А. С. АНТИПИН

ГРАДИЕНТНЫЙ И ЭКСТРАГРАДИЕНТНЫЙ ПОДХОДЫ В БИЛИНЕЙНОМ РАВНОВЕСНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ[1]

(приложение к играм с ненулевой суммой)

Содержание.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 00-15-96080, 99-01-00064).

Оптимизация как путь к катастрофе.
В.И.Арнольд

1. Введение

Можно смело сказать, что в недавнем прошлом доминирующая схема принятия решений была основана на предположении о том, что имеется одно лицо, принимающее решение, которое выбирает наилучшее (в интересах всех — всегда утверждается) решение на заданном множестве альтернатив. Поскольку такой механизм принятия решений игнорирует в ситуации другие интересы или факторы, в том числе и конфликт, который нужно заранее согласовать, то рано или поздно это приводит к разрушительным противоречиям, и ситуация скачкообразно переходит в другое фазовое состояние. Такой переход — катастрофа со многими нежелательными последствиями. Задача оптимизации является абстрактной моделью этой схемы принятия решений.

В настоящее время в разных областях практической деятельности все чаще стали обсуждаться иные схемы принятия решений, основанные на балансе интересов всех участников ситуации. Теперь изначально постулируется, что ситуация носит конфликтный характер и необходимо найти решения, согласовывающие частично противоречивые интересы участников ситуации и разрешающие конфликт. Для описания таких ситуаций задача оптимизации не может рассматриваться как адекватный инструмент принятия сбалансированных решений. В качестве адекватной математической модели принятия согласованных решений могут выступать системы задач оптимизации (в частности, обратные задачи оптимизации) или игровые модели, а в качестве решений рассматриваются равновесные решения (неподвижные точки). Переход от оптимизационных моделей к равновесным существенно сдерживается отсутствием численных методов решения равновесных задач. Поэтому разработка таких методов и соответствующей математической техники — актуальная проблема.

В настоящей работе на примере билинейной равновесной задачи, которую можно рассматривать как линейное приближение нелинейных равновесных проблем, обсуждаются градиентный и экстраградиентный управляемые подходы для решения равновесных задач. Обсуждаемая ситуация усложняется наличием функциональных связанных ограничений, которые делают задачу трудной для вычислений. Предлагаемый подход применяется для решения игр с ненулевой суммой.

2. Седловой подход к вычислению равновесий

2.1. Содержательные равновесия

Прежде чем сформулировать формальную постановку равновесной задачи, рассмотрим несколько типичных ситуаций, для которых равновесная задача может трактоваться как естественная математическая модель.

1) Политика. Пусть политическая ситуация в абстрактной стране **R** характеризуется наличием двух политических партий: партии “правых” и партии “левых”. Все политические стратегии партии “правых” делают акцент на развитии производства, стратегии партии “левых” акцентируют внимание на социально справедливом распределении ресурсов.

Если в данный момент в стране **R** у власти “правые”, то значительная доля произведенных ресурсов направляется на расширение производства. В этой ситуации страна быстро развивается, но значительная доля ресурсов остается в руках небольшой группы менеджеров производства, в то время как незначительная доля оставшихся ресурсов приходится на большую часть населения, не участвующего в производстве. Такое распределение явно социально несправедливо, что в конце концов приводит к конфликту.

Если же, наоборот, у власти “левые”, то значительная часть ресурсов идет на социально справедливое распределение. Ресурсов на расширение производства не хватает, что приводит к свертыванию производства и обеднению страны в целом. Социально справедливо распределять становится нечего, возникает тотальный дефицит, и ситуация скатывается к катастрофе.

В этой ситуации с помощью процедуры голосования требуется определить пропорцию смеси из “правых” и “левых”, чтобы сформировать правительство, которое может сбалансировать (уравновесить) интересы производства и социально справедливого распределения. В случае отклонения от равновесной пропорции вправо или влево страна в том и другом случае приходит к социальной напряженности.

2) Экономика. В основе любой разумной экономики лежит механизм рынка. Рынок — это игра двух макроучастников: “спроса” и “предложения”. “Предложение” поставляет на рынок товары и старается продать их по цене как можно более высокой, поскольку чем выше цена, тем больше доход этого макроучастника. “Спрос” покупает товары и старается это сделать по цене как можно более низкой. В этом случае при фиксированном количестве денег покупатель сможет купить больше ресурсов.

В случае если спрос превышает предложение, цены на покупаемые ресурсы растут, так как продавец получает возможность продать их по цене более высокой, и наоборот, в случае, когда предложение превышает спрос, продавец понижает цены, так как он заинтересован продать все свои товары. Интуитивно ясно, что в результате разумных торговых переговоров участники всегда смогут придти к равновесным ценам, при которых спрос равен предложению, т.е. когда продавец продает все свои товары, а покупатель удовлетворяет свои потребности, купив нужные товары в нужном объеме. Отклонение от равновесия приводит к избыточному спросу с тем или иным знаком и, в конечном счете, к экономическому кризису.

3) Кибернетика. Это обширная область эмпирических знаний, связанная с управлением различными системами (живыми и техническими) с единой точки зрения. Известно, что живые организмы могут сохранять свою жизнеспособность, если значения их базовых параметров (температура, давление, химический состав крови и другие) принадлежат некоторому допустимому множеству значений, известному как гомеостазис. В случае отклонения параметров организма от гомеостазиса в действие вступают специальные механизмы, заложенные эволюцией, которые стараются вернуть базовые значения параметров в равновесное состояние гомеостазиса. Например, если температура среды обитания теплокровного организма сильно понижается, то система терморегуляции организма обеспечивает приток теплой крови к поверхностным тканям организма и согревает его. Наоборот, в случае достаточно сильного повышения температуры среды обитания система терморегуляции включает механизмы потоотделения и дыхания, которые обеспечивают выделение избытка тепла. Если отклонение температурных параметров организма от состояния равновесия (гомеостазиса) значительно, то теплокровный организм переходит в состояние болезни.

Поведение технических систем с точки зрения управления имеет ту же логику. Пусть поплавковый регулятор поддерживает заданный уровень воды в некоторой емкости. Если уровень воды в этой емкости падает, поплавок под действием силы тяжести перемещается вниз. Коромысло, которым поплавок связан с некоторым шарнирным механизмом, открывает заслонку в трубе. Вода поступает в емкость и поднимает поплавок; заслонка при этом закрывается. Поступление воды в емкость прекращается, заданный уровень воды восстанавливается. Этот уровень представляет собой равновесное состояние регулируемой системы.

При значительном отклонении от этого уровня техническая система может пойти вразнос.

2.2. Постановка равновесной задачи

1) Равновесные задачи на квадрате. В билинейной задаче равновесного программирования с функциональными ограничениями требуется найти неподвижную точку $v^* \in D^*$, удовлетворяющую экстремальному включению вида [1]

$$v^* \in \text{Argmin}\{\langle \Phi v^* + \varphi, w\rangle + (1/2)\langle Bw, w\rangle \mid Aw \leq a,\ w \geq 0\}, \tag{2.2.1}$$

где размерности матриц и векторов согласованы между собой так, что все векторно-матричные операции корректны. В частности, Φ, B — $n \times n$ матрицы, A — $m \times n$ матрица, φ, a — фиксированные векторы, переменные w и v принимают значения в одном и том же допустимом множестве $D = \{w \in \mathbb{R}^n \,|\, Aw \leq a,\, w \geq 0\}$. Предполагается, что экстремальное (маргинальное) отображение $w(v) \equiv \text{argmin}\{\langle \Phi v + \varphi, w\rangle + (1/2)\langle Bw, w\rangle \mid Aw \leq a,\, w \geq 0\}$ переводит каждую точку допустимого множества D в выпуклое замкнутое подмножество из D. Согласно [2] такое отображение при достаточно общих условиях имеет неподвижную точку, т.е. точку, которая содержится в своем образе $v^* \in w(v^*)$, где $v^* \in D^* \subset D$; при этом пара векторов v^*, v^* всегда лежит на диагонали квадрата $D \times D$.

Как следует из (2.2.1), любое решение этой задачи удовлетворяет неравенству

$$\langle \Phi v^* + \varphi, v^*\rangle + \frac{1}{2}\langle Bv^*, v^*\rangle \leq \langle \Phi v^* + \varphi, w\rangle + \frac{1}{2}\langle Bw, w\rangle \tag{2.2.2}$$

для всех $w \in D$. Неравенство можно рассматривать как эквивалентное определение неподвижной точки. Введем функцию (сдвиг относительно диагонали квадрата $D \times D$)

$$\Psi(v, w) = \langle \Phi v + \varphi, w\rangle + (1/2)\langle Bw, w\rangle - \langle \Phi v + \varphi, v\rangle - (1/2)\langle Bv, v\rangle. \tag{2.2.3}$$

Эта функция на диагонали квадрата $D \times D$ равна нулю: $\Psi(v, w)|_{v=w} = 0 \ \forall v \in D$. Используя $\Psi(v, w)$, задачу (2.2.2) можно представить в виде

$$0 \leq \Psi(v^*, w) \qquad \forall w \in D. \tag{2.2.4}$$

Рассмотрим несколько частных случаев общей билинейной задачи (2.2.1).

• *Седловое программирование.* Пусть матрица Φ в (2.2.1) антисимметрична, т.е. удовлетворяет условию $\Phi = -\Phi^\top$, а $B = 0$ и $\varphi = 0$; тогда

$$v^* \in \text{Argmin}\{\langle \Phi v^*, w\rangle \mid Aw \leq a,\ w \geq 0\}. \tag{2.2.5}$$

Покажем, что пара v^*, v^*, где v^* — неподвижная точка (2.2.5), является седлом для функции $\langle \Phi v, w\rangle$ на множестве $D \times D$. Сначала отметим, что эта функция равна нулю на диагонали квадрата $D \times D$. Действительно, используя свойство антисимметрии, имеем $\langle \Phi v, v\rangle = \langle v, \Phi^\top v\rangle = -\langle v, \Phi v\rangle = -\langle \Phi v, v\rangle$. Отсюда немедленно получаем $\langle \Phi v, v\rangle = 0 \ \forall v \in D$. Поскольку v^* — решение (2.2.5), то выполняется неравенство $0 = \langle \Phi v^*, v^*\rangle \leq \langle \Phi v^*, w\rangle \ \forall w \in D$. Умножим это неравенство на -1; тогда $0 \geq -\langle \Phi v^*, w\rangle = \langle \Phi^\top v^*, w\rangle = \langle v^*, \Phi w\rangle = \langle \Phi w, v^*\rangle$ $\forall w \in D$. Отсюда

$$\langle \Phi v, v^*\rangle \leq \langle \Phi v^*, v^*\rangle \leq \langle \Phi v^*, w\rangle \qquad \forall v, w \in D, \tag{2.2.6}$$

т.е. v^*, v^* — седловая точка. Таким образом, задача о вычислении неподвижной точки (2.2.5) сводится к решению седловой задачи специального вида, поскольку переменные этой функции одинаковой размерности, а седловая точка лежит на диагонали квадрата $D \times D$.

