем устойчивость найденных относительных равновесий. Обозначим через u, ξ_i, η_i вариации переменных θ, γ_i, β_i ($i=1,2,3$) соответственно. Условия устойчивости получим как условия положительной определенности на линейном многообразии, определяемом уравнениями

$$\delta\chi_1=\delta\chi_2=\delta\chi_3=0$$

второй вариации $\delta^2 W_*$ для решений (3.1)-(3.6) в метрике, по отношению к которой функционал W_* непрерывен.

Обозначим символом $(\delta^2 W_*)$ значение $\delta^2 W_*$ на линейном многообразии (3.8). Тогда для решения (3.1) будем иметь

$$(\omega^2 ml^2)^{-1}(\delta^2 W_*)=(ml^2)^{-1}W_1(\xi,\eta)+2W_2(\xi,\eta,u)+W_3(u),$$
$$W_1=(\theta_{22}^0-\theta_{11}^0)\eta_1^2+3(\theta_{11}^0-\theta_{33}^0)\xi_1^2+4(\theta_{22}^0-\theta_{33}^0)\xi_2^2,$$
$$W_2=-\frac{3}{2}\gamma_3\xi_1\int_0^1(1-s)[s+(1-\varepsilon)(1+2\mu)]u\,ds,$$
$$W_3=\int_0^1\{\kappa u'^2+3[\mu(1-s)+\frac{1}{2}(1-s^2)]u^2\}ds.$$

Представим $(\delta^2 W_*)$ в виде, не содержащим члена, линейного по u и зависящего от ξ_1 [3, 4]. Для этого обозначим через $u_*(s)$ функцию, реализующую экстремум по u функционала $2W_2(\xi,\eta,u)+W_3(u)$ при фиксированных значениях ξ и η. Для определения $u_*(s)$ из соотношения $\delta_u(2W_2+W_3)=0$, где варьирование осуществляется по u, получаем краевую задачу

$$\kappa u_*''-\frac{3}{2}(1-s)(1+2\mu+s)u_*=-\frac{3}{2}\gamma_3\xi_1(1-s)[s+(1-\varepsilon)(1+2\mu)],$$
$$u_*(0)=u_*'(1)=0.$$

Решение этой задачи ищем в виде [3] $u_*(s)=\gamma_3\xi_1 u^*(s)$, при этом для $u^*(s)$ имеем краевую задачу

$$\kappa u^{*''} - \frac{3}{2}(1-s)(1+2\mu+s)u^* = -\frac{3}{2}(1-s)[s+(1-\varepsilon)(1+2\mu)],$$

$$u^*(0) = u^{*\prime}(1) = 0. \qquad (3.9)$$

Сделаем теперь замену $u = u_*(s) + v$; тогда будем иметь [3, 4]

$$(\Omega^2 ml^2)^{-1}(\delta^2 W_*) = (ml^2)^{-1}[(\theta^0_{22} - \theta^0_{11})\eta_1^2 + 3(\theta^0_{11} - \theta^0_{33} - bml^2)\xi_1^2 + 4(\theta^0_{22} - \theta^0_{33})\xi_2^2] + W_3(v), \qquad (3.10)$$

где

$$3b = W_3(u^*) = \frac{3}{2}\int_0^1 (1-s)[s+(1-\varepsilon)(1+2\mu)]u^*(s)ds > 0. \qquad (3.11)$$

Отсюда заключаем, что условия положительной определенности второй вариации $(\delta^2 W_*)$ слагаются из условий положительной определенности квадратичной формы относительно переменных η_1, ξ_1, ξ_2 и функционала $W_3(u)$. Последний функционал в силу (3.8) является положительно-определенным. Условия положительной определенности квадратичной формы в (3.9) приводятся к неравенствам

$$\theta^0_{22} > \theta^0_{33},\ \theta^0_{22} > \theta^0_{11},\ \theta^0_{11} > \theta^0_{33} + bml^2, \qquad (3.12)$$

которые представляют собой достаточные условия устойчивости относительных равновесий (3.1). Отметим, что эти условия не зависят от знака величины $\gamma_3 = \pm 1$, т.е. не зависят от того – в какую сторону (к центру притяжения или от центра притяжения) направлен свободный конец стержня.

Исследуем теперь устойчивость равновесия (3.2). Для него имеем следующие выражения, аналогичные (3.8)–(3.11):

$$W_1 = 4(\theta^0_{11} - \theta^0_{33})\xi_1^2 + 3(\theta^0_{22} - \theta^0_{33})\xi_2^2 + (\theta^0_{11} - \theta^0_{22})\eta_2^2,$$

$$W_2 = -2\xi_1\int_0^1 (1-s)[s+(1-\varepsilon)(1+2\mu)]u\,ds,$$

$$W_3 = \int_0^1 \{\kappa u'^2 + \frac{3}{2}(1-s)(1+2\mu+s)u^2 + u\int_0^1 K(s,\xi)u\,d\xi\}ds,$$

$$\kappa u^{*''} - \frac{3}{2}(1-s)(s+1+2\mu)u^* - \int_0^1 K(s,\xi)u^*(\xi)\,d\xi =$$

$$= -(1-s)[s+(1-\varepsilon)(1+2\mu)],\ u^*(0) = u^{*\prime}(1) = 0,$$

при этом

$$(\Omega^2 ml^2)^{-1}(\delta^2 W_*) = (ml^2)^{-1}[4(\theta^0_{11} - \theta^0_{33} - bml^2)\xi_1^2 + 3(\theta^0_{22} - \theta^0_{33})\xi_2^2 + (\theta^0_{11} - \theta^0_{22})\eta_2^2] + W_3(v),$$

где

$$b = \int_0^1 [(1-\varepsilon)(1+2\mu)+s](1-s)u^*(s)ds.$$

Отсюда заключаем, что достаточные условия устойчивости равновесия (3.2) приводятся к неравенствам

$$\theta^0_{11} > \theta^0_{33} + bml^2,\ \theta^0_{22} > \theta^0_{33},\ \theta^0_{11} > \theta^0_{22}$$

и требованию определенной положительности функционала $W_3(u)$.

Для равновесия (3.3) имеем следующие аналогичные выражения:

$$W_1 = 4(\theta^0_{11} - \theta^0_{22})\xi_1^2 + 3(\theta^0_{33} - \theta^0_{22})\xi_3^2 + (\theta^0_{11} - \theta^0_{33})\eta_3^2,$$

$$W_2 = \frac{1}{2}\eta_3\int_0^1 (1-s)[s+(1-\varepsilon)(1+2\mu)]u\,ds.$$

$$W_3 = \int_0^1 [\kappa u'^2 + u\int_0^1 K(s,\xi)u\,d\xi]\,ds,$$

$$\kappa u^{*''} - \int_0^1 K(s,\xi)u^*d\xi = \frac{1}{2}\eta_3(1-s)[s+(1-\varepsilon)(1+2\mu)],$$

$$u^*(0) = u^{*\prime}(1) = 0,\ u(s) = -\eta_3 u^*(s),$$

$$(\Omega^2 ml^2)^{-1}(\delta^2 W_*) = (ml^2)^{-1}[4(\theta^0_{11} - \theta^0_{22})\xi_1^2 + 3(\theta^0_{33} - \theta^0_{22})\xi_3^2 + (\theta^0_{11} - \theta^0_{33} - bml^2)\eta_3^2] + W_3(v),$$

где

$$b = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-s)[s+(1-\varepsilon)(1+2\mu)]u^*ds.$$

Достаточные условия устойчивости равновесия (3.3) приводятся к неравенствам

$$\theta^0_{11} > \theta^0_{22},\ \theta^0_{33} > \theta^0_{22},\ \theta^0_{11} > \theta^0_{33} + bml^2$$

и требованию определенной положительности функционала $W_3(u)$.

Аналогично для равновесия (3.4) имеем

$$W_1 = 4(\theta^0_{22} - \theta^0_{11})\xi_2^2 + 3(\theta^0_{33} - \theta^0_{11})\xi_3^2 + (\theta^0_{22} - \theta^0_{33})\eta_3^2,$$

$$W_2 = -\frac{3}{2}\xi_3\int_0^1 (1-s)[s+(1-\varepsilon)(1+2\mu)]u\,ds,$$

$$W_3 = \int_0^1 [\kappa u'^2 - 3u \int_0^1 K(s, \xi) u d\xi] ds,$$

$$\kappa u^{*\prime\prime} + 3\int_0^1 K(s, \xi) u^* d\xi = -3(1-s)[s + (1-\varepsilon)(1+2\mu)]$$

$$u^*(0) = u^{*\prime}(1) = 0$$

при этом

$$u_*(s) = \xi_3 u^*(s)$$

$$(\Omega^2 ml^2)^{-1}(\delta^2 W_*) = (ml^2)^{-1}[4(\theta^0_{22} - \theta^0_{11})\xi_2^2 + 3(\theta^0_{33} - \theta^0_{11} - bml^2)\xi_3^2 + (\theta^0_{22} - \theta^0_{33})\eta_3^2] + W_3(v),$$

где

$$b = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-s)[s + (1-\varepsilon)(1+2\mu)]u^* ds.$$

Достаточные условия устойчивости равновесия (3.4) приводятся к неравенствам

$$\theta^0_{22} > \theta^0_{11}, \ \theta^0_{22} > \theta^0_{33}, \ \theta^0_{33} > \theta^0_{11} + bml^2$$

и требованию определенной положительности функционала $W_3(u)$.

Для равновесия (3.5) имеем

$$W_1 = 3(\theta^0_{22} - \theta^0_{11})\xi_2^2 + 4(\theta^0_{33} - \theta^0_{11})\xi_3^2 + (\theta^0_{33} - \theta^0_{22})\eta_2^2,$$

$$W_2 = -2\xi \int_0^1 (1-s)[s + (1-\varepsilon)(1+2\mu)] u ds,$$

$$W_3 = \int_0^1 [\kappa u'^2 - \frac{1}{2}(1-s)(1+2\mu+s)u^2 - 3u \int_0^1 K(s, \xi) u d\xi] ds,$$

$$\kappa u^{*\prime\prime} + \frac{1}{2}(1-s)(1+2\mu+s)u^* + 3\int_0^1 K(s, \xi) u d\xi = -(1-s)[s + (1-\varepsilon)(1+2\mu)],$$

$$u^*(0) = u^{*\prime}(1) = 0, \ u_* = 2\xi_3 u^*,$$

$$(\Omega^2 ml^2)^{-1}(\delta^2 W_*) = (ml^2)^{-1}[3(\theta^0_{22} - \theta^0_{11})\xi_2^2 + 4(\theta^0_{33} - \theta^0_{11} - bml^2)\xi_1^2 + (\theta^0_{33} - \theta^0_{22})\eta_2^2] + W_3(v),$$

где $b = \int_0^1 (1-s)[s + (1-\varepsilon)(1+2\mu)]u^* ds.$

Достаточные условия устойчивости равновесия (3.5) приводятся к неравенствам

$$\theta^0_{22} > \theta^0_{11}, \ \theta^0_{33} > \theta^0_{22}, \ \theta^0_{33} > \theta^0_{11} + bml^2$$

и требованию определенной положительности функционала $W_3(u)$.

Наконец, для равновесия (3.6) имеем

$$W_1 = 3(\theta^0_{11} - \theta^0_{22})\xi_1^2 + 4(\theta^0_{33} - \theta^0_{22})\xi_3^2 + (\theta^0_{33} - \theta^0_{11})\eta_1^2,$$

$$W_2 = \frac{1}{2}\eta_1 \int_0^1 (1-s)[s + (1-\varepsilon)(1+2\mu)] u ds,$$

$$W_3 = \int_0^1 [\kappa u'^2 - \frac{1}{2}(1-s)(1+2\mu+s)u^2 + u \int_0^1 K(s, \xi) u d\xi] ds,$$

$$\kappa u^{*\prime\prime} + \frac{1}{2}(1-s)(1+2\mu+s)u^* - \int_0^1 K(s, \xi) u^* d\xi = -\frac{1}{2}(1-s)[s + (1-\varepsilon)(1+2\mu)],$$

$$u^*(0) = u^*(1) = 0, \ u_* = -\eta_1 u^*,$$

$$(\Omega^2 ml^2)^{-1}(\delta^2 W_*) = (ml^2)^{-1}[3(\theta^0_{11} - \theta^0_{22})\xi_1^2 + 4(\theta^0_{33} - \theta^0_{2})\xi_3^2 + (\theta^0_{33} - \theta^0_{11} - bml^2)\eta_1^2] + W_3(v),$$

где $b = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-s)[s + (1-\varepsilon)(1+2\mu)]u^* ds.$

Достаточные условия устойчивости равновесия (3.6) приводятся к неравенствам

$$\theta^0_{11} > \theta^0_{22}, \ \theta^0_{33} > \theta^0_{22}, \ \theta^0_{33} > \theta^0_{11} + bml^2$$

и требованию определенной положительности функционала $W_3(u)$.

Литература

1. Попов Е.П. Теория и расчет гибких упругих стержней. – М.: Наука, 1986. – 296 с.

2. Рубановский В.Н. Устойчивость относительного равновесия на круговой орбите твердого тела с упругими стержнями, совершающими изгибно-крутильные колебания. Теоретичка и приложна механика. № 2. София, С. 19–29.

3. Морозов В.М., Рубановский В.Н., Румянцев В.В., Самсонов В.А. О бифуркации и устойчивости установившихся движений сложных механических систем//ПММ. – 1973. – Т. 37. – Вып. 3. – С. 387–399.

4. Морозов В.М., Рубановский В.Н. Некоторые задачи об устойчивости стационарных движений твердого тела с деформируемыми элементами//Научные тр. ин-та механики МГУ. 1973. – Т. 14, № 22. – С. 109–168.

УДК 531.36; 517.968

В.С. СЕРГЕЕВ

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ ПАРЫ ЧИСТО МНИМЫХ КОРНЕЙ

Рассматриваются интегродифференциальные уравнения типа Вольтерра с ядрами экспоненциально-полиномиального вида и голоморфными нелинейными членами. Предполагается, что характеристическое уравнение имеет пару чисто мнимых корней и остальные корни с отрицательными вещественными частями. На основании теоремы Четаева [1] устанавливаются условия неустойчивости, обобщающие условия, известные в теории устойчивости дифференциальных уравнений [2]. Исследуемые уравнения могут служить приближением для интегродифференциальных уравнений, изучаемых в моделях аэроупругости [3, 4].

1. Будем исследовать устойчивость нулевого решения интегродифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \int_{t_0}^{t} K(t-s)x(s)ds + F(x,t), \tag{1.1}$$

в котором $x \in R^n$ ($x = \mathrm{col}\,(x_1,\dots,x_n)$), $t \in I = \{t \geq t_0\}$,

$$K(t) = \sum_{s=1}^{q} \sum_{p=0}^{r} Q^{(s,p)} t^{p} \exp(\beta_s t), \quad A,\ Q^{(s,p)} - n \times n -$$

постоянные матрицы и $A = (a_{ij})$, $K(t) = (K_{ij}(t))$. Вектор-функция $F(x,t) = \mathrm{col}\,(F_1(x,t),\dots$ $\dots, F(x,t))$, заданная на множестве $G = \{(x,t) \in R^n \times I : \|x\| \leq H\}$ для некоторого $H > 0$, является голоморфной по x, непрерывной, ограниченной по t, и ее разложение в окрестности нуля начинается с квадратичных членов. Предполагается, что коэффициенты $f^{(l)}(t)$ (l – произвольный

набор индексов) разложения $F(x,t)$ удовлетворяют условию: $f^{(l)}(t) = f_0^{(l)} + f_1^{(l)}(t)$, где $f_0^{(l)}$ – const и $\|f_1^{(l)}(t)\| \leq C\exp(-\gamma t)$ ($C > 0$, $\gamma > 0$ – const). Рассмотрим устойчивость по отношению к начальным значениям $x(t_0)$.

Пусть λ'_k ($k = 1,\dots,L$) – корни характеристического уравнения [5]

$$\det\Big(A - \lambda E_n + \sum_{s=1}^{q}\sum_{p=0}^{r} (-1)^{p+1} \frac{p!\,Q^{(s,p)}}{(\beta_s-\lambda)^{p+1}}\Big) = 0, \tag{1.2}$$

отвечающего (1.1), $\lambda'_k \neq \beta_s$, и пусть λ_j ($j = 1,\dots,n$) – характеристические показатели нормальной по Ляпунову [2, 5] фундаментальной системы решений линейного уравнения; матрицу этой системы решений обозначим через $X'(t,t_0)$. Занумеруем λ'_k в порядке возрастания вещественных частей.

Будем считать, что λ'_k и λ_j удовлетворяют следующим условиям:

а) $\lambda'_{L-1} = -i\lambda_0$, $\lambda'_L = i\lambda_0$ ($\lambda_0 > 0$), $\mathrm{Re}\,\lambda'_s < 0$ ($s = 1,\dots,L-2$),

б) $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{n-1} = \lambda_n = 0$,

в) $\mathrm{Re}\,\lambda'_p < \lambda_1$ ($p = 1,\dots,L-n$),

из которых вытекает, что $\lambda'_{L-n+k} = \lambda_k$ для $k = 1,\dots,n-2$.

Общее решение [5] линеаризованного уравнения (1.1) запишем в вещественной форме в виде

$$x_j = \sum_{k=1}^{n-2} c_k(\Delta_j(\lambda_k)\exp[\lambda_k(t-t_0)] + B_{jk}(t)) +$$
$$+ c_{n-1}(u_j\cos\lambda_0(t-t_0) - v_j\sin\lambda_0(t-t_0) + B_{jn-1}(t)) +$$
$$+ c_n(v_j\cos\lambda_0(t-t_0) + u_j\sin\lambda_0(t-t_0) + B_{jn}(t)),$$
$$B_{jk}(t) = \sum_{p=1}^{L-n} b_{jk}^{(p)}(t)\exp[\lambda'_p(t-t_0)],\ j = 1,\dots,n, \tag{1.3}$$

$$u_k = \frac{1}{2}(\Delta_k(i\lambda_0) + \Delta_k(-i\lambda_0)),\quad v_k = \frac{1}{2i}(\Delta_k(i\lambda_0) - \Delta_k(-i\lambda_0)),$$

где c_k – произвольные постоянные, $\Delta_j(\lambda)$ – алгебраические дополнения элементов с индексом j какой-либо фиксированной строки определителя в (1.2), $b_{jk}^{(p)}(t)$ – целые функции, заданные для $t \in I$ такие, что характеристические показатели $\chi(b_{jk}^{(p)}(t)) = 0$. Частные решения, составляющие (1.3), образуют матрицу $X'(t, t_0)$ фундаментальной системы решений, нормальной по Ляпунову.