• *Квадратичное программирование* [3]. Пусть в (2.2.1) $\Phi = 0$, $\varphi = 0$, а B — симметричная положительно полуопределенная матрица (т.е. $\langle Bw, w\rangle \geq 0 \;\; \forall w \in \mathbb{R}^n$); тогда

$$v^* \in \mathrm{Argmin}\{(1/2)\langle Bw, w\rangle \mid Aw \leq a, \; w \geq 0\}. \tag{2.2.7}$$

Здесь v^* — оптимальное решение задачи квадратичного программирования. При некоторых условиях регулярности задача квадратичного программирования (2.2.7) может быть сведена к седловой задаче: найти пару векторов v^*, p^* таких, что

$$\mathcal{L}(v^*, p) \leq \mathcal{L}(v^*, p^*) \leq \mathcal{L}(w, p^*) \qquad \forall v \geq 0, \; p \geq 0, \tag{2.2.8}$$

где $\mathcal{L}(w, p) = (1/2)\langle Bw, w\rangle + \langle p, Aw - a\rangle$ — функция Лагранжа для задачи (2.2.7).

• *Линейное программирование* [4]. Пусть в (2.2.1) матрицы $\Phi = 0, \; B = 0$; тогда

$$v^* \in \mathrm{Argmin}\{\langle \varphi, w\rangle \mid Aw \leq a, \; w \geq 0\}, \tag{2.2.9}$$

где v^* — оптимальное решение задачи линейного программирования. Задача (2.2.9) также может быть сведена к вычислению седловой точки функции Лагранжа этой задачи: $\mathcal{L}(w, p) = \langle \varphi, w\rangle + \langle p, Aw - a\rangle, \; w \geq 0, \; p \geq 0$. При выполнении условий регулярности функция Лагранжа имеет седловую точку v^*, p^*, удовлетворяющую системе (2.2.8), где v^* — прямое решение задачи (2.2.9), а p^* — решение двойственной задачи.

2) Равновесные задачи со связанными ограничениями. Равновесные задачи со связанными ограничениями представляют собой наиболее естественное обобщение задачи (2.2.1). Эти задачи содержат связанные ограничения, зависящие от параметра [5, 6]:

$$v^* \in \mathrm{Argmin}\{\langle \Phi v^* + \varphi, w\rangle + (1/2)\langle Bw, w\rangle \mid \langle v^*, A_i w\rangle \leq \beta_i, \; w \geq 0\}, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{2.2.10}$$

Здесь предполагается, что $v^* \in V$, где множество V является проекцией допустимого множества $\{v, w \mid \langle v, A_i w\rangle \leq \beta_i, \; w \geq 0\}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, на координату v. Задачи со связанными ограничениями представляют собой наиболее адекватный математический инструментарий для описания разнообразных рынков со многими участниками и сложных сетей со многими частично противоречивыми факторами.

Задача (2.2.10) эквивалентна системе неравенств

$$\begin{gathered} \langle \Phi v^* + \varphi, v^*\rangle + (1/2)\langle Bv^*, v^*\rangle \leq \langle \Phi v^* + \varphi, w\rangle + (1/2)\langle Bw, w\rangle, \\ \langle v^*, A_i w\rangle \leq \beta_i, \;\; w \geq 0, \;\; i = 1, 2, \ldots, m. \end{gathered} \tag{2.2.11}$$

Все события в задаче (2.2.1) происходят на квадрате $D \times D$, но квадрат — это множество, симметричное относительно своей диагонали, т.е. “прямой” $v = w$. Это означает, что свойство симметрии допустимого множества должно сохраняться и для задач со связанными ограничениями. Последнее требование влечет за собой свойство симметрии функций-ограничений, а поскольку мы имеем дело с линейными ограничениями, это означает, что все матрицы A_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, — симметричные, т.е. $A_i = A_i^\top, \; i = 1, 2, \ldots, m$.

2.3. Расщепление равновесных задач

1) Симметричные равновесные задачи. В постановке равновесной задачи (2.2.1) матрица Φ предполагается произвольной, а B — симметричной. Однако представляется естественным рассмотреть более узкие классы равновесных билинейных задач, например, с симметричными и антисимметричными матрицами.

Пусть Φ — симметричная матрица, т.е. $\Phi = \Phi^\top$; тогда введем обозначения $\Phi(v,w) = \langle \Phi v, w\rangle$ и $\varphi(w) = \langle \varphi, w\rangle + (1/2)\langle Bw, w\rangle$ и представим (2.2.1) в форме

$$\Phi(v^*,v^*) + \varphi(v^*) \le \Phi(v^*,w) + \varphi(w) \qquad \forall w \in D. \tag{2.3.1}$$

Так как матрица Φ симметрична, то

$$\Phi(v,w) = \langle \Phi v, w\rangle = \langle \Phi w, v\rangle = \Phi(w,v).$$

Отсюда с учетом (2.3.1) имеем

$$\Phi(v^*,v^*) + \varphi(v^*) \le \Phi(w,v^*) + \varphi(w) \quad \forall w \in D. \tag{2.3.2}$$

Сопоставив (2.3.1) и (2.3.2), видим, что функции $\Phi(v,w)+\varphi(w)$ и $\Phi(w,v)+\varphi(w)$ в равновесном состоянии (v^*,v^*) достигают минимума по w в точке v^* при фиксированном значении $v = v^*$. Более того, сужение функции $\Phi(v,w) + 2\varphi(w)|_{v=w}$ на диагонали квадрата $D \times D$ при дополнительном условии положительной полуопределенности матрицы Φ (т.е. $\langle \Phi w, w\rangle \ge 0$ $\forall w \in \mathbb{R}^n$) также достигает минимума в точке v^*, v^*.

Действительно, пусть $\langle \Phi(w-v), w-v\rangle \ge 0$ $\forall (w-v) \in \mathbb{R}^n$; отсюда получим

$$\langle \Phi w, w\rangle - 2\langle \Phi w, v\rangle + \langle \Phi v, v\rangle \ge 0 \quad \forall w, v \in \mathbb{R}^n. \tag{2.3.3}$$

При $v = v^*$ из (2.3.3) имеем

$$2\langle \Phi v^*, w\rangle \le \langle \Phi w, w\rangle + \langle \Phi v^*, v^*\rangle \quad \forall w \in \mathbb{R}^n.$$

Сопоставив это неравенство с (2.3.1), получим

$$2\Phi(v^*,v^*) + 2(\varphi(v^*) - \varphi(w)) \le \Phi(w,w) + \Phi(v^*,v^*) \quad \forall w \in D.$$

Отсюда

$$\Phi(v^*,v^*) + 2\varphi(v^*) \le \Phi(w,w) + 2\varphi(w) \quad \forall w \in D. \tag{2.3.4}$$

Следовательно, можно сформулировать

Утверждение 2.3.1. *Если матрица Φ — симметричная и положительно полуопределенная, то равновесная задача (2.3.1) сводится к задаче оптимизации вида*

$$v^* \in \mathrm{Argmin}\{\Phi(w,w) + 2\varphi(w) \mid w \in D\}. \tag{2.3.5}$$

Это значит, что если v^* — равновесное решение (2.3.1), то v^* — минимум (2.3.5). Верно и обратное утверждение.

2) Антисимметричные равновесные задачи. Мы уже показали, что равновесная задача (2.2.5) с антисимметричной матрицей Φ сводится к седловой задаче (2.2.6). Если целевая функция задачи (2.2.5) помимо антисимметричного члена включает в себя функцию одной переменной

$$v^* \in \mathrm{Argmin}\{\langle \Phi v^*, w\rangle + \varphi(w) \mid Aw \le a,\ w \ge 0\}, \tag{2.3.6}$$

то такая задача, вообще говоря, не сводится к седловой. Для того чтобы ситуацию в целом привести к седловой задаче, введем функцию сдвига относительно диагонали квадрата $D\times D$, т.е.

$$\Psi(v,w) = \Phi(v,w) + \varphi(w) - \Phi(v,v) - \varphi(v) = \Phi(v,w) + \varphi(w) - \varphi(v) \quad \forall v, w \in D,$$

где $\Phi(v,v) = 0 \ \ \forall v \in D$. Затем в терминах этой функции переформулируем исходную равновесную задачу в форме (2.3.1):

$$0 = \Psi(v^*, v^*) \leq \Psi(v^*, w) \quad \forall w \in D. \tag{2.3.7}$$

Эквивалентность (2.3.6) и (2.3.7) очевидна, поскольку их целевые функции отличаются только на константу $\varphi(v^*)$.

Покажем, что v^*, v^* является седловой точкой для $\Psi(v,w)$ на $D \times D$. Действительно, из (2.3.7) имеем

$$0 = \Phi(v^*, v^*) + \varphi(v^*) - \varphi(v^*) \leq \Phi(v^*, w) + \varphi(w) - \varphi(v^*) \quad \forall w \in D.$$

Умножим полученное неравенство на -1; тогда

$$0 \geq -\langle \Phi v^*, w\rangle - \varphi(w) + \varphi(v^*) = \langle \Phi^\top v^*, w\rangle - \varphi(w) + \varphi(v^*) = \langle \Phi w, v^*\rangle - \varphi(w) + \varphi(v^*) \quad \forall w \in D.$$

Перепишем полученное неравенство в форме

$$\Psi(v, v^*) \leq 0 \quad \forall v \in D.$$

Сопоставляя это неравенство с (2.3.7), получим

$$\Psi(v, v^*) \leq \Psi(v^*, v^*) \leq \Psi(v^*, w) \quad \forall v, w \in D \times D. \tag{2.3.8}$$

Из (2.3.8) следует

Утверждение 2.3.2. *Если v^* — равновесное решение задачи (2.3.6) и матрица Φ антисимметрична, то точка v^*, v^* является седловой для функции сдвига $\Psi(v,w) = \Phi(v,w) + \varphi(w) - \varphi(v)$.*

3) Расщепление задач. Мы рассмотрели два важных класса билинейных равновесных задач: симметричные и антисимметричные. В линейной алгебре хорошо известно, что любую квадратную матрицу всегда можно расщепить на сумму двух матриц $\Phi = S + K$, где $S = (1/2)(\Phi + \Phi^\top)$, а $K = (1/2)(\Phi - \Phi^\top)$, причем S — симметричная, а K — антисимметричная матрица. Соответственно, билинейная функция $\langle \Phi v, w\rangle$ расщепляется на сумму двух функций

$$\langle \Phi v, w\rangle = \langle Sv, w\rangle + \langle Kv, w\rangle.$$

Так как функция $\langle Sv, w\rangle$ — симметричная, то градиент Sv этой функции по w совпадает с градиентом квадратичной функции $(1/2)\langle Sw, w\rangle$ при $w = v$. Это дает нам возможность ввести еще одну функцию

$$P(v,w) = (1/2)\langle Sw, w\rangle + \langle Kv, w\rangle$$

и рассмотреть две равновесные задачи с различными целевыми функциями

$$v^* \in \operatorname{Argmin}\{\langle \Phi v^* + \varphi, w\rangle + (1/2)\langle Bw, w\rangle \mid Aw \leq a, \ w \geq 0\}, \tag{2.3.9}$$

$$v^* \in \operatorname{Argmin}\{\langle K v^* + \varphi, w\rangle + (1/2)\langle (S+B)w, w\rangle \mid Aw \leq a, \ w \geq 0\}. \tag{2.3.10}$$

Нетрудно видеть, что градиент-сужения обеих функций на диагонали квадрата $D \times D$ совпадают, т.е.

$$\nabla_2 \Phi(v,w)|_{v=w} = \nabla_2 P(v,w)|_{v=w};$$

следовательно, необходимые условия минимума для задач (2.3.9) и (2.3.10) и множество их точек равновесия также совпадают. В этой ситуации функцию $P(v,w)$ можно считать седловым потенциалом [7] для оператора $\nabla_2\Phi(v,w)|_{v=w}$ и использовать ее в качестве целевой функции для решения равновесной задачи (2.3.9).