Введем следующие определения.

Будем говорить, что заданная для всех $t \in I$ функция $\varphi(t)$ принадлежит классу e_1 ($\varphi(t) \in e_1$), если $\varphi(t) \to 0$ экспоненциально при $t \to +\infty$.

Будем говорить, что функция $f(t, s)$, определенная на множестве $J = \{t_0 \le s \le t < +\infty\}$, принадлежит классу $e_2(\alpha)$, если на J справедлива оценка

$$\| f(t, s) \| \le C \exp[\alpha(t - s)], \quad C > 0, \quad \alpha - \text{const}.$$

В дальнейшем будем считать, что при $t \in I$

$$|d| > d_0 > 0, \; d_0 - \text{const}, \tag{1.4}$$

где

$$d = \det X'(t, t_0) \exp\left[-\sum_{k=1}^{n-2} \lambda_k (t - t_0)\right].$$

На основании (1.3) получим

$$d = \Delta + \bar{\Delta}(t),$$

причем $\bar{\Delta}(t) \in e_1$ и

$$\Delta = \begin{vmatrix} \Delta_1(\lambda_1), \ldots, \Delta_1(\lambda_{n-2}); u_1, v_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta_n(\lambda_1), \ldots, \Delta_n(\lambda_{n-2}), u_n, v_n \end{vmatrix}.$$

Из (1.4) вытекает, что $\Delta \ne 0$.

В дальнейшем существенную роль будет играть свойство правильности [2, 6, 7] уравнения (1.1).

Справедливо следующее утверждение.

Лемма.

Пусть выполнены условия а), б), в), (1.4). Тогда уравнение (1.1) является правильным.

В силу условия (1.4) можно ввести базис, взаимный к базису пространства решений линейного уравнения для (1.1), и его матрицу $Y'(t, t_0) = (y'_{ij}(t, t_0))$, сопряженную $X'(t, t_0)$, т.е. удовлетворяющую условию

$$Y'(t, t_0) X'(t, t_0) = E_n.$$

Сделаем в уравнении (1.1) замену переменных

$$y_k = x_k, \quad k = 1, \ldots, n,$$

$$y_p = \sum_{j=1}^{n} y'_{pj}(t, t_0) x_j, \quad p = n-1, n. \tag{1.5}$$

Пусть при $t \in I$ выполнено неравенство

$$|\delta| \ge \delta_0 > 0, \quad \delta_0 - \text{const}, \tag{1.6}$$

где

$$\delta = \begin{vmatrix} y'_{n-1\,n-1}(t, t_0), & y'_{n-1\,n}(t, t_0) \\ y'_{n\,n-1}(t, t_0), & y'_{nn}(t, t_0) \end{vmatrix},$$

тогда уравнения (1.5) разрешимы относительно x_{n-1}, x_n, и справедливо представление $\delta = \delta' + \delta''(t)$, причем $\delta' \ne 0$ – const и $\delta''(t) \in e_1$. Разрешив (1.5), получим

$$x_{n-1} = \Big[-\sum_{k=1}^{n-2} (y'_{n-1k}(t, t_0) y'_{nn}(t, t_0) - y'_{nk}(t, t_0) y'_{n-1n}(t, t_0)) y_k +$$
$$+ y'_{nn}(t, t_0) y_{n-1} - y'_{n-1n}(t, t_0) y_n\Big]/\delta, \tag{1.7}$$

$$x_n = \Big[\sum_{k=1}^{n-2} (y'_{n-1k}(t, t_0) y'_{nn-1}(t, t_0) - y'_{nk}(t, t_0) y'_{n-1n-1}(t, t_0)) y_k -$$
$$- y'_{nn-1}(t, t_0) y_{n-1} + y'_{n-1n-1}(t, t_0) y_n\Big]/\delta.$$

Учитывая структуру матриц $X'(t, t_0), Y'(t, t_0)$, запишем далее формулы (1.7) в виде

$$x_{n-1} = \Big[\sum_{k=1}^{n-2} D_{n-1k}(t) y_k + (-\delta'_n \cos\lambda_0(t - t_0) + \delta''_n \sin\lambda_0(t - t_0) +$$
$$+ d_{n-1}(t)) y_{n-1} - (\delta'_n \sin\lambda_0(t - t_0) + \delta''_n \cos\lambda_0(t - t_0) + d_n(t)) y_n\Big]/(\Delta\delta'),$$

$$x_n = \Big[\sum_{k=1}^{n-2} D_{nk}(t) y_k + (\delta_{n-1} \cos\lambda_0(t - t_0) - \delta''_{n-1} \sin\lambda_0(t - t_0) +$$
$$+ d'_{n-1}(t)) y_{n-1} + (\delta'_{n-1} \sin\lambda_0(t - t_0) + \delta''_{n-1} \cos\lambda_0(t - t_0) + \tag{1.8}$$
$$+ d'_n(t)) y_n\Big]/(\Delta\delta'),$$

где

$$D_{n-1k}(t) = \delta''_k \delta'_n - \delta'_k \delta''_n + d_k(t), \quad D_{nk}(t) = \delta'_k \delta''_{n-1} - \delta''_k \delta'_{n-1} + d'_k(t),$$

$$\delta'_k = \varepsilon_k \begin{vmatrix} \Delta_1(\lambda_1) \ldots \Delta_1(\lambda_{n-2}) u_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta_{k-1}(\lambda_1) \ldots \Delta_{k-1}(\lambda_{n-2}) u_{k-1} \\ \Delta_{k+1}(\lambda_1) \ldots \Delta_{k+1}(\lambda_{n-2}) u_{k+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta_n(\lambda_1) \ldots \Delta_n(\lambda_{n-2}) u_n \end{vmatrix}, \quad \delta''_k = \varepsilon_k \begin{vmatrix} \Delta_1(\lambda_1) \ldots \Delta_1(\lambda_{n-2}) v_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta_{k-1}(\lambda_1) \ldots \Delta_{k-1}(\lambda_{n-2}) v_{k-1} \\ \Delta_{k+1}(\lambda_1) \ldots \Delta_{k+1}(\lambda_{n-2}) v_{k+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta_n(\lambda_1) \ldots \Delta_n(\lambda_{n-2}) v_n \end{vmatrix},$$

$\varepsilon_k = (-1)^{n+k-1}$ и функции $d_k(t) \in e_1$, $d_k'(t) \in e_1$.

2. Уравнение (1.1) заменой (1.5) преобразуется в систему уравнений

$$\frac{dy}{dt} = B(t)y + \int_{t_0}^{t} K'(t, s)y(s)ds - \sum_{k=n-1,n} (b^{(k)}(t)y_k + \int_{t_0}^{t} k^{(k)}(t, s)y_k(s)ds) - F'(y, y_{n-1}, y_n, t), \tag{2.1}$$

$$\frac{dy_p}{dt} = \sum_{j=1}^{n} (\int_{t_0}^{t} \varphi_{pj}(t, s)F_j'(y(s), y_{n-1}(s), y_n(s), s)ds + y'_{pj}(t, t_0)F_j'(y, y_{n-1}, y_n, t)), \quad p = n-1, n, \tag{2.2}$$

$$\varphi_{pj}(t, s) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t}(y'_{pk}(t, t_0)x_{kj}(t, s)),$$

в которой $y = \mathrm{col}\,(y_1, \ldots, y_{n-2})$, $b^{(k)}(t) = \mathrm{col}\,(b_1^{(k)}(t), \ldots, b_{n-2}^{(k)}(t))$, $B(t) = (b_{kj}(t))$, $K'(t, s) = (K'_{kj}(t, s))$, $k^{(k)}(t, s) = \mathrm{col}\,(K_1^{(k)}(t, s), \ldots, K_{n-2}^{(k)}(t, s))$, $F' = \mathrm{col}\,(F_1', \ldots, F_{n-2}')$, $F_s'(y, y_{n-1}, y_n, t) = F_s(x(y, y_{n-1}, y_n, t), t)$, причем $x(y, y_{n-1}, y_n, t)$ – преобразование, обратное для (1.5). В уравнениях (2.2) $x_{ij}(t, s)$ – элементы матрицы $X(t, s)$ ($X(t, t) = E_n$) фундаментальной системы решений линеаризованного уравнения (1.1) с нижним пределом интегрирования s. Как известно [5], в рассматриваемом случае $x_{ij}(t, s) = \bar{x}_{ij}(t - s)$. В (2.1), (2.2) использованы следующие обозначения:

$$b_{kj}(t) = a_{kj} - a_{kn-1}(y'_{n-1j}(t, t_0)y'_{nn}(t, t_0) - y'_{nj}(t, t_0)y'_{n-1n}(t, t_0))/\delta - a_{kn}(y'_{nj}(t, t_0)y'_{n-1n-1}(t, t_0) - y'_{n-1j}(t, t_0)y'_{nn-1}(t, t_0))/\delta,$$

$$b_k^{(n-1)}(t) = (a_{kn-1}y'_{nn}(t, t_0) - a_{kn}y'_{nn-1}(t, t_0))/\delta,$$

$$b_k^{(n)}(t) = (-a_{kn-1}y'_{n-1n}(t, t_0) + a_{kn}y'_{n-1n-1}(t, t_0))/\delta,$$

$$K'_{kj}(t, s) = K_{kj}(t-s) - K_{kn-1}(t-s)(y'_{n-1j}(t, t_0)y'_{nn}(t, t_0) - y'_{nj}(t, t_0)y'_{n-1n}(t, t_0))/\delta - K_{kn}(t-s)(y'_{nj}(t, t_0)y'_{n-1n-1}(t, t_0) - y'_{n-1j}(t, t_0)y'_{nn-1}(t, t_0))/\delta, \tag{2.3}$$

$$K_j^{(n-1)}(t, s) = (K_{jn-1}(t-s)y'_{nn}(t, t_0) - K_{jn}(t-s)y'_{nn-1}(t, t_0))/\delta,$$

$$K_j^{(n)}(t, s) = (-K_{jn-1}(t-s)y'_{n-1n}(t, t_0) + K_{jn}(t-s)y'_{n-1n-1}(t, t_0))/\delta.$$

Оценим интегральные ядра в уравнениях (2.2). Учитывая (1.3) и структуру функций $\bar{x}_{kj}(t - s)$, $y'_{kj}(t, t_0)$, будем иметь

$$\sum_{i=1}^{n} y'_{n-1i}(t, t_0)x_{ij}(t, s) = C_j' \cos \lambda_0(t_0 - s) + C_j'' \sin \lambda_0(t_0 - s) + \xi_j(t, s), \tag{2.4}$$

где C_j', C_j'' – постоянные и $\xi_j(t, s) \in e_2(\lambda_{n-2})$. Аналогичным образом получаем

$$\sum_{i=1}^{n} y'_{ni}(t, t_0)x_{ij}(t, s) = -(C_j' \sin \lambda_0(t_0 - s) + C_j'' \cos \lambda_0(t_0 - s)) + \xi_j'(t, s), \tag{2.5}$$

где $\xi_j'(t, s) \in e_2(\lambda_{n-2})$. Итак, на основании (2.4), (2.5) приходим к заключению, что

$$\varphi_{ij}(t, s) \in e_2(\lambda_{n-2}), \quad i = n-1, n; \; j = 1, \ldots, n. \tag{2.6}$$

Коэффициенты $\varphi^{(l)}(t)$ разложений в степенные ряды всех функций $F_j'(y, y_{n-1}, y_n, t)$ в (2.1), (2.2), стоящих вне знака интеграла, ввиду (1.5), (1.8) допускают представление

$$\varphi^{(l)}(t) = \varphi_0^{(l)} + \varphi_1^{(l)}(t), \tag{2.7}$$

где $\varphi_0^{(l)}$ – постоянные, если набор индексов l не содержит n или $n-1$, и полиномы от $\sin \lambda_0(t - t_0)$, $\cos \lambda_0(t - t_0)$, если в набор индексов входит n или $n-1$, $\varphi_1^{(l)}(t) \in e_1$.

Отметим также, что компоненты векторов $b^{(n-1)}(t)$, $b^{(n)}(t)$ (2.3) имеют следующую структуру:

$$b_j^{(n-1)}(t) = [a_{jn-1}(-\delta_n' \cos \lambda_0(t - t_0) + \delta_n'' \sin \lambda_0(t - t_0)) + a_{jn}(\delta'_{n-1} \cos \lambda_0(t - t_0) - \delta''_{n-1} \sin \lambda_0(t - t_0))]/\Delta + \bar{b}_j^{(n-1)}(t), \tag{2.8}$$

$$b_j^{(n)}(t) = [-a_{jn-1}(\delta_n' \sin \lambda_0(t - t_0) + \delta_n'' \cos \lambda_0(t - t_0)) + a_{jn}(\delta'_{n-1} \sin \lambda_0(t - t_0) + \delta''_{n-1} \cos \lambda_0(t - t_0))]/\Delta + \bar{b}_j^{(n)}(t),$$

где $\bar{b}_j^{(k)}(t) \in e_1$, $k = n-1, n$; $j = 1, \ldots, n-2$.

Ввиду ограниченности матрицы фундаментальной системы решений линеаризованного уравнения (2.1) приходим к выводу, что $\|k^{(k)}(t, s)\|$ ($k = n-1, n$) ограничена при $(t, s) \in J$ и что

$$k^{(k)}(t, s) \in e_2(-\beta_0), \tag{2.9}$$

где $-\beta_0 < 0$ – наибольший из показателей экспонент, входящих в функции $K_{jn-1}(t)$, $K_{jn}(t)$ ($j = 1, \ldots, n-2$).

3. Рассмотрим линеаризованное уравнение (2.1). Матрица $X_2'(t, t_0)$, получаемая из $X'(t, t_0)$ вычеркиванием двух последних строк и столбцов, представляет собой матрицу нормальной по Ляпунову фундаментальной системы решений уравнения

$$\frac{dy}{dt} = B(t)y + \int_{t_0}^{t} K'(t, s)y(s)ds. \tag{3.1}$$

Пусть при $t \in I$

$$\det X_2'(t, t_0) \neq 0. \tag{3.2}$$

Обозначим через $Y_2'(t, t_0)$ матрицу, сопряженную $X_2'(t, t_0)$, т.е. $Y_2'(t, t_0)X_2'(t, t_0) = E_{n-2}$, и сделаем замену переменных

$$z = \exp[\Lambda_2(t - t_0)]Y_2'(t, t_0)y, \tag{3.3}$$

где $z = \mathrm{col}(z_1, \ldots, z_{n-2})$, $\Lambda_2 = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-2})$.

Тогда, принимая во внимание лемму 1 работы [7], получим систему, состоящую из уравнений (2.2) и уравнения

$$\frac{dz}{dt} = \Lambda_2 z + \exp[\Lambda_2(t - t_0)]\{Y_2'(t, t_0)\Theta(y, y_{n-1}, y_n, t) + \int_{t_0}^{t} \varphi(t, s)\Theta(y(s), y_{n-1}(s), y_n(s), s)ds\}, \tag{3.4}$$

$$\Theta(y(t), y_{n-1}(t), y_n(t), t) = \sum_{k=n-1,n} (b^{(k)}(t)y_k(t) + \int_{t_0}^{t} k^{(k)}(t, \tau)y_k(\tau)d\tau) + F'(y(t), y_{n-1}(t), y_n(t), t),$$

$$\varphi(t, s) = \frac{\partial}{\partial t}(Y_2'(t, t_0)X_2(t, s)),$$

в котором $X_2(t, s)$ – матрица фундаментальной системы решений уравнения (3.1) с нижним пределом интегрирования s такая, что $X_2(t, t) = E_{n-2}$, и переменные $y_1, \ldots y_{n-2}$ заменены на $z_1, \ldots, z_{n-2}$ согласно (3.3). В правой части уравнения (3.4) все интегральные ядра относятся к классу $e_2(-\alpha_0)$, где $\alpha_0 = \min(|\lambda_{n-2}|, \beta_0)$, и коэффициенты $h^{(l)}(t)$ разложений в ряды по z_i $(i = 1, \ldots, n-2)$, y_{n-1}, y_n всех функций, стоящих вне знака интеграла, имеют на основании (2.7), (3.3) структуру

$$h^{(l)}(t) = h_0^{(l)}(t) + h_1^{(l)}(t), \tag{3.5}$$

где $h_0^{(l)}(t)$ – полином от $\sin\lambda_0(t - t_0)$, $\cos\lambda_0(t - t_0)$ и $h_1^{(l)} \in e_1^0$.

4. Исключим интегрированием по частям из уравнений (3.4) линейные интегральные члены, заменив при этом dy_k/dt $(k = n-1, n)$ на правую часть уравнения (2.2), выраженную через z, y_{n-1}, y_n, t и обозначаемую далее через $Z_k(t)$.

Положим

$$h_1^{(k)}(t, s) = \int_{t_0}^{s} k^{(k)}(t, \tau)d\tau, \quad k = n-1, n,$$

$$h_2^{(k)}(t, s) = \int_{t_0}^{s} \varphi(t, \tau)(b^{(k)}(\tau) + h_1^{(k)}(\tau, \tau))d\tau,$$

$$h_3^{(k)}(t) = \exp[\Lambda_2(t - t_0)]Y_2'(t, t_0)b^{(k)}(t) - R_1^{(k)}(t, t), \tag{4.1}$$

$$R_1^{(k)}(t, s) = -\exp[\Lambda_2(t - t_0)](h_2^{(k)}(t, s) + Y_2'(t, t_0)h_1^{(k)}(t, s)),$$

$$R_2(t, s) = -\exp[\Lambda_2(t - t_0)]\varphi(t, s),$$

$$R_3^{(k)}(t, s) = R_1^{(k)}(t, s) + \int_{s}^{t} R_2(t, \tau)h_1^{(k)}(\tau, s)d\tau.$$

После преобразований получим уравнение

$$\frac{dz}{dt} = \Lambda_2 z + \sum_{k=n-1,n} h_3^{(k)}(t)y_k + \int_{t_0}^{t} (\sum_{k=n-1,n} R_3^{(k)}(t, s)Z_k(s) - R_2(t, s)\Phi(z(s), y_{n-1}(s), y_n(s), s))ds + \Phi'(z, y_{n-1}, y_n, t), \tag{4.2}$$

$$\Phi'(z, y_{n-1}, y_n, t) = \exp[\Lambda_2(t - t_0)]Y_2'(t, t_0)\Phi(z, y_{n-1}, y_n, t),$$

$$\Phi(z, y_{n-1}, y_n, t) = F'(y(z, t), y_{n-1}, y_n, t),$$

где $y(z, t)$ – преобразование, обратное для (3.3).

Функции (4.1) согласно (2.3), (2.8), (2.9) обладают следующими свойствами:

$$h_1^{(k)}(t, \tau) \in e_2(-\beta_0), \quad R_2^{(k)}(t, \tau) \in e_2(\lambda_{n-2}), \tag{4.3}$$

$$R_p^{(k)}(t, \tau) \in e_2(-\alpha_0), \quad k = n-1, n; \ p = 1, 3, \tag{4.4}$$

и $h_1^{(k)}(t, t)$, $h_3^{(k)}(t)$ допускают представление типа (3.5).

Выделим в правой части уравнения (4.2) в явном виде квадратичные члены по z_j $(j = 1, \ldots, n-2)$, y_{n-1}, y_n. С этой целью представим правые части уравнений (2.2) в виде

$$Z_i(t) = \sum_{k,j=n-1,n} p_{kj}^{(i)}(t)y_k y_j + \sum_{j=n-1,n} p_j^{(i)T}(t)zy_j + z^T p^{(i)}(t)z + \int_{t_0}^{t} (\sum_{k,j=n-1,n} \bar{p}_{kj}^{(i)}(t, s)y_k(s)y_j(s) +$$

$$+\sum_{j=n-1,n} \bar{p}_j^{(i)T}(t,s)z(s)y_j(s) +$$

$$+ z^T(s)\bar{p}^{(i)}(t,s)z(s))ds + P_i(z, y_{n-1}, y_n, t),$$

где $P_i(z, y_{n-1}, y_n, t)$ $(i = n-1, n)$ таковы, что разложения в ряд по ε для $P_i(\varepsilon z, \varepsilon y_{n-1}, \varepsilon y_n, t)$ начинаются с квадратичных членов. Воспользуемся также следующими представлениями:

$$R_2(t,s)\Phi(z, y_{n-1}, y_n, s) \equiv -\Big(\sum_{k,j=n-1,n} q_{kj}(t,s)y_k y_j +$$

$$+\sum_{k=n-1,n} q_k(t,s)zy_k + q(z,z,t,s) + Q(z, y_{n-1}, y_n, t, s)\Big),$$

$$\Phi'(z, y_{n-1}, y_n, t) \equiv \sum_{k,j=n-1,n} q'_{kj}(t)y_k y_j + \sum_{k=n-1,n} q'_k(t)zy_k +$$

$$+ q'(z,z,t) + Q'(z, y_{n-1}, y_n, t), \tag{4.6}$$

$$q(z_1, z_2, t, s) = \mathrm{col}\,(z_1^T q^{(1)}(t,s)z_2, \ldots, z_1^T q^{(n-2)}(t,s)z_2),$$

$$q'(z_1, z_2, t) = \mathrm{col}\,(z_1^T q'^{(1)}(t)z_2, \ldots, z_1^T q'^{(n-2)}(t)z_2),$$

причем $q^{(i)}(t,s)$, $q'^{(i)}(t)$ – $(n-2)\times(n-2)$ – симметрические матрицы. Операторы Q, Q' удовлетворяют условию, что разложения в ряд по ε для $Q(\varepsilon z, \varepsilon y_{n-1}, \varepsilon y_n, t, s)$, $Q'(\varepsilon z, \varepsilon y_{n-1}, \varepsilon y_n, t)$ не содержат линейных и квадратичных членов. Функции $\bar{p}_{kj}^{(i)}(t,s)$, вектор-функции $\bar{p}_j^{(i)}(t,s)$, $q_{ps}(t,s)$ и матрицы $\bar{p}^{(i)}(t,s)$, $q_p(t,s)$, $q^{(i)}(t,s)$ $(p, s = n, n-1;\ i = 1,\ldots, n-2)$ в (4.5), (4.6) согласно (2.6), (4.3) принадлежит классу $e_2(-\alpha_0)$, а функции $p_{kj}^{(i)}(t)$, элементы матриц $p^{(i)}(t)$, $q'_p(t)$, $q'^{(i)}(t)$ и вектор-функций $p_j^{(i)}(t)$, $q'_{ps}(t)$ допускают представление типа (3.5).

Поменяв порядок интегрирования в двойном интеграле, представим уравнение (4.2) с учетом (4.5), (4.6) в виде

$$\frac{dz}{dt} = \Lambda_2 z + \sum_{j=n-1,n}(h_3^{(j)}(t)y_j + q_j^*(t)zy_j) + \sum_{k,j=n-1,n} q_{kj}^*(t)y_k y_j +$$

$$+ q'(z,z,t) + \int_{t_0}^{t}\Big(\sum_{k,j=n-1,n} R_{kj}(t,\tau)y_k(\tau)y_j(\tau) + \sum_{j=n-1,n} R'_j(t,\tau)z(\tau)y_j(\tau) +$$

$$+ R(z,z,t,\tau)\Big)d\tau + P(z, y_{n-1}, y_n, t),$$

где

$$R_{ij}(t,\tau) = \sum_{p=n-1,n}\Big(R_3^{(p)}(t,\tau)p_{ij}^{(p)}(\tau) + \int_{\tau}^{t} R_3^{(p)}(t,s)\bar{p}_{ij}^{(p)}(s,\tau)ds\Big) + q_{ij}(t,\tau),$$

$$R'_i(t,\tau) = \sum_{p=n-1,n}\Big(R_3^{(p)}(t,\tau)p_i^{(p)T}(\tau) + \int_{\tau}^{t} R_3^{(p)}(t,s)\bar{p}_i^{(p)T}(s,\tau)ds\Big) + q_{n-1}(t,\tau), \tag{4.8}$$

$$R^{(k)}(t,\tau) = \sum_{p=n-1,n}\Big(R_3^{(p)}(t,\tau)p^{(p)}(\tau) + \int_{\tau}^{t} R_3^{(p)}(t,s)\bar{p}^{(p)}(s,\tau)ds\Big) + q^{(k)}(t,s),$$

$$R(z_1, z_2, t, \tau) = \mathrm{col}\,(z_1^T R^{(1)}(t,\tau)z_2, \ldots, z_1^T R^{(n-2)}(t,\tau)z_2)$$

$(i, j = n-1, n;\ k = 1, \ldots, n-2)$ и $P(z, y_{n-1}, y_n, t)$ состоит из членов, аналогичных $P_i(z, y_{n-1}, y_n, t)$. Величины $R_{ij}(t,\tau)$, $R'_j(t,\tau)$ $(i, j = n-1, n)$ обладают свойством типа (4.4).

5. Сделаем в уравнении (4.7) замену переменных

$$u = z + \sum_{p=n-1,n} v_p(t)y_p + \sum_{p,s=n-1,n} v_{ps}(t)y_p y_s +$$

$$+ \int_{t_0}^{t}\Big(\sum_{p,s=n-1,n} M_{ps}(t,s)y_p(s)y_s(s) + \sum_{p=n-1,n} M_p(t,s)z(s)y_p(s)\Big)ds \tag{5.1}$$

с непрерывными, ограниченными при $t \in I$ $v_p(t)$, $v_{ps}(t)$ и непрерывными при $(t,s) \in J$ $M_{ps}(t,s)$, $M_p(t,s)$ такими, что

$$\|M_{ps}(t,s)\| \in e_2(-\gamma'),\quad \|M_p(t,s)\| \in e_2(-\gamma') \tag{5.2}$$

для некоторого $\gamma' > 0$. Эта замена позволяет исключить из правых частей уравнений (4.7) линейные и квадратичные по y_{n-1}, y_n члены, а также интегральные члены, подобные интегральным членам в формуле (5.1). Для определения $v_p(t)$ $v_{ps}(t)$, $M_p(t,s)$, $M_{ps}(t,s)$ получим уравнения

$$\frac{dv_p(t)}{dt} = \Lambda_2 v_p(t) - h_3^{(p)}(t), \quad p = n-1, n, \tag{5.3}$$

$$\frac{dv_{ps}(t)}{dt} = \Lambda_2 v_{ps}(t) + v'_{ps}(t), \quad p, s = n-1, n, \tag{5.4}$$

$$\frac{\partial M_{ps}(t,s)}{\partial t} = \Lambda_2 M_{ps}(t,s) + M'_{ps}(t,s), \tag{5.5}$$

$$\frac{\partial M_p(t,s)}{\partial t} = \Lambda_2 M_p(t,s) + M'_p(t,s), \tag{5.6}$$

где

$$\nu'_{ij}(t) = -\sum_{p=n-1,n} \nu_p(t) p^{(p)}_{ij}(t) - q'_{ij}(t) + q'_i(t)\nu_j(t) -$$
$$- q'(\nu_i(t), \nu_j(t), t) - M_{ij}(t, t),$$
$$M'_i(t, s) = -\sum_{p=n-1,n} \nu_p(t) \bar{p}^{(p)T}_i(t, s) - R'_i(t, s) + R''_i(t, s),$$
$$M'_{ij}(t, s) = -\sum_{p=n-1,n} \nu_p(t) \bar{p}^{(p)}_{ij}(t, s) - R_{ij}(t,s) + R'_i(t,s)\nu_j(t) - R(\nu_i(t), \nu_j(t), t, s)$$
$$R''_i(t, s) = \mathrm{col}(\nu^T_i(t)\bar{R}^{(1)}(t,s), \ldots, \nu^T_i(t)\bar{R}^{(n-2)}(t, s)),$$
$$\bar{R}^{(j)}(t, s) = R^{(j)}(t, s) + R^{(j)T}(t, s), \; i = n-1, \; n; \; j = 1, \ldots, n-2.$$

Из уравнения (5.3) находим $\nu_p(t)$ в виде

$$\nu_p(t) = -e^{\Lambda_2 t} \int_{t_0}^{t} e^{-\Lambda_2 \tau} h^{(p)}_3(\tau) d\tau, \qquad p = n-1, n, \tag{5.7}$$

откуда следует, что для $\nu_p(t)$ справедливо представление типа (3.5). Частные решения уравнений (5.5), (5.6)

$$M_{ps}(t, s) = e^{\Lambda_2 t} \int_{s}^{t} e^{-\Lambda_2 \tau} M'_{ps}(\tau, s) d\tau,$$
$$M_p(t, s) = e^{\Lambda_2 t} \int_{s}^{t} e^{-\Lambda_2 \tau} M'_p(\tau, s) d\tau \tag{5.8}$$

обладают на множестве J свойством (5.2), поскольку указанным свойством обладают $M'_{ps}(t, s), M'_p(t, s)$.

Далее из уравнения (5.4) определяем $\nu_{ps}(t)$:

$$\nu_{ps}(t) = e^{\Lambda_2 t} \int_{t_0}^{t} e^{-\Lambda_2 t} \nu'_{ps}(\tau) d\tau. \tag{5.9}$$

Для $\nu_{ps}(t)$ (5.9) выполняется (3.5), так как такое представление имеет место для $\nu'_{ps}(t)$.

В результате замены (5.1), (5.7)–(5.9), сохраняющей свойство устойчивости (неустойчивости), получаем уравнение

$$\frac{du}{dt} = \Lambda_2 u + \sum_{p=n-1,n} q''_p(t) u y_p + U(u, y_{n-1}, y_n, t), \tag{5.10}$$
$$\bar{q}''_p(t) = \mathrm{col}(\nu^T_1(t)(q'^{(1)}(t) + q'^{(1)T}), \ldots, \nu^T_{n-2}(t)(q'^{(1)}(t) + q'^{(1)T}(t))),$$
$$q''_p(t) = q^*_p(t) - \bar{q}''_p(t), \; p = n-1, n,$$
$$U(u, y_{n-1}, y_n, t) = \sum_{p=n-1,n} \nu_p(t)(u^T p^{(p)}(t) u + \int_{t_0}^{t} u^T(s) \bar{p}^{(p)}(t,s) u(s) ds) +$$
$$+ q'(u, u, t) + \int_{t_0}^{t} R(u(\tau), u(\tau), t, \tau) d\tau + U'(u, y_{n-1}, y_n, t),$$

причем интегральный оператор U' таков, что разложение в ряд по ε для $U'(\varepsilon u, \varepsilon y_{n-1}, \varepsilon y_n, t)$ начинается с членов 3-го порядка. Матрицы $q''_p(t)$ в (5.10) имеют структуру (3.5). Такую же структуру имеют все функции от t, стоящие вне знака интеграла в U, а все интегральные ядра этого оператора обладают свойством типа (4.4).

6. Преобразуем интегрированием по частям уравнения (2.2), в которых правые части представлены в форме (4.5), и произведем замену (5.1). Тогда получим

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{k,j=n-1,n} P^{(i)}_{kj}(t) y_k y_j + \sum_{k=n-1,n} P^{(i)T}_k u y_k + u^T P^{(i)}(t) u +$$
$$+ \int_{t_0}^{t} \Big(\sum_{k=n-1,n} \bar{P}^{(i)T}_k(t,s) u(s) y_k(s) + u^T(s) \bar{P}^{(i)}(t,s) u(s)\Big) ds + Y_i(u, y_{n-1}, y_n, t), \tag{6.1}$$

где $P^{(i)}_{kj}(t)$, $P^{(i)}_k(t)$, $P^{(i)}(t)$, $\bar{P}^{(i)}_k(t, s)$, $\bar{P}^{(i)}(t, s)$ известным образом выражаются через $\nu_j(t)$ и функции, введенные в (4.5).

Функции $P^{(i)}_{kj}(t)$ в (6.1) имеют структуру (3.5), поскольку в формулах, их представляющих, подынтегральные выражения состоят из слагаемых двух типов: произведений полиномов от синусов и косинусов $\lambda_0 t$ и $\lambda_0 s$ на функции вида $\exp[-\alpha(t-s)]$ $(\alpha > 0)$ и произведений ограниченных функций от t, s на $\exp(-\alpha t + \beta s)$, где $\alpha < \beta$. Такой же вид имеют все интегральные ядра в (6.1), (5.10), в том числе и функции $\bar{P}^{(i)}_s(t, s)$, следовательно, они обладают свойством (5.2). Для $P^{(i)}_s(t)$ также справедливо (3.5).

Интегральные операторы Y_i в (6.1) таковы, что разложения в ряды по ε для $Y_i(\varepsilon u, \varepsilon y_{n-1}, \varepsilon y_n, t)$ начинаются с членов 3-го порядка.

Произведем далее в уравнениях (6.1) замену переменных

$$u_i = y_i + \sum_{k,j=n-1,n} m^{(i)}_{kj}(t) y_k y_j, \quad i = n-1, n, \tag{6.2}$$

позволяющую упростить квадратичные члены.

Будем обозначать через $\{f(t)\}$ периодическую часть функции $f(t)$.

Справедливо следующее представление:

$$P^{(i)}_{ps}(t) = \{P^{(i)}_{ps}(t)\} + \hat{P}^{(i)}_{ps}(t),$$
$$\{P^{(i)}_{ps}(t)\} = g^{(i)}_{ps} + \tilde{P}^{(i)}_{ps}(t),$$

$$g_{ps}^{(i)} = \frac{1}{T}\int_0^T \{P_{ps}^{(i)}(\tau)\}\,d\tau = \mathrm{const}, \quad T = 2\pi/\lambda_0,$$

где $\hat{P}_{ps}^{(i)} \in e_1$ и $\tilde{P}_{ps}^{(i)}(t)$ – периодическая функция с нулевым средним. Положим в (6.2)

$$m_{ps}^{(i)}(t) = \int_{t_0}^{t} (\tilde{P}_{ps}^{(i)}(\tau) + \hat{P}_{ps}^{(i)}(\tau))\,d\tau, \quad p, s = n-1, n. \tag{6.3}$$

Функции (6.3) ограничены при $t \in I$ и представляют собой сумму периодических и экспоненциально убывающих функций.

Выясним детальнее структуру $\{P_{ps}^{(i)}(t)\}$ $(i, p, s = n-1, n)$ и покажем, что эти функции являются полиномами от $\sin\lambda_0(t-t_0)$, $\cos\lambda_0(t-t_0)$. Поскольку

$$\{y'_{n-1i}(t, t_0)\} = (\delta'_i \sin\lambda_0(t-t_0) + \delta''_i \cos\lambda_0(t-t_0))/\Delta,$$

$$\{y'_{ni}(t, t_0)\} = (-\delta'_i \cos\lambda_0(t-t_0) + \delta''_i \sin\lambda_0(t-t_0))/\Delta,$$

согласно (1.5), (2.2), (4.5) указанным свойством будут обладать функции $\{P_{kj}^{(i)}(t)\}$ $(i, j, k = n-1, n)$. Так как $\{b^{(i)}(t)\}$, $\{h_1^{(i)}(t, t)\}$ – линейные функции $s_t = \sin\lambda_0(t-t_0)$, $c_t = \cos\lambda_0(t-t_0)$, на основании (4.1) функции $\{h_3^{(i)}(t)\}$ также будут линейны по s_t, c_t, а тогда ввиду (5.7) такими же будут и $\{v_p(t)\}$ $(p = n-1, n)$. Учитывая (4.5), (2.2), замечаем, что $\{p_j^{(i)}(t)\}$ $(i, j = n-1, n)$ содержат только квадратичные, а $\{p^{(i)}(t)\}$ – только линейные по s_t, c_t члены. Кроме того, из (4.5), (2.2) следует, что

$$\{\int_{t_0}^{t} \bar{p}_{n-1j}^{(i)}(t, s)ds\}, \quad \{\int_{t_0}^{t} \bar{p}_j^{(i)T}(t, s)v_j(s)ds\},$$

$\{v_{n-1}^T(s)\ \bar{p}^{(i)}(t, s)\, v_n(s)ds\}$ – полиномы 3-й степени от s_t, c_t $(i, j = n-1, n)$.

Таким образом, получаем $g_{ps}^{(i)} = 0$ $(i, p, s = n-1, n)$. И после замены (6.2), (6.3) уравнения (6.1) принимают следующую форму:

$$\frac{du_i}{dt} = \sum_{k=n-1,n} P_k^{(i)T} u u_k + u^T P^{(i)} u + \int_{t_0}^{t} (\sum_{k=n-1,n} \bar{P}_k^{(i)T}(t,s)u(s)u_k(s) +$$

$$+ u^T(s)\bar{P}^{(i)}(t,s)u(s))ds + U_i(u, u_{n-1}, u_n, t),$$

причем $U_i(u, u_{n-1}, u_n, t)$ того же типа, что и $Y_i(u, u_{n-1}, u_n, t)$.