Таким образом, имеется две задачи (2.3.9) и (2.3.10) с разными целевыми функциями, но с совпадающими необходимыми условиями и, следовательно, с совпадающими множествами решений. Следовательно, можно утверждать, что исходную равновесную задачу (2.3.9) с произвольной матрицей Φ всегда можно привести к виду (2.3.10) с антисимметричной (и тем самым положительно полуопределенной) матрицей K и симметричной матрицей $S+B$.

Если в (2.3.10) функция $\langle\varphi,w\rangle+(1/2)\langle(S+B)w,w\rangle\equiv 0\ \ \forall w\in D$, то мы имеем седловую задачу; если же, наоборот, $\langle Kv,w\rangle\equiv 0\ \ \forall v,w\in D$, — получаем задачу оптимизации. Следовательно, можно сформулировать

Утверждение 2.3.3. *Равновесную билинейную задачу всегда можно расщепить на сумму двух задач, одна из которых – седловая задача, а другая – задача оптимизации.*

В общей ситуации матрица Φ в (2.3.9) антисимметричная (или, в более общем контексте, положительно полуопределенная), а матрица B или $S+B$ всегда симметричная. Однако для обоснования сходимости различных методов к равновесным решениям дополнительно будем предполагать положительную полуопределенность матрицы B или, в случае расщепления, матрицы $S+B$. В дальнейшем задачи с такими свойствами будем называть положительно полуопределенными равновесными задачами.

2.4. Положительно полуопределенные равновесные задачи

1) Прямая и дуальная задачи. Подчеркнем еще раз, что равновесную задачу

$$\langle\Phi v^*,v^*\rangle+\varphi(v^*)\le\langle\Phi v^*,w\rangle+\varphi(w)\qquad\forall w\in D,\tag{2.4.1}$$

где Φ — положительно полуопределенная (в частности, антисимметричная) матрица, а $\varphi(w)$ — квадратичная выпуклая функция, будем называть положительно полуопределенной.

Введем понятие дуальной равновесной задачи. Пусть $\langle\Phi(w-v),w-v\rangle\ge 0\ \ \forall(w-v)\in\mathbb{R}^n$; тогда

$$\langle\Phi w,w\rangle-\langle\Phi w,v\rangle-\langle\Phi v,w\rangle+\langle\Phi v,v\rangle\ge 0\ \ \forall w,v\in\mathbb{R}^n.\tag{2.4.2}$$

При $v=v^*$ из (2.4.2) имеем

$$\langle\Phi w,w\rangle+\varphi(w)-\langle\Phi w,v^*\rangle-\varphi(v^*)\ge\langle\Phi v^*,w\rangle+\varphi(w)-\langle\Phi v^*,v^*\rangle-\varphi(v^*)\ \ \forall w\in D.\tag{2.4.3}$$

Сопоставляя (2.4.1) и (2.4.3), получим

$$\langle\Phi v,v\rangle+\varphi(v)-\langle\Phi v,v^*\rangle-\varphi(v^*)\ge 0\quad\forall v\in D.\tag{2.4.4}$$

Наряду с равновесной задачей (2.4.1), которую будем называть прямой, введем еще одну равновесную задачу, которую назовем дуальной [8, 9]: в этой задаче требуется определить вектор v^* такой, что условие (2.4.4) выполнено, т.е.

$$v^*\in\mathrm{Argmax}\{\Phi(v,v^*)+\varphi(v^*)-\Phi(v,v)-\varphi(v)\mid Av\le a,\ v\ge 0\}.\tag{2.4.5}$$

Из (2.4.3) и (2.4.4) следует

Утверждение 2.4.1. *Множество решений прямой задачи (2.4.1) вложено в множество решений дуальной задачи (2.4.4).*

В общем случае дуальная задача может быть сформулирована независимо от прямой и возникает вопрос о том, как связаны решения этих двух задач.

2) Седловая постановка. Прямая задача (2.4.1) в терминах функции сдвига $\Psi(v, w) = \langle \Phi v, w\rangle + \varphi(w) - \langle \Phi v, v\rangle - \varphi(v)$ имеет вид

$$0 \le \Psi(v^*, w) \qquad \forall w \in D. \tag{2.4.6}$$

Дуальная задача (2.4.4) с помощью этой же функции может быть представлена как

$$\Psi(v, v^*) \le 0 \qquad \forall v \in D. \tag{2.4.7}$$

Очевидно, что обе задачи сводятся к решению системы [10]

$$\Psi(v, v^*) \le \Psi(v^*, v^*) \le \Psi(v^*, w) \qquad \forall v, w \in D \times D, \tag{2.4.8}$$

из которой следует важное утверждение.

Утверждение 2.4.2. *Если v^* — равновесное решение задачи (2.4.1), матрица Φ — положительно полуопределенная, то точка v^*, v^* является седловой для функции сдвига $\Psi(v, w) = \langle \Phi v, w\rangle + \varphi(w) - \langle \Phi v, v\rangle - \varphi(v)$.*

Отметим при этом, что функция $\Psi(v, w)$ выпукла по w и не является вогнутой по v.

Установим факт, обратный к утверждению 2.4.2, а именно: одна из компонент седловой точки функции сдвига всегда является неподвижной точкой. Действительно, пусть v^*, w^* — седловая точка функции сдвига $\Psi(v, w)$

$$\Psi(v, w^*) \le \Psi(v^*, w^*) \le \Psi(v^*, w) \quad \forall v, w \in D \times D.$$

Положим в этом неравенстве $w = v^*$, $v = w^*$; тогда получим $\Psi(v^*, w^*) = 0$. Правое неравенство приведенной выше системы перепишем в форме

$$0 \le \Phi(v^*, w) + \varphi(w) - \Phi(v^*, v^*) - \varphi(v^*) \quad \forall w \in D.$$

Отсюда имеем

$$\Phi(v^*, v^*) + \varphi(v^*) \le \Phi(v^*, w) + \varphi(w) \quad \forall w \in D.$$

Таким образом, можно сформулировать следующее

Утверждение 2.4.3. *Если v^*, w^* — седловая точка функции сдвига $\Psi(v, w)$, то v^* — неподвижная точка задачи (2.4.1).*

Утверждения 2.4.2 и 2.4.3 можно рассматривать как равновесный аналог теоремы Куна–Таккера из теории оптимизации.

Установим некоторые факты, касающиеся связей прямой и дуальной задач. Покажем, что множество решений положительно полуопределенной равновесной задачи представляет собой выпуклое замкнутое множество. Предполагая выпуклость функции $\Psi(v, w)$ по $w \in D$ для любого $v \in D$, покажем, что множество решений дуальной задачи всегда выпукло и замкнуто. Действительно, пусть v_1^* и v_2^* — решения дуальной задачи (2.4.7), т.е.

$$\Psi(v, v_i^*) \le 0 \qquad \forall v \in D, \quad i = 1, 2.$$

Убедимся, что любая точка отрезка $v^*(\alpha) = \alpha v_1^* + (1-\alpha) v_2^*$ также является решением дуальной задачи. Действительно, с учетом выпуклости $\Psi(v, w)$ по w имеем

$$\Psi(v, v^*(\alpha)) = \Psi(v, \alpha v_1^* + (1-\alpha) v_2^*) \le \alpha\Psi(v, v_1^*) + (1-\alpha)\Psi(v, v_2^*) \le 0,$$

т.е.
$$\Psi(v, v^*(\alpha)) \le 0 \qquad \forall v \in D.$$
Таким образом, установлено

Утверждение 2.4.4. *Множество решений дуальной задачи (2.4.7) выпукло, замкнуто.*

Покажем, что любое решение дуальной задачи является решением прямой [8, 9]. Пусть v^* — решение дуальной задачи, т.е. $\Psi(v, v^*) - \Psi(v, v) \le 0\ \ \forall v \in D$. Тогда если $v(\alpha) = \alpha v^* + (1-\alpha)v$, то
$$\Psi(v(\alpha), v^*) \le \Psi(v(\alpha), v(\alpha)).$$
Отсюда
$$\Psi(v(\alpha), v^*) \le \Psi(v(\alpha), \alpha v^* + (1-\alpha)v) \le \alpha\Psi(v(\alpha), v^*) + (1-\alpha)\Psi(v(\alpha), v),$$
или
$$(1-\alpha)\Psi(v(\alpha), v^*) \le (1-\alpha)\Psi(v(\alpha), v).$$
При $\alpha \to 1$, учитывая непрерывность функции $\Psi(v, w)$, получим
$$\Psi(v^*, v^*) \le \Psi(v^*, v) \qquad \forall v \in D,$$
т.е. v^* — решение прямой задачи (2.4.1). Таким образом, установлено

Утверждение 2.4.5. *Множество решений дуальной задачи (2.4.7) вложено в множество решений прямой задачи (2.4.6).*

Из утверждений 2.4.1 и 2.4.4 следует, что множества решений прямой и дуальной задач совпадают. Из этого факта, в частности, вытекает

Утверждение 2.4.6. *Множество неподвижных точек прямой задачи (2.4.1) является выпуклым и замкнутым.*

3) Сепарабельная седловая постановка. Функция $\Psi(v, w)$ как функция двух переменных всегда порождает две другие функции:

функцию минимумов
$$m(v) = \inf\{\Psi(v, w) \mid w \in D\}$$
и функцию максимумов
$$M(w) = \sup\{\Psi(v, w) \mid v \in D\}.$$
Эту систему функций, в свою очередь, можно скаляризовать и рассмотреть свертку $C(v, w) = m(v) + M(w)$, определенную на квадрате $v, w \in D \times D$. Сразу же возникает важный вопрос: будет ли седловая точка (2.4.8) седловой и для функции $C(v, w)$ на $D \times D$? Важность этого вопроса определяется тем обстоятельством, что функция $\Psi(v, w)$ несепарабельная относительно своих переменных, поэтому вычисление ее седловой точки — трудная задача, в то время как функция $C(v, w)$ сепарабельная, и вычисление ее седловой точки сводится к решению пары задач оптимизации, а в равновесном случае — к решению одной задачи, поскольку седло в этом случае имеет равные компоненты.