7. Преобразованиями, аналогичными проведенным ранее, можно сделать дальнейшее упрощение уравнений. С этой целью перейдем от переменных y_{n-1}, y_n (1.5) к комплексно-сопряженным переменным

$$w_{n-1} = y_{n-1} + iy_n, \quad w_n = y_{n-1} - iy_n, \tag{7.1}$$

тогда формулы (1.8) примут вид

$$x_{n-1} = \{\sum_{k=1}^{n-2} D_{n-1k}(t)x_k - [\frac{1}{2}(\delta'_n - i\delta''_n)e^{-i\lambda_0(t-t_0)} + \bar{d}_{n-1}(t)]w_{n-1} -$$

$$-[\frac{1}{2}(\delta'_n + i\delta''_n)e^{i\lambda_0(t-t_0)} + \bar{d}_n(t)]w_n\}/(\Delta\delta'),$$

$$x_n = \{\sum_{k=1}^{n-2} D_{nk}x_k + [\frac{1}{2}(\delta'_{n-1} - i\delta''_{n-1})e^{-i\lambda_0(t-t_0)} + \bar{d}'_{n-1}(t)]w_{n-1} + \tag{7.2}$$

$$+[\frac{1}{2}(\delta'_{n-1} + i\delta''_{n-1})e^{i\lambda_0(t-t_0)} + \bar{d}'_n(t)]w_n\}/(\Delta\delta'),$$

где $\bar{d}_j(t) \in e_1$, $\bar{d}'_j(t) \in e_1$ $(j = n-1, n)$, и уравнения (2.2) перейдут в уравнения

$$\frac{dw_k}{dt} = \int_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{n} (\varphi_{n-1j}(t, s) \pm i\varphi_{nj}(t, s))F''_j(z, w_{n-1}, w_n, t) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} (y'_{n-1j}(t, t_0) \pm iy'_{nj}(t, t_0))F''_j(z, w_{n-1}, w_n, t), \tag{7.3}$$

в которых верхний знак берется для $k = n-1$ и нижний знак – для $k = n$. Функции $F''_j(z, w_{n-1}, w_n, t)$ – результат преобразования $F_j(x, t)$ согласно (1.5), (3.3), (7.2). Заметим, что

$$F''_j(z, w_{n-1}, w_n, t) = \tilde{F}_j(z, (e^{-i\lambda_0(t-t_0)} +$$

$$+ \tilde{d}_{n-1}(t))w_{n-1}, (e^{i\lambda_0(t-t_0)} + \tilde{d}_n(t))w_n, t),$$

где $\tilde{d}_k(t) \in e_1$ $(k = n-1, n)$.

Преобразования (5.7) и (6.2) с учетом (7.1) позволяют упростить квадратичные члены уравнений (3.4), (7.3). Далее интегрированием по частям и заменой переменных

$$v = u + \sum_{k=3}^{\nu} \sum_{l_{n-1}+l_n=k} v^{(l_{n-1}, l_n)}(t)w_{n-1}^{l_{n-1}} w_n^{l_n} + \tag{7.4}$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \sum_{k=2}^{\nu_1} \sum_{l_{n-1}+l_n=k} M^{(l_{n-1}, l_n)}(t,s)u(s)w_{n-1}^{l_{n-1}} w_n^{l_n}(s)ds$$

исключим[1] из уравнения (5.10), преобразованного согласно (7.1), неинтегральные и интегральные члены, зависящие только от w_{n-1}, w_n, до некоторого порядка ν, а также интегральные члены, линейные по u до некоторого порядка ν_1 включительно. Тогда для некритических переменных получим уравнение

$$\frac{dv}{dt} = \Lambda_2 v + \sum_{k=n-1,n} q_k''(t) v w_k + \Phi^{(2)}(v,t) + \Phi(v, w_{n-1}, w_n, t), \qquad (7.5)$$

в котором интегральные операторы $\Phi^{(2)}$, Φ таковы, что $\Phi^{(2)}(\varepsilon v, t)$, $\Phi(\varepsilon v, \varepsilon w_{n-1}, \varepsilon w_n, t)$ имеют по ε соответственно порядок 2-й и 3-й, $\Phi(0, \varepsilon w_{n-1}, \varepsilon w_n, t)$ имеет порядок $(\nu+1)$-й и интегральные члены в Φ, линейные по v, имеют порядок $(\nu_1 + 1)$-й. Все функции $M^{(l_{n-1}, l_n)}(t, s)$ в (7.4) и интегральные ядра операторов $\Phi^{(2)}$, Φ в (7.5) обладают свойством типа (5.2), а функции $v^{(l_{n-1}, l_n)}(t)$ в преобразовании (7.4) и все функции от t в (7.5), стоящие вне знака интеграла, имеют структуру (3.5). Заметим, кроме того, что

$$\{v^{(l_{n-1}, l_n)}(t)\} = e^{i(l_n - l_{n-1})\lambda_0 (t-t_0)}.$$

Уравнения для критических переменных приводятся к следующей форме:

$$\frac{dw_j}{dt} = \sum_{k=3}^{2m+1} G_j^{(k)}(w_{n-1}, w_n, t) e^{\pm i\lambda_0 (t-t_0)} + \Phi_j(v, w_{n-1}, w_n, t), \qquad (7.6)$$

где $j = n-1$ отвечает верхний знак, $j = n$ – нижний знак, $\Phi_j(v, w_{n-1}, w_n, t)$ – интегральные операторы, удовлетворяющие условию

$$\Phi_j(\varepsilon v, \varepsilon w_{n-1}, \varepsilon w_n, t) = \Phi_j^{(2)}(\varepsilon v, \varepsilon w_{n-1}, \varepsilon w_n, t) + \Phi_j^{(2m+2)}(\varepsilon v, \varepsilon w_{n-1}, \varepsilon w_n, t),$$

причем $\Phi_j^{(2)}$ – многочлены по ε степени $2m+1$ ($m \geq 1$ – некоторое целое число) без свободного и линейного членов такие, что $\Phi_j^{(2)}(0, w_{n-1}, w_n, t) \equiv 0$, а разложения по ε

---

1) Отметим, что преобразованием, аналогичным (7.4), так же как это сделано в [7], в работе [8] должны быть исключены из уравнений для некритических переменных линейные по u интегральные члены для некоторого $\nu_1 \geq 3$, что не указано в [8] в явной форме.

для $\Phi_j^{(2m+2)}(\varepsilon v, \varepsilon w_{n-1}, \varepsilon w_n, t)$ начинаются с членов порядка $2m+2$, $G_j^{(k)}(w_{n-1}, w_n, t)$ – однородные полиномы степени k, коэффициенты которых имеют структуру (3.5). Полиномы $G_j^{(k)}$ обладают, кроме того, свойством, что $\{G_j^{(k)}(w_{n-1}, w_n, t)\}$ являются функциями только

$$\exp[-i\lambda_0(t-t_0)]\, w_{n-1}, \ \exp[i\lambda_0(t-t_0)]\, w_n.$$

Сделаем замену переменных

$$w_j' = w_j + \sum_{k=3}^{2m+1} \sum_{l_{n-1}+l_n=k} m_j^{(l_{n-1}, l_n)}(t)\, w_{n-1}^{l_{n-1}} w_n^{l_n}, \qquad (7.7)$$

позволяющую привести к автономной форме выделенные полиномиальные члены в правой части уравнения (7.6). Для определения $m_j^{(l_{n-1}, l_n)}(t)$ имеем уравнения

$$\frac{dm_j^{(l_{n-1}, l_n)}(t)}{dt} = \varphi_j^{(l_{n-1}, l_n)}(t), \quad j = n-1, n,$$

в которых $\varphi_j^{(l_{n-1}, l_n)}(t) \in e_1$ – известные функции, если известны коэффициенты $m_j^{(l_{n-1}, l_n)}(t)$ на предыдущих шагах вычислений, причем $\{\varphi_{n-1}^{(l_{n-1}, l_n)}(t)\} = C \exp[i\lambda_0 L_{n-1}(t - t_0)]$, $\{\varphi^{(l_{n-1}, l_n)}(t)\} = C' \exp[i\lambda_0 L_n (t-t_0)]$, $L_{n-1} = l_n - l_{n-1} + 1$, $L_n = l_n - l_{n-1} - 1$, C, C' – const.

Таким образом, полагая

$$m_j^{(l_{n-1}, l_n)}(t) = \int_{t_0}^{t} \varphi_j^{(l_{n-1}, l_n)}(s)\, ds, \qquad (7.8)$$

если $L_{n-1} \neq 0$ при $j = n-1$ и $L_n \neq 0$ при $j = n$, получим $m^{(l_{n-1}, l_n)}(t) \in e_1$, и соответствующие члены полиномов будут исключены из уравнений. В противном случае возьмем

$$m_j^{(l_{n-1}, l_n)}(t) = \int_{t_0}^{t} (\varphi_j^{(l_{n-1}, l_n)}(s) - \{\varphi_j^{(l_{n-1}, l_n)}(s)\})\, ds, \qquad (7.9)$$

и соответствующий коэффициент полинома в преобразованных уравнениях станет постоянным. Выполнив преобразование (7.7)-(7.9), получим уравнения

$$\frac{dw_j'}{dt} = \sum_{k=1}^{m} w_j' g_j^{(k)}(r^2) + \varphi_j(v, w_{n-1}', w_n', t), \qquad (7.10)$$

где $r^2 = w'_{n-1} w'_n$, $g_j^{(k)}(x)$ – однородные полиномы от x степени k и $\varphi_j(v, w_{n-1}, w_n, t)$ аналогичны $\Phi_j(v, w_{n-1}, w_n, t)$. На основании (7.10) получим вещественное уравнение

$$r\frac{dr}{dt} = \sum_{k=1}^{m} g_{2k+1} r^{2k+2} + R^{(3)}(v, v_{n-1}, v_n, t) + R^{(2m+3)}(v, v_{n-1}, v_n, t) \quad (7.11)$$

относительно вещественных переменных v, r, v_{n-1}, v_n, t, где

$$v_{n-1} = \frac{1}{2}(w'_{n-1} + w'_n), \quad v_n = \frac{1}{2i}(w'_{n-1} - w'_n). \quad (7.12)$$

В уравнении (7.11) g_{2k+1} – постоянные и $R^{(3)}$, $R^{(2m+3)}$ – операторы такие, что $R^{(3)}(\varepsilon v, \varepsilon v_{n-1}, \varepsilon v_n, t)$ – многочлен по ε степени $2m+2$ без свободного, линейного и квадратичного членов, причем $R^{(3)}(0, v_{n-1}, v_n, t) = 0$, а разложение по ε для $R^{(2m+3)}(\varepsilon v, \varepsilon v_{n-1}, \varepsilon v_n, t)$ начинается с членов порядка $2m+3$.

Пусть $g_{2k+1} = 0$ при $k = 1, \ldots, m-1$ и $g_{2m+1} \neq 0$. Будем предполагать, что

$$g_{2m+1} > 0. \quad (7.13)$$

Положим в уравнениях (7.5) $\nu = 4m$, $\nu_1 = 2m$ и рассмотрим функцию

$$V = r^{4m+1} - v^T v$$

и область

$$D = \{(v, v_{n-1}, v_n) \in R^n : V > 0, \ \sum_{i=1}^{n} v_i^2 < h^2\}, \ h > 0 - \text{const},$$

где $v = \text{col}(v_1, \ldots, v_{n-2})$. В области D выполняются неравенства

$$|v_j| < r^{2m+1/2}, \ |v_k| \le r, \ j = 1, \ldots, n-2; \ k = n-1, n.$$

Так же, как в [7], принимая во внимание (7.11), (7.13), можно показать, что $dr/dt > 0$ в области D при некотором h. Вычислим производную от V в силу системы (7.5), (7.11)

$$\frac{dV}{dt} = (4m+1) r^{4m-1} (g_{2m+1} r^{2m+2} + R^{(3)}(v, v_{n-1}, v_n, t) +$$
$$+ R^{(2m+3)}(v, v_{n-1}, v_n, t) - 2v^T \Lambda_2 v - 2v^T (\sum_{k=n-1,n} q''_k(t) v w_k + \quad (7.14)$$
$$+ \Phi^{(2)}(v, t) + \Phi(v, w_{n-1}, w_n, t)),$$

где w_k выражены через v_{n-1}, v_n, t на основании (7.7), (7.12).

Поскольку все ядра интегральных членов в (7.14) обладают свойством типа (5.2) и для всех функций от t, стоящих вне знака интеграла, справедливо представление (3.5), поступая так же, как в [7], получим в области D оценку

$$\frac{dV}{dt} > (4m+1) r^{6m+1} (g_{2m+1} - r^{1/2} R'_{2m+1}(r^{1/2})) -$$
$$- 2v^T (\Lambda_2 + r R''_{2m+1}(r^{1/2})) v,$$

где $R'_{2m+1}(x)$, $R''_{2m+1}(x)$ – сходящиеся ряды с положительными коэффициентами. Следовательно, при малых h $dV/dt > 0$, и по теореме Четаева [1] нулевое решение неустойчиво.

Таким образом, доказана следующая

Теорема.

Пусть для уравнения (1.1) выполняются условия а), б), в), (1.4), (1.6), (3.2). Тогда если постоянные $g_{2k+1} = 0$ при $1 \le k < m$ и $g_{2m+1} > 0$, то нулевое решение неустойчиво.

Проведенное исследование применимо к некоторым типам интегродифференциальных уравнений, описывающих в рамках моделей аэроупругости [3, 4] движение тела при нестационарном обтекании потоком газа. Интегральные ядра уравнений в таких моделях определяются экспериментально [3], и потому их интерполяцию можно осуществлять полиномами из экспонент [9].

Литература

1. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – 535 с.

2. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения//Собр. соч. – Т. 2. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. – 473 с.

3. Белоцерковский С.М., Кочетков Ю.А., Красовский А.А., Новицкий В.В. Введение в аэроавтоупругость. – М.: Наука, 1980. – 384 с.

4. Астапов И.С., Белоцерковский А.С., Морозов В.И. Нелинейные интегродифференциальные уравнения аэроупругости.//Изв. АН СССР, МТТ. – 1985. – № 6. С. 61-70.

5. Быков Я.В. О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений. – Фрунзе: Изд-во АН КиргССР, 1957. – 327 с.

6. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова. – М.: Наука, 1966. – 576 с.

7. Сергеев В.С. О неустойчивости решений одного класса интегродифференциальных уравнений в критическом случае нулевого корня.//Некоторые задачи теории устойчивости и стабилизации движения. – М.: ВЦ АН СССР, 1985. – С. 54-84.

8. Сергеев В.С. К вопросу о неустойчивости нулевого решения в критическом случае нулевого корня для интегродифференциальных уравнений Вольтерра.//Некоторые задачи теории устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ АН СССР, 1986. – С. 86-92.

9. Леонтьев А.Ф. Последовательности полиномов из экспонент. – М.: Наука, 1980. – 384 с.

УДК 531.36

Р.С. СУЛИКАШВИЛИ

О СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЯХ ТЕТРАЭДРА И ОКТАЭДРА В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ

Рассматриваются системы материальных точек равных масс, расположенных в вершинах тетраэдра и октаэдра и соединенных невесомыми недеформируемыми стержнями. Исследуется задача об устойчивости стационарных движений и равновесий этих тел в ньютоновском поле сил в предположении неподвижности центра масс.

Приведена бифуркационная диаграмма на плоскости констант интегралов энергии h и площадей k.

Обнаружен любопытный факт. Для тел Платона: тетраэдра, куба, октаэдра – размерность элемента тела (точка, ребро, грань), которым тело обращено в стационарном движении и в равновесии к притягивающему центру, совпадает со степенью неустойчивости.

1. Рассмотрим движения в ньютоновском поле тяготения системы материальных точек A_j ($j = 1, 2, 3, 4$) равных масс, расположенных в вершинах тетраэдра и соединенных невесомыми недеформируемыми стержнями. Будем предполагать, что центр масс системы неподвижен.

Пусть $Gxyz$ – система координат, жестко связанная с тетраэдром, выбранная таким образом, что плоскость Gxy совпадает с плоскостью симметрии тетраэдра, проходящей через ребро $A_1A_2 = 2a$ (рис. 1). Ось Gx пересекает ребро в его середине. В дальнейшем будем считать, что $a = 1$.

Расстояния $R_j = |\bar{R}_j|$ от притягивающего центра 0 до точки A_j ($j = 1, 2, 3, 4$) тела определяются соотношениями

$$R_j = R\sqrt{1 + 2b\varepsilon(\bar{\gamma}\ \bar{\rho}_j) + \varepsilon^2}, \tag{1.1}$$

$R = O\bar{G}$, $|\bar{R}| = R$, $\bar{r}_j = G\bar{A}_j$, $|\bar{r}_j| = r = \sqrt{3}/\sqrt{2}$, $\bar{\rho}_j = \bar{r}_j/r$, $\varepsilon = r/R$, $b = 1/r$,

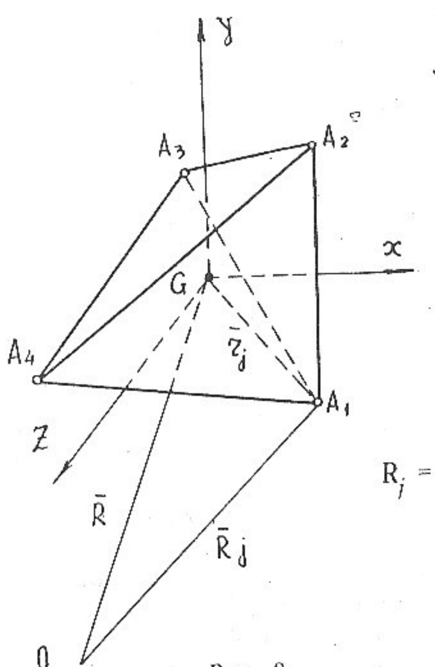


Рис. 3

$\bar\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ – направленный вдоль $\bar R$ единичный вектор.

Используя соотношения

$$(\bar\gamma\cdot\bar r_1) = 1/2(\sqrt{2}\gamma_1 - 2\gamma_2),$$
$$(\bar\gamma\cdot\bar r_2) = 1/2(\sqrt{2}\gamma_1 + 2\gamma_2),$$
$$(\bar\gamma\cdot\bar r_3) = -1/2(\sqrt{2}\gamma_1 + 2\gamma_3),$$
$$(\bar\gamma\cdot\bar r_4) = -1/2(\sqrt{2}\gamma_1 - 2\gamma_3),$$

получим

$$R_j = R\sqrt{1+\sigma_j} \quad (j = 1, 2, 3, 4),$$
$$\sigma_1 = b\varepsilon(\sqrt{2}\gamma_1 - 2\gamma_2) + \varepsilon^2,$$
$$\sigma_2 = b\varepsilon(\sqrt{2}\gamma_1 + 2\gamma_2) + \varepsilon^2,$$
$$\sigma_3 = -b\varepsilon(\sqrt{2}\gamma_1 + 2\gamma_3) + \varepsilon^2;$$
$$\sigma_4 = -b\varepsilon(\sqrt{2}\gamma_1 - 2\gamma_3) + \varepsilon^2.$$

Силовая функция U имеет вид

$$U = f\frac{M_0M}{\Sigma R_j} = f\frac{M_0M}{R}\sum_{j=1}^{4}(1+\sigma_j)^{-1/2}.$$

Здесь f – постоянная тяготения, M_0 – масса притягивающего тела, M – масса всей системы.

Раскладывая силовую функцию U в ряд по ε и сохраняя члены до порядка ε^3, получим выражения

$$U_0 = \frac{fM_0M}{R}\left[4 - \frac{5\sqrt{2}\varepsilon^3}{\sqrt{3}}(\gamma_2^2 - \gamma_3^2)\gamma_1\right].$$

Так как поле сил осесимметрично, силовая функция U зависит только от γ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, и все положения равновесия тетраэдра безразличны по отношению к повороту вокруг радиуса-вектора OG.

В рассматриваемом приближении уравнения движения тетраэдра запишутся в виде

$$\frac{d}{dt}(J\bar\omega) = J\bar\omega\times\bar\omega - \bar\gamma\times\frac{\partial U_0}{\partial\bar\gamma}, \quad \frac{d}{dt}\bar\gamma = \bar\gamma\times\bar\omega. \tag{1.2}$$

Здесь $J = (J\delta_{ij})$ – центральный тензор инерции, δ_{ij} – символ Кронекера, $\bar\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости.

Уравнения (1.2) допускают следующие первые интегралы

$$V = \frac{1}{2}J(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) - U_0 = h = \text{const}, \tag{1.3}$$
$$V_1 = J(\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2 + \omega_3\gamma_3) = k = \text{const}, \tag{1.4}$$
$$V_2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1. \tag{1.5}$$

Согласно теореме Рауса [1] задачу определения стационарных движений сведем к задаче о нахождении стационарных значений функции

$$W = V - \lambda(V_1 - k) + \mu/2(V_2 - 1),$$

где λ и μ – неопределенные множители Лагранжа.

Уравнения стационарных движений примут вид

$$\frac{\partial W}{\partial\lambda} = k - V_1 = 0, \ \frac{\partial W}{\partial\mu} = V_2 - 1 = 0, \ \frac{\partial W}{\partial\omega_i} = J(\omega_i - \lambda\gamma_i) = 0 \ (i = 1, 2, 3), \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial W}{\partial\gamma_1} = n\varepsilon^3(\gamma_2^2 - \gamma_3^2) + \mu\gamma_1 - \lambda J\omega_1 = 0\\
&\frac{\partial W}{\partial\gamma_2} = 2n\varepsilon^3\gamma_1\gamma_2 + \mu\gamma_2 - \lambda J\omega_2 = 0\\
&\frac{\partial W}{\partial\gamma_3} = 2n\varepsilon^3\gamma_1\gamma_3 + \mu\gamma_3 - \lambda J\omega_3 = 0, \quad \left(n = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}}f\frac{M_0M}{R}\right)
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Из последних трех уравнений (1.6) имеем

$$\omega_i = \lambda\gamma_i \ (i = 1, 2, 3),$$

тогда $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ и μ определяются из уравнений (1.7), которые допускают следующие семейства решений, зависящих от одного параметра $\omega = \lambda$,

$$\gamma_1 = 0, \ \gamma_2 = \pm\sqrt{2}/2, \ \gamma_3 = \pm\sqrt{2}/2, \ \mu = J\omega^2, \tag{1.8}$$
$$\gamma_1 = \pm 1, \ \gamma_2 = 0, \ \gamma_3 = 0, \ \mu = J\omega^2, \tag{1.9}$$
$$\gamma_1 = 1/\sqrt{3}, \ \gamma_2 = \pm\sqrt{2}/\sqrt{3}, \ \gamma_3 = 0, \ \mu = J\omega^2 - 2n\varepsilon^3/\sqrt{3}, \tag{1.10}$$
$$\gamma_1 = -1/\sqrt{3}, \ \gamma_2 = 0, \ \gamma_3 = \pm\sqrt{2}/\sqrt{3}, \ \mu = J\omega^2 - 2n\varepsilon^3/\sqrt{3}, \tag{1.11}$$
$$\gamma_1 = 1/\sqrt{3}, \ \gamma_2 = 0, \ \gamma_3 = \pm\sqrt{2}/\sqrt{3}, \ \mu = J\omega^2 + 2n\varepsilon^3/\sqrt{3}, \tag{1.12}$$
$$\gamma_1 = -1/\sqrt{3}, \ \gamma_2 = \pm\sqrt{2}/\sqrt{3}, \ \gamma_3 = 0, \ \mu = J\omega^2 + 2n\varepsilon^3/\sqrt{3}. \tag{1.13}$$

Определим ориентацию тетраэдра для найденных стационарных движений. С этой целью при помощи (1.1) вычислим величины R_j ($j = 1, 2, 3, 4$).

Для решений (1.8) и (1.9) получаем

$$R_1 = R_3 = R\sqrt{1-2\varepsilon/\sqrt{3}+\varepsilon^2}, \quad R_2 = R_4 = R\sqrt{1+2\varepsilon/\sqrt{3}+\varepsilon^2}.$$

Для этих решений вершины тетраэдра попарно лежат на двух концентрических сферах с центром в точке O и радиусами R_1 и R_2. Ребра тетраэдра, стягивающие дуги этих сфер, принадлежат скрещивающимся прямым, а радиус-вектор $\overline{OG}$ проходит через их середины. Число таких решений, очевидно, равно числу ребер тетраэдра, т.е. шести.

Для решений (1.10) и (1.11) находим

$$R_1 = R_3 = R_4 = R\sqrt{1-2\varepsilon/3+\varepsilon^2}, \quad R_2 = R\sqrt{1+2\varepsilon+\varepsilon^2}, \quad R_1 < R_2.$$

Отсюда заключаем, что вершины тетраэдра расположены на аналогичных двух концентрических сферах с центром в точке O, причем три вершины – на сфере меньшего радиуса и одна – на сфере большего радиуса. В этом случае тетраэдр обращен основанием к притягивающему центру. Радиус-вектор $\overline{OG}$ проходит через середину основания и удаленную вершину. Число таких решений равно четырем.

Наконец, для решений (1.12) и (1.13) имеем

$$R_1 = R\sqrt{1-2\varepsilon+\varepsilon^2}, \quad R_2 = R_3 = R_4 = R\sqrt{1+2\varepsilon/3+\varepsilon^2}, \quad R_1 < R_2.$$

В этом случае три вершины лежат на сфере большего радиуса, а одна – на сфере меньшего радиуса. Тетраэдр обращен вершиной к притягивающему центру, и радиус-вектор OG проходит через эту вершину и середину основания тетраэдра. Число таких решений равно четырем – числу вершин тетраэдра.

Указанные решения назовем соответственно решениями первого, второго и третьего типов. Отметим, что при $\lambda = 0$ эти движения вырождаются в положения равновесия тетраэдра.

2. Исследуем устойчивость найденных стационарных движений по отношению к величинам $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ и $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Для этого вычислим вторую вариацию $\delta^2 W$ функции W на линейном многообразии $\delta V_1 = 0$, $\delta V_2 = 0$:

$$\delta^2 W = J\sum_{i=1}^{3}\Omega_i^2 + (\mu - J\lambda^2)\sum_1^3(\delta\gamma_i)^2 + 2n\varepsilon^3\{\gamma_1[(\delta\gamma_2)^2-(\delta\gamma_3)^2] + $$
$$+ 2(\delta\gamma_1)[\gamma_2(\delta\gamma_2) - \gamma_3(\delta\gamma_3)]\},$$

где $\Omega_i = \delta\omega_i - \lambda\delta\gamma_i$, $\delta\omega_i$ и $\delta\gamma_i$ – вариации переменных ω_i и γ_i ($i = 1, 2, 3$).

Для решении (1.8) и (1.9) соответственно имеем

$$\delta^2 W = J(\Omega_1^2 + 2\Omega_2^2) + 2\sqrt{2}n\varepsilon^3[(\delta\alpha_1)^2 - (\delta\alpha_2)^2],$$

$$\delta^2 W = J(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) \pm 2n\varepsilon^3[(\delta\gamma_2)^2 - (\delta\gamma_3)^2], \quad \delta\gamma_1 = \delta\alpha_1 + \delta\alpha_2, \quad \delta\gamma_2 = \delta\alpha_1 - \delta\alpha$$

Отсюда заключаем, что для решений первого типа степень неустойчивости $\lambda = 1$ и, следовательно, эти движения неустойчивы.

Для решений (1.10) имеем

$$\delta^2 W = J(3\Omega_2^2 + \Omega_3^2) - \frac{4n\varepsilon^3}{\sqrt{3}}[3(\delta\gamma_2)^2 + (\delta\gamma_3)^2],$$

а для решений (1.11) в этом выражении $\delta\omega_2$ и $\delta\omega_3$, $\delta\gamma_2$ и $\delta\gamma_3$ следует поменять местами.

Из полученного заключаем, что для стационарных движений второго типа степень неустойчивости $\chi = 2$. В этом случае теорема Рауса и ее обращение не позволяют сделать вывод об устойчивости или неустойчивости стационарных движений. Из рассмотрения уравнения первого приближения можно заключить, что эти стационарные движения неустойчивы.

Для решений (1.12) получаем

$$\delta^2 W = J(\Omega_2^2 + 3\Omega_3^2) + \frac{4n\varepsilon^3}{\sqrt{3}}[(\delta\gamma_2)^2 + 3(\delta\gamma_3)^2], \tag{2.1}$$

а для решений (1.13) в (2.1) $\delta\omega_2$ и $\delta\omega_3$, $\delta\gamma_2$ и $\delta\gamma_3$ следует поменять местами. Следовательно, стационарные движения третьего типа, когда тетраэдр обращен к притягивающему центру вершиной, устойчивы ($\chi = 0$).

В заключение приведем бифуркационную диаграмму на плоскости параметров h и k (постоянных интегралов энергии и площадей (1.3) и (1.4) (см. рис. 2). На этой диаграмме стационарным движениям (1.8)–(1.13) отвечают параболы P_0, P_1, P_2, которые определяются соотношениями

$$P_0: h_0 = \frac{k^2}{J} - 4n_1 - \frac{10\sqrt{2}n_1\varepsilon^3}{9}; \quad P_1: h_1 = \frac{k^2}{J} - 4n_1;$$

$$P_2: h_2 = \frac{k^2}{J} - 4n_1 + \frac{10\sqrt{2}}{9}n_1\varepsilon^3 \quad (n_1 = fM_0M/R)$$

(индекс i соответствует степени неустойчивости соответствующих стационарных движений).

Параболы P_i ($i = 0, 1, 2$) определяют бифуркационное множество, на котором происходит перестройка области

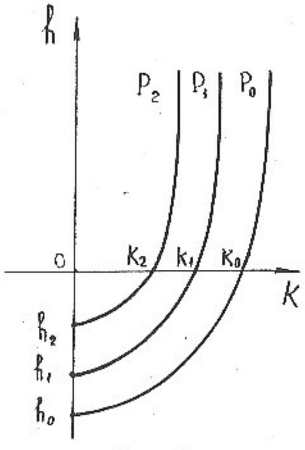


Рис. 2

возможного движения [2]. Последняя определяется соотношением

$$-U_0 \le h$$

(в данной задаче измененная силовая функция с точностью до постоянной совпадает с силовой функцией).

Анализ показывает, что выше параболы P_2 область возможного движения представляет собой всю сферу $S^2 = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 ; \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1\}$, между параболами P_2 и P_1 – $S^2/(D_1 \cup D_1 \cup D_1 \cup D_1)$ (сфера с четырьмя дырками). Между параболами P_1 и P_0 – $D_1 \cup D_1 \cup D_1 \cup D_1$ (четыре диска). Ниже параболы P_0 – пустое множество (движения невозможны)

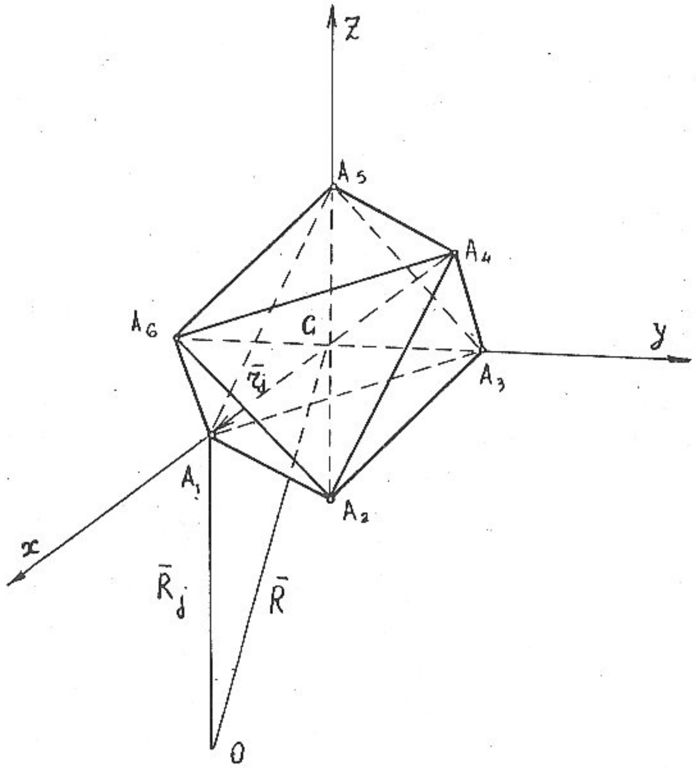


Рис. 3

$$k_0 = \sqrt{Jn_1(4 + \frac{10\sqrt{2}}{9}\varepsilon^3)},\ k_1 = 2\sqrt{Jn_1},\ k_2 = \sqrt{Jn_1(4 - \frac{10\sqrt{2}}{9}\varepsilon^3)},$$

$$h_0 = -4n_1 - \frac{10\sqrt{2}}{9} n_1 \varepsilon^3,\ h_1 = -4n_1,\ h_2 = -4n_1 + \frac{10\sqrt{2}}{9} n_1 \varepsilon^3.$$

3. Рассмотрим систему материальных точек A_j ($j = 1, \ldots, 6$) равных масс, расположенных в вершинах октаэдра и соединенных невесомыми недеформируемыми стержнями. Считаем, что центр масс G системы неподвижен.

Пусть $Gxyz$ – система координат, оси которой выбраны таким образом, что материальные точки располагаются на осях Gx, Gy, Gz симметрично относительно точки G и отстоят от нее на расстоянии a (рис. 3).

Расстояния R_j от притягивающего центра 0 до произвольной точки A_j, определяемые формулой (1.1), даются выражениями

$$R_1 = R\sqrt{1 + 2\varepsilon\gamma_1 + \varepsilon^2},\ R_2 = R\sqrt{1 - 2\varepsilon\gamma_3 + \varepsilon^2},\ R_3 = R\sqrt{1 + 2\varepsilon\gamma_2 + \varepsilon^2},$$

$$R_4 = R\sqrt{1 - 2\varepsilon\gamma_1 + \varepsilon^2},\ R_5 = R\sqrt{1 + 2\varepsilon\gamma_3 + \varepsilon^2},\ R_6 = R\sqrt{1 - 2\varepsilon\gamma_2 + \varepsilon^2}.$$

Силовая функция U_0 с точностью до членов порядка ε^4 записывается в виде

$$U_0 = f\frac{M_0 M}{R}[6 + 210\varepsilon^4(\gamma_1^4 + \gamma_2^4 + \gamma_3^4)], \tag{3.1}$$

откуда видно, что все положения равновесия октаэдра безразличны по отношению к повороту вокруг радиуса-вектора OG.

В рассматриваемом приближении уравнения движения октаэдра имеют вид (1.2), где функция U_0 дается формулой (3.1). Для этих уравнений существуют три интеграла (1.3)-(1.5).

Уравнения стационарных движений октаэдра имеют вид

$$\frac{\partial W_0}{\partial \omega_i} = J(\omega_i - \lambda\gamma_i) = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial W_0}{\partial \gamma_i} = -4m\varepsilon^4\gamma_1^3 - \lambda J\omega_i + \mu\gamma_i = 0 \ (123),$$

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda} = k - V_1 = 0,\ \frac{\partial W_0}{\partial \mu} = V_2 - 1 = 0,\ m = 210 f M_0 M/R,$$

$$W_0 = V - \lambda(V_1 - k) + \mu/2(V_2 - 1),\ (V = T - U_0). \tag{3.3}$$

Из уравнений (3.2) имеем

$$\omega_i = \lambda\gamma_i\ (i = 1,\ 2,\ 3)$$

и из уравнений (3.3) находим выражение для μ и γ_i:

$$\mu = J\lambda^2 + 4m\varepsilon^4(\gamma_1^4 + \gamma_2^4 + \gamma_3^4)$$

$$\gamma_1 = 0,\ \gamma_2 = \pm\sqrt{2}/2,\ \gamma_3 = \pm\sqrt{2}/2,\ \mu = J\lambda^2 + 2m\varepsilon^4, \tag{3.4}$$

$$\gamma_1 = \pm 1/\sqrt{3},\ \gamma_2 = \pm 1/\sqrt{3},\ \gamma_3 = \pm 1/\sqrt{3},\ \mu = J\lambda^2 + 4m\varepsilon^4/3, \tag{3.5}$$

$$\gamma_1 = \pm 1,\ \gamma_2 = 0,\ \gamma_3 = 0,\ \mu = J\lambda^2 + 4m\varepsilon^4. \tag{3.6}$$

Определим ориентацию октаэдра для найденных стационарных движений.

Для решений (3.4) получаем

$$R_1 = R_4 = R\sqrt{1+\varepsilon^2},\ R_2 = R_6 = R\sqrt{1 \mp \sqrt{2}\varepsilon + \varepsilon^2},\ R_3 = R_5 = R\sqrt{1 \pm \sqrt{2}\varepsilon + \varepsilon^2},$$

откуда видно, что для этих решений вершины октаэдра попарно лежат на трех концентрических сферах с центром в точке O и радиусами R_1, R_2, R_3. В данном случае октаэдр обращен к притягивающему центру O ребром и радиус-вектор OG проходит через середины этих ему параллельных ребер. Число таких решений – двенадцать равно числу ребер октаэдра.