Убедимся, что если v^* — неподвижная точка (2.4.1), то пара векторов v^*, v^* является седловой точкой для $C(v, w)$ на $D \times D$. Легко видеть, что $m(v) = \inf\{\Psi(v, w) | w \in D\} \le 0\ \ \forall v \in D$, поскольку при $v = w$ функция $\Psi(v, w) = \langle \Phi v + \varphi, w\rangle + (1/2)\langle Bw, w\rangle - \langle \Phi v + \varphi, v\rangle - (1/2)\langle Bv, v\rangle$ равна нулю и, следовательно, ее минимальное значение не больше нуля.

Но при $v = v^*$ легко видеть, что функция $m(v^*) = 0$. Поэтому максимум этой функции по всем $v \in D$ также равен нулю, т.е.

$$\max_{v\in D} m(v) = \max_{v\in D}\min_{v\in D} \Psi(v,w) = 0. \tag{2.4.9}$$

По тем же причинам аналогичное утверждение верно относительно функции $M(w)$:

$$\min_{w\in D} M(w) = \min_{w\in D}\max_{v\in D} \Psi(v,w) = 0.$$

Сопоставляя полученные соотношения, имеем

$$\max_{v\in D}\min_{v\in D} \Psi(v,w) = \min_{v\in D}\max_{v\in D} \Psi(v,w). \tag{2.4.10}$$

Эти соотношения хорошо известны для выпукло-вогнутых ситуаций [3, 4]. Свойства *maxmin* и *minmax* с разных точек зрения исследованы в [11, 12]. Из полученных равенств также следует

$$m(v) \le 0 \le M(w) \qquad \forall v,w \in D\times D. \tag{2.4.11}$$

Система неравенств (2.4.11) в терминах функции $C(v,w)$ имеет вид

$$C(v,v^*) \le C(v^*,v^*) \le C(v^*,w) \qquad \forall v,w \in D\times D.$$

Таким образом, установлено

Утверждение 2.4.7. *Седловая точка функции $\Psi(v,w)$ на $D\times D$ является седловой точкой $C(v,w)$ на $D\times D$.*

Обратное утверждение. Пусть

$$\max_{v\in D} m(v) = \max_{v\in D}\min_{v\in D} \Psi(v,w) = 0.$$

При этом если D — компакт, то существует точка $v^* \in D$ такая, что $m(v^*) = \max_{v\in D} m(v) = 0$. Но значение $m(v^*)$ определяется как

$$m(v^*) = \inf\{\Psi(v^*,w) \mid w \in D\},$$

т.е. $0 \le \langle \Phi v^* + \varphi, w\rangle + (1/2)\langle Bw,w\rangle - \langle \Phi v^* + \varphi, v^*\rangle - (1/2)\langle Bv^*,v^*\rangle$. Отсюда следует $\langle \Phi v^* + \varphi, v^*\rangle + (1/2)\langle Bv^*,v^*\rangle \le \langle \Phi v^* + \varphi, w\rangle + (1/2)\langle Bw,w\rangle$ $\forall w \in D$, т.е. v^* — неподвижная точка. Аналогичное утверждение справедливо и относительно функции $M(w)$. Таким образом, доказано

Утверждение 2.4.8. *Если выполняется условие (2.4.10), то точка $v^* \in D$ (которая всегда существует, если D — выпуклый компакт) является решением равновесной задачи.*

Далее в этой работе описываются два подхода к решению равновесных задач, один из которых основывается на седловых свойствах несепарабельной функции $\Psi(v,w)$, а другой — на седловых свойствах сепарабельной функции $C(v,w)$, т.е. на решении задач оптимизации.

2.5. Условие остроты равновесия

Условие положительной полуопределенности матрицы Φ накладывает определенное ограничение на поведение целевой функции в окрестности решения задачи (2.4.1). Это поведение можно еще более ограничить, если ввести более жесткие условия, чем (2.4.7) [13], а именно:

$$\Psi(v,v^*) \le -\gamma|v-v^*|^{1+\nu} \qquad \forall v \in D, \tag{2.5.1}$$

где параметр $\nu \in [0, \infty)$, а $\gamma > 0$ — константа. При $\nu = 0$ имеем случай острого равновесия, а при $\nu = 1$ — квадратичного равновесия.

Применительно к билинейному равновесию условие остроты при $B = 0$ имеет вид

$$\langle \Phi v + \varphi, v - v^* \rangle \geq \gamma |v - v^*| \qquad \forall v \in D. \tag{2.5.2}$$

Условие квадратичной остроты для билинейной задачи принимает форму

$$\langle \Phi v + \varphi, v - v^* \rangle + (1/2)(\langle Bv, v\rangle - \langle Bv^*, v^*\rangle) \geq \gamma |v - v^*|^2 \tag{2.5.3}$$

для всех $v \in D$. Условия остроты равновесия, представленные здесь, можно рассматривать как обобщение условий остроты минимума для задач оптимизации, которые впервые были представлены в [3].

2.6. Обобщения

Из приведенных выше рассуждений следует, что положительная полуопределенность порождает класс билинейных равновесных задач, которые можно рассматривать как аналог задач квадратичного программирования среди всех задач нелинейной квадратичной оптимизации. Однако при переходе от билинейных равновесных задач к нелинейным возникает желание описать класс равновесных задач, который можно рассматривать как аналог задач выпуклого программирования в классе нелинейных задач. С этой целью распространим понятие положительной полуопределенности на нелинейные функции $\Phi(v, w)$ [13].

Определение 2.6.1. *Функцию $\Phi(v, w)$ из $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^1$ назовем положительно полуопределенной, или кососимметричной, на $D \times D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, где D — выпуклое замкнутое множество, если эта функция удовлетворяет неравенству*

$$\Phi(w, w) - \Phi(w, v) - \Phi(v, w) + \Phi(v, v) \geq 0 \qquad \forall w \in D,\ v \in D. \tag{2.6.1}$$

Нетрудно проверить, что нормализованная функция $\Phi(v, w) = L(z, p) - L(x, y)$, где $v = (x, p)$, $w = (z, y)$, для седловой задачи

$$L(x^*, y) \leq L(x^*, p^*) \leq L(z, p^*) \quad \forall z \in Q \subseteq \mathbb{R}^n, \quad \forall y \in P \subseteq \mathbb{R}^m$$

удовлетворяет условию кососимметричности (2.6.1).

Для более детальной характеристики класса кососимметричных функций естественно ввести понятие бидифференциала [7, 14].

Определение 2.6.2. *Функцию $\Phi(v, w)$ назовем бидифференцируемой в точке $v, v \in D \times D$, если существует квадратная матрица $D(v, v)$ такая, что*

$$\{\Phi(v + h, v + k) - \Phi(v + h, v)\} - \{\Phi(v, v + k) - \Phi(v, v)\} = \langle D(v, v)h, k\rangle + \omega(v, h, k), \tag{2.6.2}$$

где $\omega(v, h, k)/|h||k| \to 0$ при $|h|, |k| \to 0$ для всех $h \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{R}^n$.

Билинейную функцию $\langle D(v, v)h, k\rangle$ назовем билинейным дифференциалом функции $\Phi(v, v)$ в точке $v, v \in D \times D$.

Функцию $\Phi(v, w)$ назовем бидифференцируемой на диагонали квадрата $D \times D$, если она дифференцируема во всех точках этого множества.

В [7] показано, что если функция $\Phi(v, w)$ дважды непрерывно дифференцируема, то ее бидифференциал совпадает с матрицей смешанных производных. Нетрудно проверить, что если функция $\Phi(v,w) = \varphi(v) + \varphi(w)$ сепарабельна относительно своих переменных, то бидифференциал такой функции равен нулю, т.е. $D(v,v) \equiv 0 \ \ \forall v \in D$.

Вычислим бидифференциал нормализованной (гладкой) функции седловой задачи. Действительно, так как $\Phi(v,w) = L(z,p) - L(x,y)$, где $w = (z,y)$, $v = (x,p)$, то

$$\frac{\partial \Phi(v,w)}{\partial w} = \left(\frac{\partial L(z,p)}{\partial z}, -\frac{\partial L(x,y)}{\partial y} \right)^{\top},$$

где $(.,.)^{\top}$ — вектор-столбец. Далее,

$$\frac{\partial^2 \Phi(v,w)}{\partial w \partial v} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\partial^2 L(z,p)}{\partial z \partial p} \\ -\dfrac{\partial^2 L(x,y)}{\partial y \partial x} & 0 \end{pmatrix}.$$

Если $v = w$, то в силу $\partial^2 L(x,p)/\partial x \partial p = \partial^2 L(x,p)/\partial p \partial x$ имеем

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi(v,w)}{\partial w \partial v} \right|_{v=w} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\partial^2 L(x,p)}{\partial x \partial p} \\ -\dfrac{\partial^2 L(x,p)}{\partial p \partial x} & 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial^2 L(x,p)}{\partial x \partial p} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\langle \nabla^2_{wv} \Phi(v,v)h, h \rangle = \langle D(v,v)h, h \rangle = 0 \qquad \forall v \in D, \ \ h \in \mathbb{R}^n. \tag{2.6.3}$$

Между функциями $\Phi(v,w)$ и их бидифференциалами $D(v,v)$ существует тесная связь: существование таких свойств матриц $D(v,v)$, как положительная полуопределенность, симметричность, антисимметричность, влечет за собой наличие соответствующих свойств для функций $\Phi(v,w)$ и наоборот [7, 14]. Кроме того, бидифференциал представляет собой инструментарий для билинейной аппроксимации нелинейных равновесных задач.

2.7. Игры двух лиц с ненулевой суммой

1) Игры на квадрате. Равновесная задача (2.2.2) включает в себя, в частности, важный случай игры двух лиц с ненулевой суммой. Рассмотрим этот случай более детально. Для удобства рассмотрения выпишем постановку задачи (2.2.2) в форме

$$\langle \Phi v^* + \varphi, v^* \rangle + (1/2)\langle B v^*, v^* \rangle \le \langle \Phi v^* + \varphi, w \rangle + (1/2)\langle Bw, w \rangle, \ \ Aw \le a, \ \ w \ge 0. \tag{2.7.1}$$

Пусть матрицы и векторы, определяющие эту задачу, имеют следующее представление:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & C_1 \\ C_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

и

$$v^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \varphi = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Здесь размерности матриц и векторов, вообще говоря, различны, но предполагается, что они согласованы между собой так, что все матрично-векторные операции корректны. Пусть C_1 — $(m \times n)$-матрица, а C_2 — $(n \times m)$-матрица, x_1, c_1 и x_2, c_2 — векторы размерности m и n соответственно, B_1 — $(m \times m)$-матрица, а B_2 — $(n \times n)$-матрица. Размерности матриц A_1 и A_2 равны $m_1 \times n_1$ и $m_2 \times n_2$ соответственно.