Для решений (3.5) имеем

$$R_1 = R_3 = R_5 = R\sqrt{1 + 2\varepsilon/\sqrt{3} + \varepsilon^2},\ R_2 = R_4 = R_6 = R\sqrt{1 - 2\varepsilon/\sqrt{3} + \varepsilon^2}.$$

В этом случае вершины октаэдра расположены на двух концентрических сферах с центром в точке O, причем три вершины – на сфере меньшего радиуса R_2 и три вершины – на сфере большего радиуса R_1. Октаэдр обращен к притягивающему центру гранью, а радиус-вектор $\overline{OG}$ проходит через ее центр. Число таких решений (восемь) равно числу граней октаэдра.

Наконец, для решений (3.6) имеем

$$R_1 = R\sqrt{1 \pm 2\varepsilon + \varepsilon^2},\ R_2 = R_3 = R_5 = R_6 = R\sqrt{1+\varepsilon^2},\ R_4 = R\sqrt{1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2}.$$

Вершины октаэдра расположены на трех концентрических сферах с центром в точке O так, что четыре вершины лежат на сфере среднего радиуса R_2, а на остальных двух сферах с радиусами R_1 и R_4 лежит по одной вершине октаэдра; через эти две вершины проходит радиус-вектор $\overline{OG}$. В данном случае октаэдр обращен к притягивающему центру вершиной. Число таких решений (шесть) равно числу вершин октаэдра.

Отметим, что, как и в предыдущей задаче, при $\lambda = 0$ стационарные движения (3.5)-(3.7) вырождаются в положения равновесия.

4. Устойчивость найденных стационарных движений по отношению к величинам ω_i, γ_i ($i = 1,\ 2,\ 3$) исследуется так же, как в предыдущей задаче. Вторая вариация функции W_0 на линейном многообразии $\delta V_1 = 0$, $\delta V_2 = 0$ принимает вид

$$\delta^2 W_0 = J/2\sum_1^3 \Omega_i^2 + 1/2(\mu - J\lambda^2)\sum_1^3(\delta\gamma_i) - 6m\varepsilon^4\sum_1^3 \gamma_i^2(\delta\gamma_i)^2, \tag{4.1}$$

$$\Omega_i = \delta\omega_i - \lambda\delta\gamma_i.$$

Для движений (3.4) из (4.1) получаем

$$\delta^2 W_0 = J/2(\Omega_1^2 + 2\Omega_2^2) + 1/2(\mu - J\lambda^2)(\delta\gamma_1)^2 + (\mu - J\lambda^2 - 6m\varepsilon^4)(\delta\gamma_2)^2,$$

следовательно, степень неустойчивости $\chi = 1$, и движения неустойчивы.

Для решений (3.5) имеем

$$\delta^2 W_0 = J/2\{[\delta\omega_1 - \lambda(\delta\gamma_2 + \delta\gamma_3)]^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2\} + 1/2(\mu - J\lambda^2 - 4m\varepsilon^4)\times$$
$$\times[(\delta\gamma_2)^2 + (\delta\gamma_2 + \delta\gamma_3)^2 + (\delta\gamma_3)^2]$$

здесь степень неустойчивости $\chi = 2$. В этом случае теорема Рауса и ее обращения не позволяют сделать заключение об устойчивости или неустойчивости стационарных движений. Эти движения неустойчивы по первому приближению.

Для движений (3.6) формула (4.1) дает

$$\delta^2 W_0 = J/2[(\delta\omega_1)^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2] + 1/2(\mu - J\lambda^2)[(\delta\gamma_2)^2 + (\delta\gamma_3)^2],$$

и степень неустойчивости $\chi = 0$. Следовательно, стационарные движения октаэдра, обращенного к притягивающему центру вершиной, устойчивы.

Бифуркационная диаграмма на плоскости параметров h и k в рассматриваемом случае будет иметь тот же вид, что и в случае тетраэдра, причем параболы P_i ($i = 0, 1, 2$), определяющие бифуркационное множество, на котором происходит перестройка области возможного движения, определяются соотношениями

$$P_0 : h_0 = \frac{k^2}{J} - m_1(6 + 210\varepsilon^4),\ P_1 : h_1 = \frac{k^2}{J} - m_1(6 + 105\varepsilon^4),$$

$$P_2 : h_2 = \frac{k^2}{J} - m_1(6 + 70\varepsilon^4),\ (m_1 = fM_0M/R).$$

Как и в п. 2, область возможных движений выше параболы P_2 представляет собой всю сферу $S^2 = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3;\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1\}$. Между параболами P_2 и P_1 область возможных движений представляет собой сферу с восемью дырками $(S^2 / \bigcup_1^8 D_i)$, между параболами P_1 и P_0 – шесть дисков $(\bigcup_1^6 D_i)$, а ниже параболы P_0 – пустое множество.

Для рассмотренных в настоящей работе и в [3] тетраэдра, куба и октаэдра имеет место любопытный факт: размерность элемента тела (точка, ребро, грань), которым оно обращено в стационарном движении к притягивающему центру, совпадает со степенью неустойчивости.

Литература

1. Рубановский В.Н., Степанов С.Я. О теореме Рауса и методе Четаева построения функции Ляпунова из интегралов уравнения движения//ПММ. – 1969. – Т. 33, № 5. – С. 904-912.
2. Смейл С. Топология и механика//Успехи матем. наук. – 1972. – Т. 27, № 2. – С. 77-133.
3. Суликашвили Р.С. Влияние моментов инерции высших порядков на динамику твердого тела с неподвижной точкой// Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. – М. – ВЦ АН СССР. – 1985. – С. 90-104.

УДК 531.314

А.С. СУМБАТОВ

О ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛАХ НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Рассматриваются механические системы с голономными нестационарными связями, подверженные действию позиционных активных сил.

Если $q^1, \dots, q^n$ – обобщенные координаты, t – время, то уравнения движения системы запишутся в виде [1]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = Q_i\ (i = 1, \dots, n), \tag{1}$$

где

$$T = \frac{1}{2} a_{ij}(t, q)\,\dot q^i \dot q^j + \frac{1}{2} a_i(t, q)\dot q^i + a(t, q) -$$

кинетическая энергия, $Q_i = Q_i(t, q^1, \dots, q^n)$ – обобщенные силы.

По повторяющимся индексам подразумевается суммирование в пределах от 1 до n. Функции a_{ij}, a_i, a, Q при каждом значении $t \geq t_0$ определены на конфигурационном многообразии X_n системы. Будем предполагать, что в некоторой окрестности U произвольной точки $p \in X_n$ существуют и непрерывны все те их производные, которые используются в дальнейших рассуждениях.

Ставится вопрос, каким условиям должны удовлетворять функции a_{ij}, a_i, a, Q в окрестности U, отнесенной к произвольно выбранным локальным координатам $q^1, \dots, q^n$, чтобы уравнения Лагранжа (1) допускали в U первый интеграл вида

$$\xi_i(t, q)\dot q^i + \xi(t, q) = \text{const}\ (\xi_i, \xi \in C^2)? \tag{2}$$

Для случая $n = 2$ ответ дан ниже при следующем ограничении

$$[(\partial_1 K)^2 + (\partial_2 K)^2]|_{U, \forall t \geq t_0} \neq 0 \quad (\partial_i f = \frac{\partial f}{\partial q^i}), \tag{3}$$

где $K(t, q^1, q^2)$ – гауссова кривизна многообразия X_2, снабженного положительно-определенной нестационарной метрикой

$$ds^2 = a_{ij}\, dq^i\, dq^j, \quad \omega^2 = \det \| a_{ij} \| \quad (i, j = 1, 2). \tag{4}$$

Разрешив (1) относительно обобщенных ускорений, получим уравнения

$$\ddot{q}^i = -\Gamma^i_{jk}\, \dot{q}^j \dot{q}^k - C^i_l\, \dot{q}^l + F^i \quad (i = 1, \dots, n), \tag{5}$$

в которых

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} a^{il} (\partial_k a_{jl} + \partial_j a_{kl} - \partial_l a_{jk}), \quad C^i_l = a^{ij} (\partial_t a_{lj} + \partial_l a_j - \partial_j a_l),$$

$$F^i = a^{ij} (Q_j + \partial_j a - \partial_t a_j), \quad \| a^{ij} \| = \| a_{ij} \|^{-1}$$

$$(i, j, k, l = 1, \dots, n).$$

Если (2) – интеграл уравнений (5), то

$$\xi_{ij}\, \dot{q}^i \dot{q}^j + (\partial_t \xi_l + \partial_l \xi - \xi_i C^i_l) \dot{q}^l + \xi_i F^i + \partial_t \xi = 0 \quad (\xi_{ij} = \partial_j \xi_i - \Gamma^k_{ij}\, \xi_k),$$

откуда следует, что

$$\xi_{ij} + \xi_{ji} = 0 \quad (i \leq j = 1, \dots, n), \tag{6}$$

$$\partial_t \xi_l + \partial_l \xi - \xi_i C^i_l = 0, \quad \xi_i F^i + \partial_t \xi = 0 \quad (l = 1, \dots, n). \tag{7}$$

Заменим уравнения (7) условиями их интегрируемости

$$\partial_r (\partial_t \xi_l - \xi_i C^i_l) = \partial_l (\partial_t \xi_r - \xi_i C^i_r), \quad \partial_l (\xi_i F^i) = \partial_t (\partial_t \xi_l - \xi_i C^i_l) \tag{8}$$

$$(r > l = 1, \dots, n).$$

Число уравнений (6) и (8) превышает число неизвестных функций $\xi_1, \dots, \xi_n$, поэтому решение существует только при дополнительных условиях. Эти условия и являются искомыми.

Заметим, что, когда метрика (4) не зависит от времени, уравнения (6) представляют собой уравнения Киллинга [2].

При $n = 2$ условия совместности уравнений Киллинга хорошо известны [3], причем, если кривизна K непостоянна, общее решение можно записать в явном виде. Оче-

видно, эти результаты справедливы и для рассматриваемого нестационарного случая, поскольку переменная t входит в (6) как параметр. Отличие состоит лишь в том, что постоянные интегрирования в общем решении соответственно заменяются функциями времени. Следовательно, уравнения (6) совместны в том и только в том случае, когда первый $\Delta_1 K = a^{ij} \partial_i K \partial_j K$ и второй $\Delta_2 K = \frac{1}{\omega} \partial_i (\omega a^{ij} \partial_j K)$ дифференциальные параметры кривизны являются функциями только переменных K, t.

Общее решение уравнений (6) имеет вид

$$\xi_l = m(t) \eta_l, \quad \eta_l = \mu \partial_i K a^{ij} e_{jl} \quad (l = 1, 2), \tag{9}$$

где

$$\mu = \frac{1}{\Delta_1 K} \exp \left(\int \frac{\Delta_2 K}{\Delta_1 K} dK \right), \quad e_{11} = e_{22} = 0, \quad e_{12} = -e_{21} = \omega.$$

Оно просто получается, если, зафиксировав t, метрику (4) переписать в новых локальных координатах $Q^1 = K$ и $Q^2 = \int (\mu \Delta_1 K)^{-1} \partial_i K a^{ij} e_{jl}\, dq^l$, координата Q^2 оказывается циклической. В формулах (9) кривизну K можно заменить любой функцией $\Phi = \Phi(K, t)$, $\partial\Phi / \partial K \neq 0$.

Рассмотрим

$$R = \partial_1 \eta_2 - \partial_2 \eta_1 = -2\omega \sqrt{\Delta_1 K}\, \mu \left(\frac{1}{2\sqrt{\Delta_1 K}} \frac{\partial (\Delta_1 K)}{\partial K} - \frac{\Delta_2 K}{\sqrt{\Delta_1 K}} \right).$$

Выражение в круглых скобках равно геодезической кривизне r координатной линии Q^2.

В силу условия $\Delta_1 K = g(K, t)$ линии Q^1 являются геодезическими. Поэтому по формуле Лиувилля [3] имеем

$$K = -\frac{dr}{ds_1} - r^2, \tag{10}$$

где s_1 – длина, отсчитываемая вдоль линий Q^1.

Из (3), (10) следует, что при любом $t \geq t_0$ множество точек окрестности U, в которых $R = 0$, не содержит никакого открытого подмножества. Подставив (9) в первое из уравнений (8), получим при $R \neq 0$:

$$\frac{\dot{m}}{m} = \frac{1}{R} [\partial_1 (\eta_i C^i_2) - \partial_2 (\eta_i C^i_1) - \partial_t R]. \tag{11}$$

Таким образом, правая часть M этого уравнения должна быть функцией только времени. Чтобы $\xi^1, \xi^2 \in C^2$, необходимо потребовать непрерывную дифференцируемость $M(t)$

во всей окрестности $U, \forall t \geq t_0$.

После подстановки (9) и $\dot{m} = mM$, $\ddot{m} = m(M^2 + \dot{M})$ в оставшиеся уравнения (8), сокращения на m, получим

$$(M^2+\dot{M})\eta_l + 2M\partial_t \eta_l + \partial^2_{tt}\eta_l - \partial_l(\eta_i F^i) - M\eta_i C^i_l - \partial_t(\eta_i C^i_l) \equiv 0 \qquad (12)$$
$$(l = 1, 2).$$

В выражениях (11),(12)

$$\eta_i F^i = \mu\partial_i K e^{ij}(Q_j + \partial_j a - \partial_t a_j), \quad \eta_i C^i_l = \mu\partial_i K e^{ij}(\partial_l a_j - \partial_j a_l + \partial_t a_{lj}),$$

$$e^{11} = e^{22} = 0, \; e^{12} = -e^{21} = \frac{1}{\omega}. \qquad (13)$$

Теорема. Пусть $n = 2$ и в некоторой окрестности U произвольной точки конфигурационного многообразия системы выполняется условие (3). Для существования в U при $t \geq t_0$ первого интеграла (2) уравнений (1) необходимо и достаточно, чтобы дифференциальные параметры $\Delta_1 K$, $\Delta_2 K$ были функциями K, t, правая часть (11) была непрерывно дифференцируемой функцией времени $M=M(t)$ и удовлетворяла тождествам (12), в которых остальные величины определены формулами (9), (13).

Когда функции a_{ij}, a_i, a, Q не содержат t, соотношение (11) приводит к известному условию [4], что инвариант $(\partial_1 a_2 - \partial_2 a_1)/\omega$ является функцией от K, а из тождеств (12) следует, $\xi_i F^i = \mathrm{const}$.

ПРИМЕР. Материальная точка единичной массы движется в гладкой чаше эллипсоидальной формы. В главных осях $Oxyz$, принимаемых в качестве системы отсчета, уравнение поверхности чаши имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad (14)$$

Пусть длины полуосей изменяются со временем

$$a = a(t), \quad b = b(t), \; c = c(t),$$

и к материальной точке приложена активная сила F. Требуется, установить необходимые и достаточные условия, при которых в системе существует линейный первый интеграл.

Полная (гауссова) кривизна эллипсоидальной поверхности (14) равна

$$K = \frac{1}{a^2b^2c^2\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)}.$$

Если среди величин a, b, c есть неравные, то условие (3) выполняется.

Допустим, что в некоторый момент времени справедливы неравенства

$$a < b < c.$$

Докажем, что тогда первый и второй дифференциальные параметры кривизны не являются функциями только от K в рассматриваемый момент времени, т.е. необходимые условия существования линейного интеграла не выполняются.

Это утверждение можно доказать путем прямых вычислений, которые, однако, весьма громоздки. Поэтому поступим иначе, рассуждая от противного.

Если указанные параметры - функции кривизны, то линии $K = \mathrm{const}$ на поверхности (14) должны иметь постоянную геодезическую кривизну

$$r(K) = \mathrm{const} \qquad (15)$$

во всех своих точках. Обозначим эти линии через $l(u)$, они получаются пересечением эллипсоидальных поверхностей (14) и

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = u \quad (u = \mathrm{const} > 0).$$

Легко видеть, что геодезическая кривизна обеих ветвей линии $l(b^{-2} + \varepsilon)$ в точках, наиболее близко расположенных к оси Oy, неограниченна, когда $\varepsilon \to 0$ (при $\varepsilon = 0$ ветви соприкасаются и имеют излом в данных точках). Остальные точки этой линии регулярны, поэтому, по крайней мере, при $|\varepsilon| \ll 1$ условие (15) для нее не выполняется.

Таким образом, необходимо, чтобы эллипсоидальная поверхность чаши имела ось вращения. Пусть

$$a(t) = b(t) \neq c(t). \qquad (16)$$

Выразив декартовы координаты материальной точки

$$x = b\cos\theta\cos\psi, \; y = b\cos\theta\sin\psi, \; z = c\sin\theta$$

через углы эксцентрической аномалии $q^1 = \theta \; (\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq -\frac{\pi}{2})$ и долготы $q^2 = \psi \; (0 \leq \psi < 2\pi)$, найдем выражение для кинетической энергии точки

$$T = \frac{1}{2}\{\dot{\theta}^2[(b\sin\theta)^2 + (c\cos\theta)^2] + \dot{\psi}^2(b\cos\theta)^2\} +$$

$$+\frac{1}{4}\dot\theta\frac{d}{dt}(c^2-b^2)\sin 2\theta+(\dot b\cos\theta)^2+(\dot c\sin\theta)^2$$

Если обобщенная сила Q_2 (момент силы F относительно оси Oz) равна нулю во все время движения, то

$$\frac{\partial T}{\partial\dot\psi}=\text{const}\ -$$

циклический интеграл.

Условия (12) приводят к такому результату. Имеем $\eta_1=0$, $\eta_2=(b\cos\theta)^2$, $\eta_i C_1^i=0$, $\eta_i C_2^i=2b\dot b\cos^2\theta$. Поэтому $M(t)\equiv 0$, и из соотношений (12) находим

$$\eta_i F^i=\eta^i Q_i=Q_2=f(t)$$

(f – произвольная функция).

Следовательно, при любом законе (16) изменения длин полуосей чаши уравнения движения материальной точки допускают линейный первый интеграл

$$\dot\psi(b\cos\theta)^2-\int f(t)dt=\text{const}.$$

Литература

1. Суслов Г.К. Теоретическая механика. – 3-е изд.– М.–Л.: Гостехиздат, 1944. – 655 с.
2. Эйзенхарт Л.П. Непрерывные группы преобразований: Пер. с англ. – М.: Иностр. лит., 1947. – 360 с.
3. Норден А.П. Теория поверхностей. – М.: Гостехиздат, 1956. – 260 с.
4. Сумбатов А.С. О циклических координатах консервативных динамических систем с двумя степенями свободы//Теория устойчивости и ее приложения. – Новосибирск: Наука, 1979. – С. 214–221.

УДК 531.36

Г.П.ЭПРИКАШВИЛИ

О БИФУРКАЦИИ И УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРМАНЕНТНЫХ ВРАЩЕНИЙ ТЯЖЕЛОГО ЭЛЛИПСОИДА ВРАЩЕНИЯ НА ГЛАДКОЙ ПЛОСКОСТИ

В работе [1] определены перманентные вращения тяжелого трехосного эллипсоида на гладкой горизонтальной плоскости, условия их существования, ветвления и устойчивости. В данной работе изучается аналогичная задача для эллипсоидов вращения с трехосным эллипсоидом инерции.

На гладкой горизонтальной плоскости рассматривается тяжелое твердое тело, ограниченное эллипсоидальной поверхностью, главные оси которой совпадают с главными осями центрального эллипсоида инерции. Без ограничения общности полагаем, что проекция центра масс тела на опорную плоскость неподвижна. Выберем систему координат $Ox_1x_2x_3$, неизменно связанную с телом, с началом в центре масс и осями, совпадающими с осями центрального эллипсоида инерции.

Уравнения движения тела допускают первые интегралы:

энергии $U=m\dot z^2+J_1\omega_1^2+J_2\omega_2^2+J_3\omega_3^2+2mgz=h$,

площадей $U_1=J_1\omega_1\gamma_1+J_2\omega_2\gamma_2+J_3\omega_3\gamma_3=k$,

геометрический $U_2=\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1$,

где z – высота центра масс над опорной плоскостью

$$z^2=a_1^2\gamma_1^2+a_2^2\gamma_2^2+a_3^2\gamma_3^2;$$

$\omega_1,\omega_2,\omega_3$ и $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ – координаты вектора угловой скорости тела $\bar\omega$ и единичного вектора восходящей вертикали $\bar\gamma$; m – масса тела; J_1, J_2, J_3 и a_1, a_2, a_3 – главные центральные моменты инерции эллипсоида и полуоси его поверхности соответственно.

Стационарные движения тела устанавливаем на основе теоремы Рауса, согласно которой стационарным значениям интеграла энергии при постоянных значениях интегралов площадей и геометрического отвечают стационарные движения системы. Таким образом, задача определения стационарных движений тела сводится к задаче отыскания стационарных значений функции

$$2W = U - 2\lambda(U_1 - k) + \sigma(U_2 - 1),$$

где λ и σ – неопределенные множители Лагранжа. Условия стационарности этой функции задаются системой уравнений:

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda} = k - U_1 = 0,\ \frac{\partial W}{\partial \sigma} = \frac{1}{2}(U_2 - 1) = 0,\ \frac{\partial W}{\partial \dot z} = m\dot z = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \omega_1} = J_1(\omega_1 - \lambda\gamma_1) = 0,\ \frac{\partial W}{\partial \gamma_1} = \left(\frac{mga_1^2}{z} + \sigma\right)\gamma_1 + \lambda J_1\omega_1 = 0\ (123).$$

Символ (123) означает круговую перестановку индексов 123.

В дальнейшем полагаем, что

$$J_1 < J_2 < J_3.$$

1. Рассмотрим случай, когда полуоси эллипсоида удовлетворяют соотношениям

$$a_1 = a_2 < a_3.$$

Тогда уравнения стационарных движений (1) допускают пять однопараметрических семейств решений

$$\omega_1 = \lambda\gamma_1,\ \omega_2 = \omega_3 = 0,\ \gamma_1^2 = 1,\ \gamma_2 = \gamma_3 = 0,\quad \sigma = J_1\lambda^2 - mga_1,$$
$$k = J_1\lambda\quad (123)\ \text{при}\ a_2 = a_1;$$

$$\omega_1 = 0,\ \omega_2 = \lambda\gamma_2,\ \omega_3 = \lambda\gamma_3,\ \gamma_1 = 0,\ \gamma_2^2 = \frac{a_3^2(\lambda^4 - \lambda_{12}^4)}{\lambda^4(a_3^2 - a_1^2)},$$
$$\gamma_3^2 = \frac{a_1^2(\lambda_{13}^4 - \lambda^4)}{\lambda^4(a_3^2 - a_1^2)},\ \sigma = \frac{J_2a_3^2 - J_3a_1^2}{a_3^2 - a_1^2},\ k = k_1(\lambda) = J_{23}\lambda, \tag{3}$$

$$\omega_2 = 0,\ \omega_1 = \lambda\gamma_1,\ \omega_3 = \lambda\gamma_3,\ \gamma_2 = 0,\ \gamma_1^2 = \frac{a_3^2(\lambda^4 - \lambda_{21}^4)}{\lambda^4(a_3^2 - a_1^2)},$$
$$\gamma_3^2 = \frac{a_1^2(\lambda_{23}^4 - \lambda^4)}{\lambda^4(a_3^2 - a_1^2)},\ \sigma = \frac{J_1a_3^2 - J_3a_1^2}{a_3^2 - a_1^2},\ k = k_2(\lambda) = J_{31}\lambda, \tag{4}$$

где

$$J_{23} = \frac{J_2a_3^2 - J_3a_1^2}{a_3^2 - a_1^2} + \frac{m^2g^2(a_3^2 - a_1^2)}{\lambda^4(J_3 - J_2)},$$

$$J_{31} = \frac{J_1a_3^2 - J_3a_1^2}{a_3^2 - a_1^2} + \frac{m^2g^2(a_3^2 - a_1^2)}{\lambda^4(J_3 - J_1)},$$

$$\lambda_{12}^2 = \frac{mg(a_3^2 - a_1^2)}{a_3(J_3 - J_2)},\ \lambda_{13}^2 = \frac{mg(a_3^2 - a_1^2)}{a_1(J_3 - J_2)},$$

$$\lambda_{21}^2 = \frac{mg(a_3^2 - a_1^2)}{a_3(J_3 - J_1)},\ \lambda_{23}^2 = \frac{mg(a_3^2 - a_1^2)}{a_1(J_3 - J_1)}.$$

Решения (2) существуют при любых λ, решения (3) – при $\lambda_{12}^2 \le \lambda^2 \le \lambda_{13}^2$, решения (4) – при $\lambda_{23}^2 \ge \lambda^2 \ge \lambda_{21}^2$.

Решения (2) описывают равномерные вращения эллипсоида вокруг главных центральных осей инерции с угловой скоростью λ. Решения (3) и (4) описывают равномерные вращения эллипсоида вокруг осей, проходящих через начало системы координат и лежащих соответственно в главных плоскостях Ox_2x_3 и Ox_1x_2 центрального эллипсоида инерции.

Рассмотрим девятимерное пространство ($\omega_1, \omega_2, \omega_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \lambda, \sigma, k$). В этом пространстве решениям (2), (3) и (4) соответствуют точки однопараметрической кривой, три ветви P_1, P_2, P_3 которой задаются уравнениями (2), а две ветви Q_1, Q_2 – уравнениями (3), (4).

Ветви P_1, P_2, P_3, которым отвечают равномерные вращения эллипсоида вокруг главных центральных осей инерции, в подпространстве (λ, σ, k) являют собой параболы P_1, P_2, P_3 с общей осью симметрии, расположенные соответственно в плоскостях $\pi_1(k = J_1\lambda)$, $\pi_2(k = J_2\lambda)$, $\pi_3(k = J_3\lambda)$. Вершинам парабол соответствуют положения равновесия эллипсоида. Ветви Q_1, Q_2, которым отвечают равномерные вращения эллипсоида вокруг осей, расположенных в главных плоскостях центрального эллипсоида инерции, в подпространстве (λ, σ, k) являют собой отрезки линий Q_1, Q_2, расположенные между плоскостями π_2 и π_3, π_3 и π_1. Концы этих отрезков лежат соответственно на параболах P_2 и P_3, P_3 и P_1.

В подпространстве ($\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$) ветвям P_1, P_2, P_3 соответствуют точки $\gamma_1^2 = 1$, $\gamma_2^2 = 1$, $\gamma_3^2 = 1$, а ветвям Q_1,

Q_2 – дуги больших кругов с концами в точках $\gamma_2^2 = 1$ и $\gamma_3^2 = 1$, $\gamma_3^2 = 1$ и $\gamma_1^2 = 1$.

Вид проекций ветвей P_1, P_2, P_3 и Q_1, Q_2 схематически указан на рис. 1 (*а* – в подпространстве (λ, σ, k) для $\lambda > 0$, $\sigma > 0$, $k > 0$; *б* – в подпространстве $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ для $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$, $\gamma_3 > 0$; *в* – в плоскости (λ, k) для $\lambda > 0$, $k > 0$).

На основе теоремы Рауса и ее обращения [2] исследуем устойчивость перманентных вращений эллипсоида по отношению к переменным ω_1, ω_2, ω_3 и γ_1, γ_2, γ_3, вариации которых обозначаем соответственно через ξ_1, ξ_2, ξ_3 и η_1, η_2, η_3.

Для решений (2) вторые вариации функции W при $\delta U_1 = \delta U_2 = 0$ имеют вид

$$\delta^2 W = m\dot{z}^2 + J_2(\xi_2 - \lambda\eta_2)^2 + J_3(\xi_3 - \lambda\eta_3)^2 + \\ + [(J_1 - J_2)\lambda^2 + mga_1^{-1}(a_2^2 - a_1^2)]\eta_2^2 + \\ + [(J_1 - J_3)\lambda^2 + mga_1^{-1}(a_3^2 - a_1^2)]\eta_3^2 \quad (123) \qquad (5)$$

при $a_2 = a_1$.

На основе анализа этих выражений устанавливаем, что вращения эллипсоида вокруг оси Ox_1, отвечающей наименьшему центральному моменту инерции J_1, неустойчивы ($\chi = 1$) при $0 \le \lambda^2 < \lambda_{23}^2$ и имеют степень неустойчивости $\chi = 2$ при $\lambda^2 \ge \lambda_{23}^2$.

Вращения эллипсоида вокруг оси Ox_2, отвечающей среднему центральному моменту инерции J_2, устойчивы ($\chi = 0$) при $0 \le \lambda^2 < \lambda_{13}^2$ и неусточивы ($\chi = 1$) при $\lambda^2 > \lambda_{13}^2$

Вращения эллипсоида вокруг оси Ox_3, отвечающей наибольшему центральному моменту инерции J_3, имеют степень неустойчивости $\chi = 2$ при $0 \le \lambda^2 < \lambda_{21}^2$, неустойчивы при $\lambda_{21}^2 < \lambda^2 < \lambda_{12}^2$ и устойчивы ($\chi = 0$) при $\lambda^2 > \lambda_{12}^2$.

Для решений (3) и (4) вторые вариации функции W при $\delta U_1 = \delta U_2 = 0$ имеют соответственно вид

$$\delta^2 W = m\dot{z}^2 + J_1(\xi_1 - \lambda\eta_1)^2 + \frac{J_2 J_{23}}{J_3\gamma_3^2}\left[\xi_2 - \lambda\eta_2 - \frac{2\lambda(J_3 - J_2)}{J_{23}}\eta_2\right]^2 + \\ + \lambda^2(J_2 - J_1)\eta_1^2 - \frac{(J_3 - J_2)^3\lambda^6\gamma_2^2}{m^2 g^2 J_{23}(a_3^2 - a_1^2)}\frac{dk_1}{d\lambda}\eta_2^2,$$

$$\delta^2 W = m\dot{z}^2 + J_2(\xi_2 - \lambda\eta_2)^2 + \frac{J_3 J_{31}}{J_1\gamma_1^2}\left[\xi_3 - \lambda\eta_3 - \frac{2\lambda(J_1 - J_3)}{J_{31}}\eta_3\right]^2 - \\ - \lambda^2(J_2 - J_1)\eta_2^2 - \frac{(J_3 - J_1)^3\lambda^6\gamma_3^2}{m^2 g^2 J_{31}(a_3^2 - a_1^2)}\frac{dk_2}{d\lambda}\eta_3^2. \qquad (6)$$

Введем обозначения

$$\delta_1 = J_2 J_3^{-1},\ \delta_2 = J_1 J_3^{-1},\ \delta_3 = J_1 J_2^{-1},\ \varepsilon_1 = a_2^2 a_3^{-2},\ \varepsilon_2 = a_1^2 a_3^{-2},$$

$$\varepsilon_3 = a_1^2 a_2^{-2},\ \lambda_1^4 = \frac{3m^2 g^2(a_3^2 - a_2^2)}{(J_3 - J_2)(J_2 a_3^2 - J_3 a_1^2)}. \quad (123)$$

Функция $\dfrac{dk_i}{d\lambda} < 0$ для всех допустимых значений λ, если

$$\delta_i < 4\varepsilon_i(1 + 3\varepsilon_i)^{-1}, \qquad (7)$$

а также для $\lambda^2 < \lambda_i^2$, если

$$4\varepsilon_i(1 + 3\varepsilon_i)^{-2} \le \delta_i \le \frac{1}{4}(3 + \varepsilon_i), \qquad (8)$$

$\dfrac{dk_i}{d\lambda} > 0$ для всех допустимых значений λ, если

$$\delta_i > \frac{1}{4}(3 + \varepsilon_i), \qquad (9)$$

а также для $\lambda^2 > \lambda_i^2$, если удовлетворены условия (8), здесь $i = 1, 2, 3$; функция $k_3(\lambda)$ определена в (10).

А это значит, что вращения эллипсоида вокруг оси, перпендикулярной оси Ox_1, устойчивы ($\chi = 0$) при любых λ, если имеет место $(7)_1$, а также для $\lambda^2 < \lambda_1^2$, если выполнены условия $(8)_1$, и неустойчивы ($\chi = 1$) для любых λ при $(9)_1$, а также для $\lambda^2 > \lambda_1^2$ при $(8)_1$.

Анализ формулы (6) убеждает, что вращения эллипсоида вокруг оси, перпендикулярной оси Ox_2, неустойчивы ($\chi = 1$) для любых λ, если выполнено условие $(7)_2$, а также для $\lambda^2 < \lambda_2^2$, если имеют место неравенства $(8)_2$, и степень неустойчивости вращений $\chi = 2$ для любых λ при выполнении условий $(9)_2$, а также для $\lambda^2 > \lambda_2^2$, если выполняются условия $(8)_2$.

Если выполнены условия $(8)_1$ и $(8)_2$, то значениям $\lambda^2 = \lambda_1^2$ и $\lambda^2 = \lambda_2^2$ отвечают точки бифуркации. При $(8)_1$ ветвь Q_1 касается плоскости

$$k = k_1 = \frac{J_2a_3^2 - J_3a_1^2}{a_3^2 - a_1^2}\lambda_1 + \frac{m^2g^2(a_3^2 - a_1^2)}{\lambda_1^3(J_3 - J_2)},$$

а при $(8)_2$ ветвь Q_2 касается плоскости

$$k = k_2 = \frac{J_1a_3^2 - J_3a_1^2}{a_3^2 - a_1^2}\lambda_2 + \frac{m^2g^2(a_3^2 - a_1^2)}{\lambda_2^3(J_3 - J_1)}.$$

На рис. 1,*в* указаны проекции кривых перманентных вращений эллипсоида на плоскости (k, λ) и распределение степеней неустойчивости на ее ветвях для $k>0$ в случае $a_1 = a_2 < a_3$.

2. Рассмотрим случай, когда полуоси эллипсоида удовлетворяют соотношениям

$$a_1 = a_2 > a_3.$$

Тогда уравнения стационарных движений (1) допускают лишь три однопараметрических семейств решений (2).

На основе анализа выражения (5) для этих решений убеждаемся, что равномерные вращения эллипсоида вокруг оси Ox_3, отвечающей наибольшему центральному моменту инерции J_3, устойчивы ($\chi = 0$); вокруг оси Ox_2, отвечающей среднему центральному моменту инерции J_3, неустойчивы ($\chi = 1$), а вокруг оси Ox_1, отвечающей наименьшему моменту инерции J_1, имеют степень неустойчивости $\chi = 2$. Схематически это указано на рис. 2.

3. Рассмотрим случай, когда полуоси эллипсоида удовлетворяют соотношениям

$$a_1 < a_2 = a_3.$$

Тогда уравнения стационарных движений (1) наряду с тремя семействами решений (2) допускают еще два однопараметрических семейства, эти решения (4), в которых $a_3 = a_2$, и

$$\begin{gathered}\omega_3 = 0,\ \omega_1 = \lambda\gamma_1,\ \omega_2 = \lambda\gamma_2,\ \gamma_3 = 0,\ \gamma_1^2 = \frac{a_2^2(\lambda^4 - \lambda_{31}^4)}{\lambda^4(a_2^2 - a_1^2)},\\ \gamma_2^2 = \frac{a_1^2(\lambda_{32}^4 - \lambda^4)}{\lambda^4(a_2^2 - a_1^2)},\ k = k_3(\lambda) = J_{12}\lambda,\ \lambda_{31}^2 \le \lambda^2 \le \lambda_{32}^2,\\ J_{12} = \frac{J_1a_2^2 - J_2a_1^2}{a_2^2 - a_1^2} + \frac{m^2g^2(a_2^2 - a_1^2)}{\lambda^4(J_2 - J_1)},\\ \lambda_{31}^2 = \frac{mg(a_2^2 - a_1^2)}{a_2(J_2 - J_1)},\ \lambda_{32}^2 = \frac{mg(a_2^2 - a_1^2)}{a_1(J_2 - J_1)}.\end{gathered} \tag{10}$$

Решения (4) при $a_3 = a_2$ описывают равномерные вращения эллипсоида вокруг оси, лежащей в главной плоскости Ox_1x_3 центрального эллипсоида инерции; ось равномерных вращений, описываемых решениями (10), лежит в главной плоскости инерции Ox_1x_2.

Исследуем устойчивость рассматриваемых перманентных вращений.