Используя введенные обозначения, задачу (2.7.1) представим в векторно-матричной форме

$$\begin{aligned}&(x_1^*,x_2^*)\left\{\begin{pmatrix}0 & C_1\\ C_2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1^*\\ x_2^*\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}\right\}+\frac{1}{2}(x_1^*,x_2^*)\begin{pmatrix}B_1 & 0\\ 0 & B_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1^*\\ x_2^*\end{pmatrix}\le\\ \le\ &(x_1,x_2)\left\{\begin{pmatrix}0 & C_1\\ C_2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1^*\\ x_2^*\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}\right\}+\frac{1}{2}(x_1,x_2)\begin{pmatrix}B_1 & 0\\ 0 & B_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

при условии, что переменные подчинены ограничениям вида

$$\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\le\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\ge\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}. \tag{2.7.2}$$

Выполнив векторно-матричные операции в (2.7.2), можно получить

$$\begin{aligned}x_1^*,x_2^*\ &\in\ \mathrm{Argmin}\{\langle x_1,C_1x_2^*+c_1\rangle+\langle C_2x_1^*+c_2,x_2\rangle+\\ &+\ \frac{1}{2}\langle B_1x_1,x_1\rangle+\frac{1}{2}\langle B_2x_2,x_2\rangle\mid A_1x_1\le a_1,\ \ A_2x_2\le a_2,\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0\}.\end{aligned} \tag{2.7.3}$$

Поскольку целевая функция этой задачи имеет сепарабельную структуру, а ограничения носят блочный характер, эта оптимизационная задача распадается на две независимые подзадачи, которые в совокупности представляют собой игру двух лиц в общем случае с ненулевой суммой и с равновесием по Нэшу [16]

$$\begin{aligned}x_1^*\ &\in\ \mathrm{Argmin}\{\langle x_1,C_1x_2^*+c_1\rangle+(1/2)\langle B_1x_1,x_1\rangle\mid A_1x_1\le a_1,\ x_1\ge 0\},\\ x_2^*\ &\in\ \mathrm{Argmin}\{\langle C_2x_1^*+c_2,x_2\rangle+(1/2)\langle B_2x_2,x_2\rangle\mid A_2x_2\le a_2,\ x_2\ge 0\}.\end{aligned} \tag{2.7.4}$$

Введем обозначения для допустимых множеств

$$X_1=\{x_1\in\mathbb{R}^m\mid A_1x_1\le a_1,\ x_1\ge 0\}\ \text{ и }\ X_2=\{x_2\in\mathbb{R}^n\mid A_2x_2\le a_2,\ x_2\ge 0\};$$

тогда их прямое произведение $D = X_1\times X_2$ представляет собой параллелепипед, на котором определена игра. В этой игре множество X_i, $i = 1,2$, интерпретируется как множество стратегий $i-$го игрока, где $x_i\in X_i$ — отдельная стратегия игрока, $f_1(x_1,x_2) = \langle x_1,C_1x_2+c_1\rangle+(1/2)\langle B_1x_1,x_1\rangle$ и $f_2(x_1,x_2)=\langle C_2x_1+c_2,x_2\rangle+(1/2)\langle B_2x_2,x_2\rangle$ рассматриваются как платежные функции $i-$го игрока. Содержательный смысл неподвижной точки $x^*=(x_1^*,x_2^*)$ игры двух лиц состоит в том, что ни один из игроков не заинтересован нарушать состояние равновесия, поскольку никто из них не может в одностороннем порядке уменьшить значение своей платежной функции. В частности, интерпретация для любого решения игры (2.7.4) означает состояние компромисса с суммарным выигрышем $f_1(x_1^*,x_2^*)+f_2(x_1^*,x_2^*)$. Отметим несколько важных частных случаев.

• *Седловая задача* [17, 18]. Пусть сумма целевых функций игры (2.7.4) равна нулю, т.е. $\langle x_1,C_1x_2+c_1\rangle+(1/2)\langle B_1x_1,x_1\rangle+\langle C_2x_1+c_2,x_2\rangle+(1/2)\langle B_2x_2,x_2\rangle=0\ \ \forall x_1\in X_1,\ x_2\in X_2$. Из этого условия немедленно следует, что $C=C_1=-C_2^\top,\ c_1=c_2=0,\ B_1=B_2=0$; тогда

$$\begin{aligned}x_1^*\ &\in\ \mathrm{Argmin}\{\langle x_1,Cx_2^*\rangle\mid A_1x_1\le a_1,\ \ x_1\ge 0\},\\ x_2^*\ &\in\ \mathrm{Argmin}\{-\langle C^\top x_1^*,x_2\rangle\mid A_2x_2\le a_2,\quad x_2\ge 0\}.\end{aligned} \tag{2.7.5}$$

Очевидно, что задачу можно переписать в форме системы неравенств

$$\langle x_1^*,Cx_2\rangle\le\langle x_1^*,Cx_2^*\rangle\le\langle x_1,Cx_2^*\rangle\ \ \forall x_1\in X_1,\ x_2\in X_2. \tag{2.7.6}$$

Отсюда следует, что пара векторов x_1^*, x_2^* — седловая точка функции $\langle x_1, Cx_2\rangle$ на множестве $X_1 \times X_2$. Различные обобщения концепции седлового программирования представлены в [18].

• *Двойственные задачи квадратичного программирования.* Пусть $C_1 = C_2 = 0$, $c_1 = = c_2 = 0$; тогда из (2.7.4) получим пару задач квадратичного программирования [19]. Эта пара представляет особый интерес в случае, когда она совпадет с задачей проектирования точки a_0 на многогранник $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le a\}$ и двойственной к ней

$$\begin{aligned} x^* &\in \operatorname{Argmin}\{(1/2)|x-a|^2 \mid \ Ax \le a\}, \\ p^* &\in \operatorname{Argmax}\{-(1/2)|A^\top p|^2 + \langle p, Aa - b\rangle \mid p \ge 0\}. \end{aligned} \tag{2.7.7}$$

Двойственную задачу здесь получить легко. Для этого достаточно выписать функцию Лагранжа для первой задачи, затем продифференцировать ее по x, приравнять нулю полученный градиент, а затем из полученного уравнения и функции Лагранжа, исключив переменную x, получить вторую задачу. Здесь пара точек x^*, p^* представляет собой седло функции Лагранжа задачи проектирования.

Известно, что метод регуляризации Тихонова [20] для прямой задачи линейного программирования и метод квадратичного штрафа для двойственной задачи находятся в состоянии двойственности в смысле указанной выше пары задач [19, 21, 22]. В таком же соотношении находятся модифицированная функция Лагранжа и двойственная модифицированная функция Лагранжа [18] для задач, например, линейного программирования. Методы решения задач квадратичного программирования обсуждаются в [3], а полиномиальные алгоритмы для решения этих задач рассматриваются в [23].

• *Двойственные задачи линейного программирования* [24]. Пусть $C_1 = C_2 = 0$, $B_1 = B_2 = = 0$; тогда из (2.7.4) получаем пару задач линейного программирования. Если дополнительно $c_1 = c$, $a_1 = a$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $A_1 = A$, $A_2 = A^\top$, то имеем систему двойственных задач линейного программирования

$$x^* \in \operatorname{Argmin}\{\langle c, x\rangle \mid Ax \le a,\ x \ge 0\}, \qquad p^* \in \operatorname{Argmax}\{\langle a, p\rangle \mid A^\top y \ge c,\ p \ge 0\}. \tag{2.7.8}$$

Прямое и двойственное решения этой задачи при некоторых условиях регулярности являются седловой точкой функции Лагранжа $\mathcal{L}(v,p) = \langle \varphi, w\rangle + \langle p, Aw - a\rangle$, $w \ge 0$, $p \ge 0$. Различные методы решения задач линейного программирования можно найти в [4, 17].

2) Игры со связанными ограничениями. Игру двух лиц со связанными ограничениями мы можем получить как следствие из (2.2.11), если еще раз повторим все рассуждения типа (2.7.1) – (2.7.4) относительно системы неравенств

$$\langle \Phi v^* + \varphi, v^*\rangle + (1/2)\langle Bv^*, v^*\rangle \le \langle \Phi v^* + \varphi, w\rangle + (1/2)\langle Bw, w\rangle, \ \ \langle v^*, Aw\rangle \le \beta, \ w \ge 0. \tag{2.7.9}$$

Для простоты вычислений мы ограничились в данном случае только одним скалярным связанным ограничением.

Используя введенную систему обозначений для матриц Φ, B и векторов v, w, a, φ, представим (2.7.9) в векторно-матричном виде

$$\begin{aligned} &(x_1^*, x_2^*)\left\{\begin{pmatrix} 0 & C_1 \\ C_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathrm{c}_1 \\ \mathrm{c}_2 \end{pmatrix}\right\} + \frac{1}{2}(x_1^*, x_2^*)\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} \le \\ \le\ \ &(x_1, x_2)\left\{\begin{pmatrix} 0 & C_1 \\ C_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}\right\} + \frac{1}{2}(x_1, x_2)\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

при условии, что переменные подчинены ограничениям вида

$$(x_1, x_2)\begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ A_1^\top & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} \le \beta, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \ge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.7.10}$$

где компоненты симметричной матрицы A будем обозначать как A_1 и $A_1^\top$.