Для решений (2) вторые вариации функции W при $\delta U_1 = \delta U_2 = 0$ имеют вид (5) при $a_3 = a_2$, из анализа которых следует, что равномерные вращения эллипсоида вокруг оси Ox_1 устойчивы ($\chi = 0$) при $0 \le \lambda^2 < \lambda_{23}^2$, неустойчивы ($\chi = 1$) при $\lambda_{23}^2 < \lambda^2 < \lambda_{32}^2$, и степень неустойчивости $\chi = 2$ при $\lambda^2 > \lambda_{32}$; вокруг оси Ox_2 имеют степень неустойчивости $\chi = 2$ при $0 \le \lambda^2 < \lambda_{31}^2$ и неустойчивы при $\lambda^2 > \lambda_{31}^2$; вокруг оси Ox_3 неустойчивы ($\chi = 1$) при $0 \le \lambda^2 < \lambda_{21}^2$ и устойчивы ($\chi = 0$) при $\lambda^2 > \lambda_{21}^2$.

Для решений (4) при $a_3 = a_2$ и (10) вторые вариации функции W при $\delta U_1 = \delta U_2 = 0$ имеют соответственно вид

$$\delta^2 W = m\dot{z}^2 + J_2(\xi_2 - \lambda\eta_2) + \frac{J_3J_{31}}{J_1\gamma_1^2}\left[\xi_3 - \lambda\eta_3 - \frac{2\lambda(J_3 - J_2)\gamma_3^2}{J_{31}}\eta_2\right]^2 +$$
$$+ \lambda^2(J_3 - J_2)\eta_2^2 - \frac{(J_3 - J_1)^3\lambda^6\gamma_3^2}{m^2g^2J_{31}(a_2 - a_1)}\frac{dk_2}{d\lambda}\eta_3^2,$$

$$\delta^2 W = m\dot{z}^2 + J_3(\xi_3 - \lambda\eta_3)^2 + \frac{J_1J_{12}}{J_2\gamma_2^2}\left[\xi_1 - \lambda\eta_1 - \frac{2\lambda(J_1 - J_3)}{J_{12}}\eta_3\right]^2 -$$
$$- \lambda^2(J_3 - J_2)\eta_3^2 - \frac{(J_2 - J_1)^3\lambda^6\gamma_1^2}{m^2g^2J_{12}(a_2^2 - a_1^2)}\frac{dk_3}{d\lambda}\eta_1^2.$$

Отсюда следует, что вращения эллипсоида вокруг оси, перпендикулярной оси Ox_2, устойчивы ($\chi = 0$) для любых λ, если выполнены условия $(7)_2$, а также для $\lambda^2 < \lambda_2^2$, если имеют место неравенства $(8)_2$, и неусточивы ($\chi = 1$) при любых λ, если выполнены условия $(9)_2$, а также для $\lambda^2 > \lambda_2^2$ при $(8)_2$.

Вращения эллипсоида вокруг оси, перпендикулярной оси Ox_3, неустойчивы ($\chi = 1$) при любых λ, если выполнены условия $(7)_3$, а также для $\lambda^2 < \lambda_3^2$, если имеют место неравенства $(8)_3$, и имеют степень неустойчивости $\chi = 2$ для любых λ при выполнении условий $(9)_3$, а также

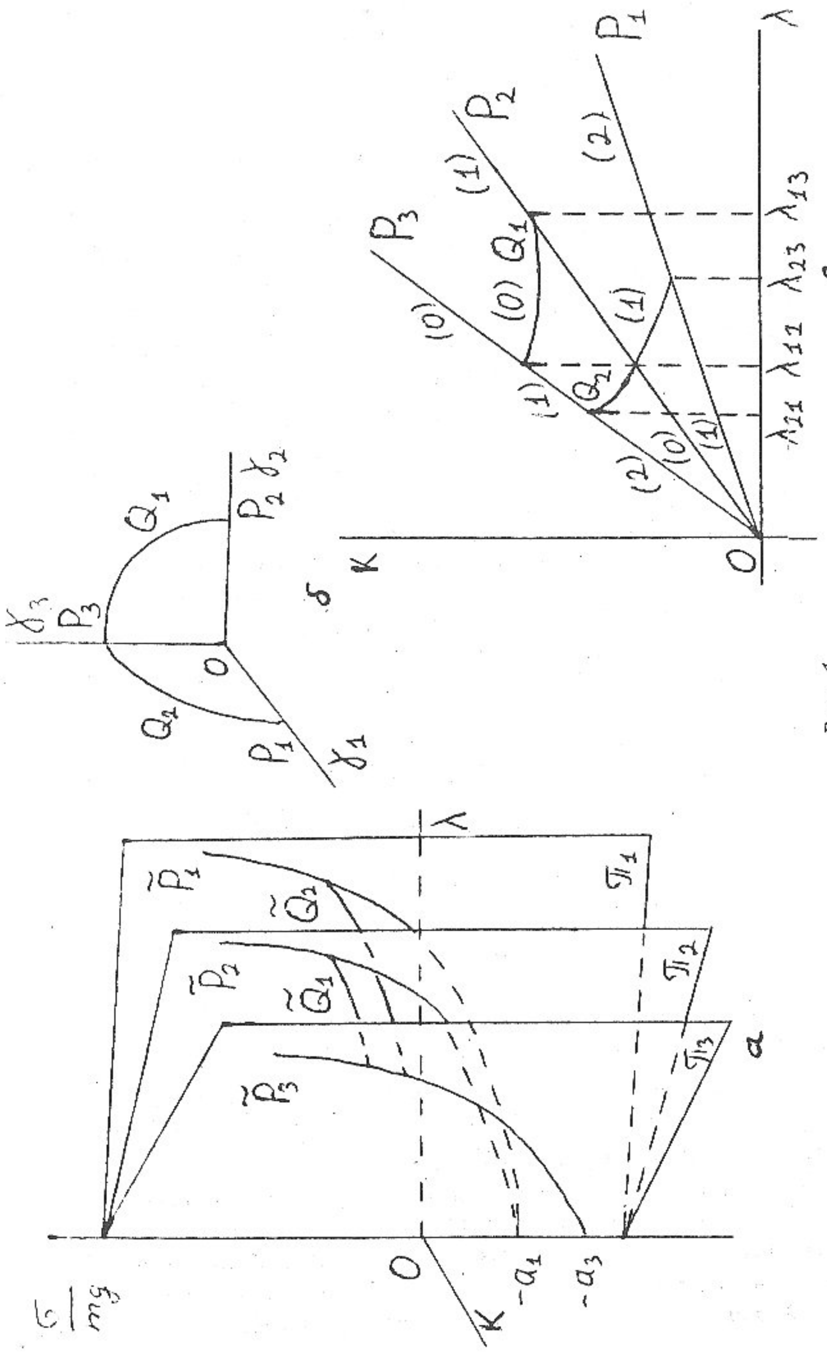


Рис. 1

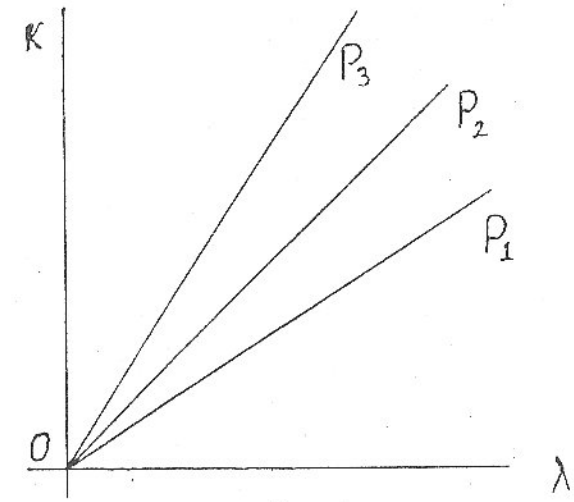


Рис. 2

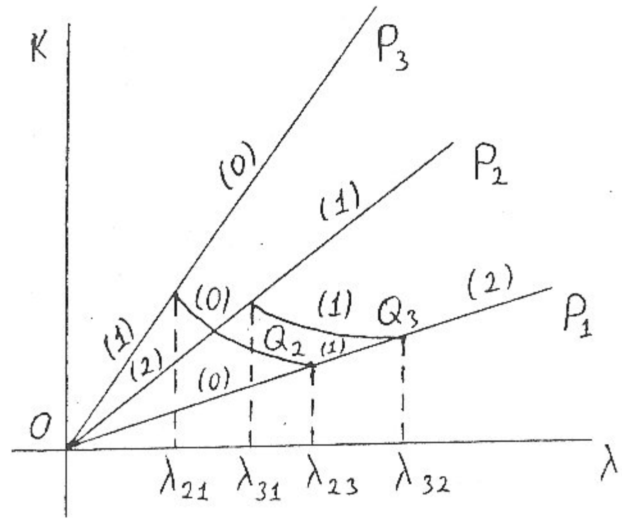


Рис. 3

для $\lambda^2 > \lambda_3^2$ при $(8)_3$.

При выполнении условий $(8)_2$ и $(8)_3$ значениям $\lambda^2 = \lambda_2^2$ и $\lambda^2 = \lambda_3^2$ отвечают точки бифуркации.

Схематически это указано на рис. 3.

Литература

1. Карапетян А.В., Рубановский В.Н. О бифуркации и устойчивости перманентных вращений тяжелого трехосного эллипсоида на гладкой плоскости//ПММ. - 1987. - Т. 51. - Вып. 2. - С. 260-267.

2. Рубановский В.Н. О бифуркации и устойчивости стационарных движений//Теоретична и приложна механика. - 1974. - Т. 5, № 1. - С. 67-79.

УДК 532.582

А.А. БУРОВ, В.Н. РУБАНОВСКИЙ

ОБ ОДНОМ ОБЩЕМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ТИПА КИРХГОФА-КЛЕБША

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\bar{R}} = \bar{R} \times \bar{\omega}, \ \dot{\bar{P}} = \bar{P} \times \bar{\omega} + \bar{R} \times \bar{u}, \ \bar{\omega} = \partial T/\partial \bar{P}, \ \bar{u} = \partial T/\partial \bar{R}, \tag{1.1}$$

где

$$T = T(\bar{R}, \bar{P}) - \tag{1.2}$$

гладкая функция на $R^3(\bar{R}) \times R^3(\vec{P})$. Системы вида (1.1) описывают движение в ряде важных задач механики таких, как задача о движении твердого тела (гиростата) вокруг неподвижной точки в осесимметричном поле сил, задача о движении тела в жидкости [1]. Эти уравнения в общем случае допускают три первых интеграла: $F_0 = T$, $F_1 = \bar{P} \cdot \bar{R}$, $F_2 = \bar{R} \cdot \bar{R}$. Для их интегрируемости в общем случае недостает одного дополнительного интеграла.

Используя аппарат винтового исчисления [2], уравнения (1.1) можно представить в виде

$$\dot{\bar{S}} = \bar{S} \times \bar{U}, \tag{1.3}$$

где

$$\bar{S} = \bar{R} + \varepsilon \vec{P}, \ \bar{U} = \bar{\omega} + \varepsilon \bar{u}, \tag{1.4}$$

ε – множитель Клиффорда, обладающий свойством $\varepsilon^2 = 0$.

Уравнения (1.3) допускают интеграл

$$\bar{S}^2 = G^2 = \text{const}, \quad G = R + \varepsilon h R, \tag{1.5}$$

где h и R – вещественные произвольные постоянные. Отделяя в (1.5) главную и моментную части, получаем известные первые интегралы уравнений (1.1).

Пусть

$$U_1 = A_1 S_1, \ A_1 = b_1 + \varepsilon a_1. \ (123) \tag{1.6}$$

Уравнения (1.3) с учетом (1.6) принимают вид

$$\dot{S}_1 = (A_3 - A_2) S_2 S_3 \quad (123) \tag{1.7}$$

и по форме совпадают с уравнениями Эйлера движения тяжелого твердого тела, закрепленного в его центре масс.

Уравнения (1.7) наряду с интегралом (1.5) допускают первый интеграл

$$A_1 S_1^2 + A_2 S_2^2 + A_3 S_3^2 = Q = H + 2\varepsilon E = \text{const}.$$

Отделяя здесь главную и моментную части, получаем интегралы уравнений (1.1)

$$b_1 R_1^2 + b_2 R_2^2 + b_3 R_3^2 = H, \tag{1.8}$$

$$\frac{1}{2}(a_1 R_1 + a_2 R_2 + a_3 R_3 + 2b_1 R_1 P_1 + 2b_2 R_2 P_2 + 2b_3 R_3 P_3) = E. \tag{1.9}$$

Таким образом, если функция Гамильтона (1.2) имеет вид (1.9), то уравнения (1.1) допускают дополнительный первый интеграл (1.8) и являются вполне интегрируемыми.

Заметим, что в случае, когда функция T представляет собой положительно-определенную квадратичную форму по переменным R_i, P_i, уравнения (1.1) описывают движение твердого тела в идеальной жидкости (R и P – векторы импульсивной силы и импульсивной пары). Квадратичная форма (1.9) не является положительно-определенной и, следовательно, ее нельзя интерпретировать как кинетическую энергию системы "тело плюс жидкость". Вместе с тем найденный интегрируемый случай представляет определенный интерес с математической точки зрения как один из примеров интегрируемости уравнений Кирхгофа-Клебша. Отметим, что в случае, когда $a_1 = a_2 = a_3$, уравнения (1.1) с функцией T, равной (1.9), интегрировались Стекловым [1, гл. II, уравнения (11), (16)].

2. Для указанного случая уравнения Кирхгофа-Клебша весьма просто интегрируются с использованием математического аппарата винтового исчисления [2].

Допустим, что разности

$$b_1 - b_3,\ b_2 - b_3,\ b_1 - b_2,$$
$$b_1 R^2 - H,\ b_2 R^2 - H,\quad H - b_3 R^2.$$

конечны, отличны от нуля и одного знака.

Тогда [1, стр. 57]

$$\begin{aligned} S_1 &= L\,\mathrm{cn}\,(MNt + \tau_*), \\ S_2 &= M\,\mathrm{sn}\,(MNt + \tau_*), \\ S_3 &= N\,\mathrm{dn}\,(MNt + \tau_*), \end{aligned} \tag{2.1}$$

где

$$L = \sqrt{\frac{Q - A_3 G^2}{A_1 - A_3}} = l + \varepsilon l^0, \tag{2.2}$$

$$M = \sqrt{\frac{Q - A_3 G^2}{A_2 - A_3}} = m + \varepsilon m^0,$$

$$N = \sqrt{\frac{A_1 G^2 - Q}{A_1 - A_3}} = n + \varepsilon n^0,$$

$$M = \frac{\sqrt{(A_1 - A_3)(A_2 - A_3)}}{A_3} = \mu + \varepsilon \mu^0,$$

а $\tau_* = \tau + \varepsilon \tau^0$ – произвольная дуальная постоянная. Отделяя в (2.2) главные и моментные части, получаем

$$l = \sqrt{\frac{H - b_3 R^2}{b_1 - b_3}},\ l^0 = l\left[\frac{2E - 2b_3 hR^2 - a_3 R^2}{2(H - b_3 R^2)} - \frac{a_1 - a_3}{2(b_1 - b_3)}\right],$$

$$m = \sqrt{\frac{H - b_3 R^2}{b_2 - b_3}},\ m^0 = m\left[\frac{2E - 2b_3 hR^2 - a_3 R^2}{2(H - b_3 R^2)} - \frac{a_2 - a_3}{2(b_2 - b_3)}\right],$$

$$n = \sqrt{\frac{b_1 R^2 - H}{b_1 - b_3}},\ n^0 = n\left[\frac{2E - 2b_1 hR^2 - a_1 R^2}{2(H - b_1 R^2)} - \frac{a_3 - a_1}{2(b_3 - b_1)}\right],$$

$$\mu = \frac{\sqrt{(b_1 - b_3)(b_2 - b_3)}}{b_3},\ \mu^0 = \mu\left[\frac{(b_1 - b_3)(a_2 - a_3) + (b_2 - b_3)(a_1 - a_3)}{2(b_1 - b_3)(b_2 - b_3)} - \frac{a_3}{b_3}\right].$$

Отделяя в (2.1) главные и моментные части, находим

$$R_1 = l\,\mathrm{cn}\,(\mu nt + \tau),\ R_2 = m\,\mathrm{sn}\,(\mu nt + \tau),\ R_3 = n\,\mathrm{dn}\,(\mu nt + \tau),$$

$$P_1 = l^0 \mathrm{cn}\,(\mu nt + \tau) - l\,[(\mu n^0 + \mu^0 n)t + \tau^0]\,\mathrm{sn}\,(\mu nt + \tau)\,\mathrm{dn}\,(\mu nt + \tau),$$

$$P_2 = m^0\,\mathrm{sn}\,(\mu nt + \tau) + m\,[(\mu n^0 + \mu^0 n)t + \tau^0]\,\mathrm{cn}\,(\mu nt + \tau)\,\mathrm{dn}\,(\mu nt + \tau),$$

$$P_3 = n^0\,\mathrm{dn}\,(\mu nt + \tau) - k^2 n\,[(\mu n^0 + \mu^0 n)t + \tau^0]\,\mathrm{cn}\,(\mu nt + \tau)\,\mathrm{sn}(\mu nt + \tau),$$

где

$$k = \sqrt{\frac{(b_2 - b_1)(b_3 R^2 - H)}{(b_3 - b_2)(H - b_1 R^2)}}\ -$$

модуль эллиптических функций, входящих в выражения искомого решения, а их вещественный период Ω определяется по формуле

$$\Omega = \frac{4}{\mu n} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{4k}{\mu n} .$$

3. Следует отметить, что в случае, когда

$$T = P \cdot \partial f_0/\partial R + f_1,$$

где $f_\alpha = f_\alpha(R)$, $\alpha = 0, 1$ – произвольные функции, уравнения (1.1) допускают дополнительный интеграл $F_3 = f_0$ и, следовательно, оказываются вполне интегрируемыми. В частном случае, когда

$$2f_0 = b_1R_1^2 + b_2R_2^2 + b_3R_3^2,\ 2f_1 = a_1R_1^2 + a_2R_2^2 + a_3R_3^2,$$

получаем найденный в п. 1 случай интегрируемости.

Литература

1. Стеклов В.А. О движении твердого тела в жидкости. – Харьков: Типография Адольфа Дарре, 1893. – 234 с.

2. Диментберг Ф.М. Винтовое исчисление. – М.: Наука, 1965. – 199 с.

Содержание

Задачи исследования устойчивости и
стабилизации движения

Редактор А.В.Лызлова. Техн. редактор Л.Г.Монахова
Корректура авторов.

Т-21108. Подписано в печать 26/Х1-87 г. Заказ 2.
Тираж 301 экз. Формат бумаги 60х90 1/16.
Уч.-изд. л.5,39. Усл.-печ. л. 7,75. Цена 40 коп.

Отпечатано на ротапринтах в ВЦ АН СССР
Москва, В-333, ул. Вавилова, 40