Выполнив векторно-матричные операции, придем к оптимизационной задаче

$$\begin{array}{rcl} x_1^*, x_2^* & \in & \mathrm{Argmin}\{\langle x_1, C_1x_2^* + c_1\rangle + \langle C_2x_1^* + c_2, x_2\rangle + \dfrac{1}{2}\langle B_1x_1, x_1\rangle + \\ & + & \dfrac{1}{2}\langle B_2x_2, x_2\rangle \mid \langle x_1, A_1x_2^*\rangle + \langle x_2, A_1^\top x_1^*\rangle \le \beta, \quad x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0\}. \end{array} \tag{2.7.11}$$

Целевая функция и функция-ограничение в этой задаче имеют сепарабельную структуру. Это обстоятельство используем для того, чтобы расщепить задачу оптимизации и свести ее к игре двух лиц. С этой целью введем функцию Лагранжа, которая, конечно, зависит от x_1^*, x_2^*, но для простоты вычислений эти значения опустим:

$$\begin{array}{rcl} L(x_1, x_2, \lambda) & = & \langle x_1, C_1x_2^* + c_1\rangle + \langle C_2x_1^* + c_2, x_2\rangle + (1/2)\langle B_1x_1, x_1\rangle + (1/2)\langle B_2x_2, x_2\rangle + \\ & + & \lambda(\langle x_1, A_1x_2^*\rangle + \langle x_2, A_1^\top x_1^*\rangle - \beta), \qquad x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0, \;\; \lambda \ge 0. \end{array}$$

Предполагая, что задача оптимизации носит регулярный характер, можно утверждать, что точка x_1^*, x_2^*, λ^* является седловой для этой функции, т.е.

$$L(x_1^*, x_2^*, \lambda) \le L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*) \le L(x_1, x_2, \lambda^*) \tag{2.7.12}$$

для всех $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $\lambda \ge 0$. Правое неравенство этой системы представляет собой задачу минимизации сепарабельной квадратичной функции на положительном ортанте. В силу сепарабельности целевой функции и блочности ограничений задача расщепляется на две независимые подзадачи, каждая из которых определена на своем пространстве, а именно:

$$\begin{gathered} \langle x_1^*, C_1x_2^* + c_1\rangle + (1/2)\langle B_1x_1^*, x_1^*\rangle + \lambda^*\langle x_1^*, A_1x_2^*\rangle \le \\ \le \langle x_1, C_1x_2^* + c_1\rangle + (1/2)\langle B_1x_1, x_1\rangle + \lambda^*\langle x_1, A_1x_2^*\rangle, \;\; x_1 \ge 0, \\ \langle C_2x_1^* + c_2, x_2^*\rangle + (1/2)\langle B_2x_2^*, x_2^*\rangle + \lambda^*\langle x_2^*, A_1^\top x_1^*\rangle \le \\ \le \langle C_2x_1^* + c_2, x_2\rangle + (1/2)\langle B_2x_2, x_2\rangle + \lambda^*\langle x_2, A_1^\top x_1^*\rangle, \;\; x_2 \ge 0. \end{gathered}$$

Очевидно, что эти задачи можно переписать в виде

$$\begin{gathered} \langle x_1^*, C_1x_2^* + c_1\rangle + (1/2)\langle B_1x_1^*, x_1^*\rangle \le \langle x_1, C_1x_2^* + c_1\rangle + \\ +(1/2)\langle B_1x_1, x_1\rangle + \lambda^*(\langle x_1, A_1x_2^*\rangle - \langle x_1^*, A_1x_2^*\rangle) \;\forall x_1 \ge 0, \end{gathered}$$

и

$$\begin{gathered} \langle C_2x_1^* + c_2, x_2^*\rangle + (1/2)\langle B_2x_2^*, x_2^*\rangle \le \langle C_2x_1^* + c_2, x_2\rangle + \\ +(1/2)\langle B_2x_2, x_2\rangle + \lambda^*(\langle x_2, A_1^\top x_1^*\rangle - \langle x_2^*, A_1^\top x_1^*\rangle) \;\forall x_2 \ge 0, \end{gathered}$$

или

$$\begin{array}{rcl} x_1^* & \in & \mathrm{Argmin}\{\langle x_1, C_1x_2^* + c_1\rangle + (1/2)\langle B_1x_1, x_1\rangle \mid \lambda^*(\langle x_1, A_1x_2^*\rangle - \langle x_2^*, A_1x_2^*\rangle)) \le 0, \;\; x_1 \ge 0\}, \\ x_2^* & \in & \mathrm{Argmin}\{\langle C_2x_1^* + c_2, x_2\rangle + (1/2)\langle B_2x_2, x_2\rangle \mid \lambda^*(\langle x_2, A_1^\top x_1^*\rangle - \langle x_2^*, A_1^\top x_1^*\rangle) \le 0, \;\; x_2 \ge 0\}. \end{array}$$

Проведем некоторые преобразования ограничений полученных задач. Из левого неравенства (2.7.12) следует выполнение условия дополняющей нежесткости $\lambda^*(\langle x_1^*, A_1x_2^*\rangle + \langle x_2^*, A_1^\top x_1^*\rangle - -\beta) = 0$. Отсюда, в частности, $2\lambda^*\langle x_1^*, A_1x_2^*\rangle = \lambda^*\beta$.

С учетом полученного факта ограничения последних задач оптимизации можно переписать в форме $\lambda^*(\langle x_1, A_1 x_2^*\rangle - \beta/2) \le 0$, $\lambda^*(\langle A_1^\top x_1^*, x_2\rangle - \beta/2) \le 0$. Кроме того, всегда можно считать, что $\lambda^* \neq 0$. В противном случае это означало бы, что оптимальная точка задачи (2.7.11) является внутренней, а функциональное ограничение не является активным. В этом случае очевидно, что задача минимизации сепарабельной функции на положительном ортанте расщепляется на две независимые задачи, каждая на своем пространстве.

Итак, множитель $\lambda^* \neq 0$, поэтому его можно сократить в приведенных выше неравенствах для ограничений. С учетом сказанного последнюю пару задач можно переписать в форме

$$\begin{aligned} x_1^* &\in \operatorname{Argmin}\{\langle x_1, C_1 x_2^* + c_1\rangle + (1/2)\langle B_1 x_1, x_1\rangle \mid \langle x_1, A_1 x_2^*\rangle \le (\beta/2),\ x_1 \ge 0\}, \\ x_2^* &\in \operatorname{Argmin}\{\langle C_2 x_1^* + c_2, x_2\rangle + (1/2)\langle B_2 x_2, x_2\rangle \mid \langle A_1^\top x_1^*, x_2\rangle \le (\beta/2),\ x_2 \ge 0\}. \end{aligned} \tag{2.7.13}$$

Таким образом, задача (2.7.9) в силу своей специфики распадается на систему двух задач оптимизации, которая в совокупности представляет собой игру двух лиц со связанными ограничениями.

2.8. Градиентный и экстраградиентный подходы

Градиентный подход интуитивно хорошо понятен для задач оптимизации и менее очевиден для седловых задач. Поэтому рассмотрим две простейшие задачи, на примере которых можно хорошо видеть особенности применения градиентного спуска к этим двум типам задач. Пусть

$$x^*, y^* \in \operatorname{argmin}\{(1/2)x^2 + (1/2)y^2 \mid x, y \in \mathbb{R}^2\} \tag{2.8.1}$$

и

$$x^*, y^* \in \operatorname{argsdl}\{xy \mid x, y \in \mathbb{R}^2\}. \tag{2.8.2}$$

Точка $(x^*, y^*) = (0, 0)$ является минимумом для (2.8.1) и седловой точкой для (2.8.2), т.е. $0 \le (1/2)x^2 + (1/2)y^2\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}^2$ для первой задачи и $0 \cdot y \le 0 \le x \cdot 0\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}^2$ — для второй.

Очевидно, что линии уровня целевой функции первой задачи представляют собой концентрические окружности и движение по антиградиенту из точки (x_0, y_0) происходит по радиус-вектору в направлении к точке $(0, 0)$ и описывается дифференциальными уравнениями (непрерывная форма градиентного метода [25, 26])

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha x, \quad \frac{dy}{dt} = -\alpha y, \quad x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0.$$

Отсюда

$$\frac{d}{dt}(x + y) + \alpha(x + y) = 0, \quad x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0.$$

Нетрудно видеть, что траектория этого процесса сходится по экспоненте к нулевой точке $(x(t), y(t)) = (x_0 \exp(-\alpha t),\ y_0 \exp(-\alpha t)) \to (0, 0),\ t \to \infty$.

Рассмотрим седловой (спуск по одной переменной и подъем по другой) градиентный метод для достижения седловой точки с координатами $(0, 0)$ для функции $L(x, y) = xy$. Уравнения этого метода имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha y, \quad \frac{dy}{dt} = \alpha x, \quad x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0.$$

Линии уровня этой функции — гиперболы, и движение по градиенту (антиградиенту) будет происходить по концентрическим окружностям и никогда не достигнет седловой точки.

Действительно, умножим первое уравнение на переменную x, а второе — на переменную y и сложим оба уравнения; тогда получим

$$\frac{dx}{dt}x + \frac{dy}{dt}y = 0 \qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = 0.$$

Отсюда $x^2 + y^2 = r^2$, и очевидно, что траектория процесса не сходится к нулю. Это происходит потому, что вектор, касательный к траектории, и направление к седловой точке составляют угол в $90°$. Однако если сместиться по траектории из точки (x_0, y_0) в близкую точку $\bar{x} = (x(t_0 + \delta)$, $\bar{y} = y(t_0 + \delta))$, а затем в этой точке вычислить направление движения и сделать шаг вдоль этого направления из точки x_0, y_0, то траектория процесса будет всегда направлена внутрь области, очерченной окружностью. Это дает основание надеяться, что такой процесс будет сходиться к седловой точке. Уравнения этого процесса для произвольной седловой функции $L(x, y)$ имеют вид

$$\begin{array}{ll} \dfrac{dx}{dt} = -\alpha\nabla_1 L(\bar{x}, \bar{y}), & \dfrac{dy}{dt} = \alpha\nabla_2 L(\bar{x}, \bar{y}), \\ \bar{x} = x - \alpha\nabla_1 L(x, y), & \bar{y} = y + \alpha\nabla_2 L(x, y), \\ x(t_0) = x_0, & y(y_0) = y_0. \end{array} \tag{2.8.3}$$

Конечные соотношения в этом методе естественно интерпретировать как обратные связи, с помощью которых происходит управление градиентным методом [27, 28]. Общую теорию обратных связей можно найти в [29].

Седловую задачу для произвольной выпукло-вогнутой функции $L(x, y)$ на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ всегда можно скаляризовать и свести к задаче вычисления неподвижной точки экстремального отображения. Действительно, введем функцию $\Phi(v, w) = L(z, p) - L(x, y)$, где $w = (z, y)$, $v = (x, p)$; тогда седловая задача $L(x^*, y) \le L(x^*, y^*) \le L(x, y^*)$ $\forall x, y \in X \times Y \subset \mathbb{R}^n \times \times \mathbb{R}^m$ приводится к виду: найти неподвижную точку $v^* \in \Omega = X \times Y$, удовлетворяющую экстремальному включению

$$\Phi(v^*, v^*) \le \Phi(v^*, w) \quad \forall w \in \mathbb{R}^{n+m}. \tag{2.8.4}$$

Если несколько обобщить ситуацию и считать, что значения переменной $w \in \Omega \subset \mathbb{R}^{n+m}$ принадлежат выпуклому замкнутому множеству, то используя оператор проектирования $\pi_\Omega(...)$ вектора на множество Ω, процесс (2.3.3) можно записать в форме [30]

$$\frac{dv}{dt} + v = \pi_\Omega(v - \alpha\nabla_2\Phi(\bar{v}, \bar{v})), \qquad v(t_0) = x_0, \quad \bar{v} = \pi_\Omega(v - \alpha\nabla_2\Phi(v, v)). \tag{2.8.5}$$

Итеративный аналог (2.3.5) имеет вид

$$\bar{v}^n = \pi_\Omega(v^n - \alpha\nabla_2\Phi(v^n, v^n)), \qquad v^{n+1} = \pi_\Omega(v^n - \alpha\nabla_2\Phi(\bar{v}^n, \bar{v}^n)). \tag{2.8.6}$$

Другой вариант этого подхода идет от модифицированных функций Лагранжа

$$\bar{v}^n = \pi_\Omega(v^n - \alpha\nabla_2\Phi(v^n, v^n)), \qquad v^{n+1} = \pi_\Omega(v^n - \alpha\nabla_2\Phi(\bar{v}^n, v^n)). \tag{2.8.7}$$

Из приведенных формул видно, что градиентный спуск применительно к седловым и равновесным ситуациям распадается на два полушага, причем первый полушаг трактуется как вычисление прогнозной точки, в которой вычисляется направление движения будущего развития, а затем из начальной точки но вдоль прогнозного направления, делается градиентный шаг. Такого сорта методы естественно назвать экстраградиентными, или прогнозными методами. Метод (2.8.6) был предложен и исследован в работе [31], метод (2.8.7) независимо был предложен в [32]. Применение экстраградиентного подхода для различных классов задач описано в [33]. Свойства сходимости этого метода к решениям равновесных задач можно найти в [30, 34].

Известно, что проксимальные и градиентные процессы очень близки по своей природе, а в гладких ситуациях проксимальные методы можно рассматривать как неявные градиентные. Поэтому приведем здесь формулы метода, который является проксимальным аналогом экстраградиентного процесса и который естественно называть экстрапроксимальным:

$$\begin{aligned} \bar{v}^n &= \operatorname{Argmin}\{(1/2)|w - v^n|^2 + \alpha\Phi(v^n, w) \mid w \in \Omega\}, \\ v^{n+1} &= \operatorname{Argmin}\{(1/2)|w - v^n|^2 + \alpha\Phi(\bar{v}^n, w) \mid w \in \Omega\}. \end{aligned} \tag{2.8.8}$$

Этот процесс был предложен в работе [35], а применимость его к равновесным задачам обоснована в работах [13, 36]. Необходимо отметить, что сходимость методов типа (2.8.5) – (2.8.8) существенно зависит от наличия или отсутствия седловых свойств функции сдвига $\Psi(v, w) = \Phi(v, w) - \Phi(v, v)$. Отметим также, что седловые свойства в выпуклом программировании детально исследованы в [21], а эти свойства для точечно-множественных отображений можно найти в [37]. Вопросы двойственности в линейной оптимизации, т.е. седловые свойства, обсуждаются в [22].

В матричных играх в свое время пользовался большой популярностью метод Робинсон–Брауна [38]. Затем этот подход в [39, 40] был распространен на выпукло-вогнутые седловые задачи. Свойства сходимости этого метода всегда были плохими и вряд ли он представляет интерес как метод решения задач, но ввиду его популярности в недалеком прошлом установим его связь с проксимальными методами (2.8.8). Если из двух полушагов метода (2.8.8) мы оставим только один, причем в этом полушаге опустим квадратичный член (что, вообще говоря, плохо, поскольку этот член отражает идею приближения по методу наименьших квадратов), а затем на отрезке, соединяющем две точки v^n и $\bar{v}^n$, по некоторому правилу выберем третью точку v^{n+1} ближе к v^n, то получим обобщенный метод Робинсон–Брауна

$$\bar{v}^n = \operatorname{Argmin}\{\Phi(v^n, w) \mid w \in \Omega\}, \qquad v^{n+1} = v^n + \alpha(\bar{v}^n - v^n).$$

Из [40] следует, что для сходимости этого метода требуется дополнительно вогнутость по v функции $\Phi(v, w)$ и сильная монотонность оператора $\nabla_w \Phi(v, w)|_{v=w}$, в то время как для сходимости процесса (2.8.8) ничего этого не требуется [1, 13].

2.9. Экстраградиентный метод для равновесных задач

В этом параграфе рассмотрим вопросы применения экстраградиентного подхода к решению равновесных задач

$$v^* \in \operatorname{Argmin}\{\langle \Phi v^* + \varphi, w\rangle + (1/2)\langle Bw, w\rangle \mid w \in D\}, \tag{2.9.1}$$

где $D = \{w \mid Aw \le a,\ w \ge 0\}$. Известно, что необходимое условие для этой задачи можно выписать как в форме вариационного неравенства [3]

$$\langle (\Phi + B)v^* + \varphi, w - v^*\rangle \ge 0 \quad \forall w \ge 0, \tag{2.9.2}$$

так и в форме операторного уравнения [3]

$$v^* = \pi_D(v^* - \alpha((\Phi + B)v^* + \varphi)), \tag{2.9.3}$$

где $\pi_D(\ldots)$ — оператор проектирования некоторого вектора на допустимое множество D, $\alpha > 0$ — параметр типа длины шага.

Для того чтобы решить операторное уравнение (2.9.3), используем один из вариантов экстраградиентного подхода [7, 10]

$$\bar{v}^n = \pi_D(v^n - \alpha_n((\Phi + B)v^n + \varphi)), \qquad v^{n+1} = \pi_D(v^n - \alpha_n((\Phi + B)\bar{v}^n + \varphi)). \tag{2.9.4}$$

В этом методе допустимое множество D учитывается с помощью оператора проектирования $\pi_D(\ldots)$. При этом предполагается, что структура этого множества достаточно проста, чтобы численно реализовать этот оператор. В противном случае допустимое множество D должно учитываться с помощью функции Лагранжа. Этот подход реализован в одном из последующих разделов.

Длину шага α_n в этом процессе будем определять одним из двух способов:

либо из условия

$$0 < \varepsilon_0 \le \alpha_n \le \sqrt{(1-\varepsilon)}/(\sqrt{2}|\Phi + B|), \quad \varepsilon > 0, \tag{2.9.5}$$

либо из условия

$$2\alpha_n^2|(\Phi + B)(\bar{v}^n - v^n)|^2 \le (1-\varepsilon)|\bar{v}^n - v^n|^2. \tag{2.9.6}$$

Реализация первого способа (2.9.5) очень проста, но для того, чтобы вычислить правую границу интервала $\varepsilon_0 \le \alpha_n < \sqrt{(1-\varepsilon)}/(\sqrt{2}|\Phi + B|)$, способ предполагает знание априорной информации о нормах матриц $|\Phi + B|$. Во многих случаях эта информация неизвестна или ее трудно априори оценить. Во втором способе выбора параметра α_n (2.9.6) механизм оценки этой информации фактически вложен в сам метод.

Для проверки выполнения условия (2.9.6) сначала выберем произвольное число α_0 (одно и то же для всех итераций, например $\alpha_0 = 1$), затем вычислим первый полушаг (2.9.4), т.е. векторы $\bar{v}^n$, и проверим условие. Если оно выполнено, то в качестве длины шага возьмем найденное значение, если нет — произведем дробление параметра (путем умножения на число, меньшее единицы) до тех пор, пока не выполнится условие (2.9.6).

На первый взгляд может показаться, что обсуждаемый способ выбора длины шага является слишком трудоемким. Действительно, для определения параметра α_n, вообще говоря, придется несколько раз решать задачу минимизации сильно выпуклой функции на простом множестве. Но такой способ действий не предполагает знания априорных констант типа норм матриц $|\Phi + B|$. К тому же, совсем необязательно на каждой итерации определять новые значения параметров. Может оказаться достаточным использовать старые параметры, время от времени корректируя их.

Для обоснования корректности способа выбора параметра α_n из условий (2.9.5) и (2.9.6) получим оценку отклонения векторов $\bar{v}^n$ и v^{n+1} из (2.9.4)

$$|\bar{v}^n - v^{n+1}| \le \alpha_n|(\Phi + B)(v^n - \bar{v}^n)|. \tag{2.9.7}$$

Очевидно, что всегда можно выбрать параметр α_n так, что выполнено условие $2\alpha_n^2|\Phi + B|^2 \le$ $\le (1-\varepsilon)$, т.е.

$$0 < \varepsilon_0 \le 2\alpha_n^2 \le (1-\varepsilon)/(|\Phi + B|^2).$$

Это означает, что всегда существует α_n, удовлетворяющее оценке (2.9.6).

Представим процесс (2.9.4) в форме вариационных неравенств

$$\langle \bar{v}^n - v^n + \alpha_n((\Phi + B)v^n + \varphi),\ w - \bar{v}^n \rangle \ge 0 \quad \forall w \in D, \tag{2.9.8}$$

и

$$\langle v^{n+1} - v^n + \alpha_n((\Phi + B)\bar{v}^n + \varphi),\ w - v^{n+1} \rangle \ge 0 \quad \forall w \in D, \tag{2.9.9}$$

Покажем, что процесс (2.9.4) сходится монотонно по норме к одному из равновесных решений.

Теорема 2.9.1. *Если множество решений задачи (2.9.1) непусто и матрица $\Phi + B$ положительно полуопределена, то последовательность v^n, порожденная методом (2.9.4) с выбором параметра α_n способом (2.9.5) или (2.9.6), сходится монотонно по норме к одному из равновесных решений, т.е. $v^n \to v^* \in D^*$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Положим $w = v^*$ в (2.9.9); тогда

$$\langle v^{n+1} - v^n, v^* - v^{n+1}\rangle + \alpha_n\langle(\Phi + B)\bar{v}^n + \varphi, v^* - v^{n+1}\rangle \geq 0. \tag{2.9.10}$$

Положим $w = v^{n+1}$ в (2.9.8):

$$\langle\bar{v}^n - v^n + \alpha_n((\Phi + B)v^n + \varphi), v^{n+1} - \bar{v}^n\rangle \geq 0.$$

Отсюда

$$\langle\bar{v}^n - v^n, v^{n+1} - \bar{v}^n\rangle + \alpha_n\langle(\Phi + B)\bar{v}^n + \varphi, v^{n+1} - \bar{v}^n\rangle - \alpha_n\langle(\Phi + B)(\bar{v}^n - v^n), v^{n+1} - \bar{v}^n\rangle \geq 0,$$

или, с учетом (2.9.7),

$$\langle\bar{v}^n - v^n, v^{n+1} - \bar{v}^n\rangle + \alpha_n\langle(\Phi + B)\bar{v}^n + \varphi, v^{n+1} - \bar{v}^n\rangle + \alpha_n^2|(\Phi + B)(\bar{v}^n - v^n)|^2 \geq 0. \tag{2.9.11}$$

Сложим неравенства (2.9.10) и (2.9.11)

$$\begin{gathered}\langle v^{n+1} - v^n, v^* - v^{n+1}\rangle + \langle\bar{v}^n - v^n, v^{n+1} - \bar{v}^n\rangle + \\ +\alpha_n\langle(\Phi + B)\bar{v}^n + \varphi, v^* - \bar{v}^n\rangle + \alpha_n^2|(\Phi + B)(\bar{v}^n - v^n)|^2 \geq 0.\end{gathered} \tag{2.9.12}$$

Положим $w = \bar{v}^n$ в (2.9.2); тогда

$$\langle(\Phi + B)v^* + \varphi, \bar{v}^n - v^*\rangle \geq 0.$$

Сложим полученные неравенства, при этом учтем положительную полуопределенность матрицы $\Phi + B \geq 0$:

$$\langle v^{n+1} - v^n, v^* - v^{n+1}\rangle + \langle\bar{v}^n - v^n, v^{n+1} - \bar{v}^n\rangle + \alpha_n^2|(\Phi + B)(\bar{v}^n - v^n)|^2 \geq 0. \tag{2.9.13}$$

С помощью тождества

$$|x_1 - x_3|^2 = |x_1 - x_2|^2 + 2\langle x_1 - x_2, x_2 - x_3\rangle + |x_2 - x_3|^2 \tag{2.9.14}$$

представим два первые скалярные произведения в виед суммы квадратов:

$$|v^{n+1} - v^*|^2 + |v^{n+1} - \bar{v}^n|^2 + |\bar{v}^n - v^n|^2 - 2\alpha_n^2|(\Phi + B)(\bar{v}^n - v^n)|^2 \leq |v^n - v^*|^2.$$

В полученном неравенстве сумму третьего и четвертого слагаемых оценим с помощью (2.9.6); тогда

$$|v^{n+1} - v^*|^2 + |v^{n+1} - \bar{v}^n|^2 + \varepsilon|\bar{v}^n - v^n|^2 \leq |v^n - v^*|^2. \tag{2.9.15}$$

Если же в процессе (2.9.4) длина шага α_n выбирается из условия (2.9.5), то четвертый член оценим как

$$|(\Phi + B)(\bar{v}^n - v^n)|^2 \leq |(\Phi + B)|^2|\bar{v}^n - v^n|^2;$$

тогда

$$|v^{n+1} - v^*|^2 + |v^{n+1} - \bar{v}^n|^2 + (1 - 2\alpha_n^2(|\Phi + B|^2)|\bar{v}^n - v^n|^2 \leq |v^n - v^*|^2. \tag{2.9.16}$$

Так как $1 - 2\alpha_n^2|\Phi + B|^2 \geq \varepsilon$ по условию (2.9.5), то получим неравенство, которое имеет вид (2.9.15). Таким образом, независимо от способа выбора длины шага α_n мы в любом случае приходим к неравенству (2.9.15). Просуммируем (2.9.16) от $n = 0$ до $n = N$

$$|v^{N+1} - v^*|^2 + \sum_{k=0}^{k=N} |v^{k+1} - \bar{v}^k|^2 + \varepsilon \sum_{k=0}^{k=N} |\bar{v}^k - v^k|^2 \leq |v^0 - v^*|^2.$$

Из полученного неравенства следует ограниченность траектории

$$|v^{N+1} - v^*|^2 \leq |v^0 - v^*|^2,$$

а также сходимость рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty} |v^{k+1} - \bar{v}^k|^2 < \infty, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} |\bar{v}^k - v^k|^2 < \infty$$

и, следовательно, стремление к нулю величин $|v^{n+1} - v^n|^2 \to 0,\ |\bar{v}^n - v^n|^2 \to 0,\ n \to \infty$.

Так как последовательность v^n ограничена, то существует элемент v' такой, что $v^{n_i} \to v'$ при $n_i \to \infty$ и при этом $|v^{n_i+1} - v^{n_i}|^2 \to 0,\ |\bar{v}^{n_i} - v^{n_i}|^2 \to 0$.

Рассмотрим неравенства (2.9.8), (2.9.9) для всех $n_i \to \infty$ и, переходя к пределу (с учетом того, что $\alpha_n \geq \varepsilon_0$), получим

$$\langle (\Phi + B)v' + \varphi, w - v' \rangle \geq 0.$$

Поскольку это неравенство совпадает с (2.9.2), то $v' = v^* \in D^*$, т.е. любая предельная точка последовательности v^n является решением задачи. Условие монотонности убывания величины $|v^n - v^*|$ обеспечивает единственность предельной точки, т.е. сходимость $v^n \to v^*$ при $n \to \infty$. Теорема доказана. $\square$

2.10. Сходимость за конечное число шагов

Рассмотрим случай, когда квадратичная компонента целевой функции отсутствует, а искомое решение удовлетворяет условию острого равновесия. В этой ситуации задача (2.9.1) имеет форму

$$v^* \in \text{Argmin}\{\langle \Phi v^* + \varphi, w \rangle \mid w \in D\},$$

где $D = \{w \mid Aw \leq a,\ w \geq 0\}$ — допустимое множество, или

$$\langle \Phi v^* + \varphi, v^* \rangle \leq \langle \Phi v^* + \varphi, w \rangle \qquad \forall w \in D, \tag{2.10.1}$$

а ее решение удовлетворяет условию остроты (2.5.2) [13]

$$\langle \Phi v + \varphi, v - v^* \rangle \geq \gamma |v - v^*| \qquad \forall v \in D. \tag{2.10.2}$$

Задачу (2.10.1) можно представить как в форме вариационного неравенства

$$\langle \Phi v^* + \varphi, w - v^* \rangle \geq 0 \qquad \forall w \in D, \tag{2.10.3}$$

так и в форме операторного уравнения

$$v^* = \pi_D(v^* - \alpha(\Phi v^* + \varphi)). \tag{2.10.4}$$

Для решения операторного уравнения (2.10.4) используем экстраградиентный метод

$$\bar{v}^n = \pi_D(v^n - \alpha(\Phi v^n + \varphi)), \qquad v^{n+1} = \pi_D(v^n - \alpha(\Phi \bar{v}^n + \varphi)), \tag{2.10.5}$$

где $\alpha > 0$ — константа. Оценка отклонения векторов $\bar{v}^n$, v^{n+1} друг от друга за один шаг метода имеет вид
$$|v^{n+1} - \bar{v}^n| \le \alpha|\Phi(v^n - \bar{v}^n)| \le \alpha|\Phi|\,|v^n - \bar{v}^n|. \tag{2.10.6}$$

Представим операторные уравнения (2.10.5) в форме вариационных неравенств

$$\langle \bar{v}^n - v^n + \alpha(\Phi v^n + \varphi), w - \bar{v}^n\rangle \ge 0 \qquad \forall w \in D \tag{2.10.7}$$

и
$$\langle v^{n+1} - v^n + \alpha(\Phi \bar{v}^n + \varphi), w - v^{n+1}\rangle \ge 0 \qquad \forall w \in D \tag{2.10.8}$$

и докажем теорему.

Теорема 2.10.1. *Если множество решений задачи (2.10.1) непусто и удовлетворяет условию остроты (2.10.2), матрица $\Phi \ge 0$ положительно полуопределена, то последовательность v^n, порожденная методом (2.10.5) с параметром $0 < \alpha < 1/(\sqrt{2}|\Phi|)$, сходится к решению равновесной задачи (2.10.1) за конечное число итераций, т.е. существует такой номер n_0, при котором v^{n_0} — решение (2.10.1).*

Доказательство. Полагая в (2.10.8) $w = v^* \in D^*$, получим

$$\langle v^{n+1} - v^n + \alpha(\Phi \bar{v}^n + \varphi), v^* - v^{n+1}\rangle \ge 0. \tag{2.10.9}$$

Используя (2.10.6), преобразуем отдельно второе слагаемое из (2.10.9)

$$\begin{aligned}
&\langle \Phi\bar{v}^n + \varphi, v^* - v^{n+1}\rangle = \langle \Phi\bar{v}^n + \varphi, v^* - \bar{v}^n\rangle + \\
&+\langle \Phi\bar{v}^n + \varphi, \bar{v}^n - v^{n+1}\rangle \le \langle \Phi\bar{v}^n + \varphi, v^* - \bar{v}^n\rangle - \\
&-\langle \Phi v^n - \Phi\bar{v}^n, \bar{v}^n - v^{n+1}\rangle + \langle \Phi v^n + \varphi, \bar{v}^n - v^{n+1}\rangle \le \\
&\le \langle \Phi\bar{v}^n + \varphi, v^* - \bar{v}^n\rangle + \alpha|\Phi|^2|v^n - \bar{v}^n|^2 + \langle \Phi v^n + \varphi, \bar{v}^n - v^{n+1}\rangle.
\end{aligned}$$

С учетом полученной оценки перепишем (2.10.9) в виде

$$\begin{aligned}
&\langle v^{n+1} - v^n, v^* - v^{n+1}\rangle + \alpha\langle \Phi\bar{v}^n + \varphi, v^* - \bar{v}^n\rangle + \\
&+(\alpha|\Phi|)^2|v^n - \bar{v}^n|^2 + \alpha\langle \Phi v^n + \varphi, \bar{v}^n - v^{n+1}\rangle \ge 0.
\end{aligned} \tag{2.10.10}$$

Положим в (2.10.7) $w = v^{n+1}$; тогда

$$\langle \bar{v}^n - v^n, v^{n+1} - \bar{v}^n\rangle + \alpha\langle \Phi v^n + \varphi, v^{n+1} - \bar{v}^n\rangle \ge 0. \tag{2.10.11}$$

Сложим (2.10.10) и (2.10.11); тогда

$$\begin{aligned}
&\langle v^{n+1} - v^n, v^* - v^{n+1}\rangle + \langle \bar{v}^n - v^n, v^{n+1} - \bar{v}^n\rangle + \\
&+\alpha\langle \Phi\bar{v}^n + \varphi, v^* - \bar{v}^n\rangle + (\alpha|\Phi|)^2|v^n - \bar{v}^n|^2 \ge 0.
\end{aligned} \tag{2.10.12}$$

Положим в (2.10.3) $w = \bar{v}^n$ и прибавим его к (2.10.12)

$$\begin{aligned}
&\langle v^{n+1} - v^n, v^* - v^{n+1}\rangle + \langle \bar{v}^n - v^n, v^{n+1} - \bar{v}^n\rangle + \\
&+\alpha\langle \Phi\bar{v}^n - \Phi v^*, v^* - \bar{v}^n\rangle + (\alpha|\Phi|)^2|v^n - \bar{v}^n|^2 \ge 0.
\end{aligned} \tag{2.10.13}$$

В силу положительной полуопределенности матрицы Φ имеем

$$\langle v^{n+1} - v^n, v^* - v^{n+1}\rangle + \langle \bar{v}^n - v^n, v^{n+1} - \bar{v}^n\rangle + (\alpha|\Phi|)^2|v^n - \bar{v}^n|^2 \ge 0. \tag{2.10.14}$$

Два первых скалярных произведения в полученном неравенстве представим в виде суммы квадратов с помощью тождества (2.9.14)

$$\begin{aligned}|v^{n+1}-v^*|^2 &+ |v^{n+1}-v^n|^2+|v^n-\bar{v}^n|^2+|\bar{v}^n-v^{n+1}|^2- \\ &- 2(\alpha|\Phi|)^2|\bar{v}^n-v^n|^2 \le |v^n-v^*|^2+|v^{n+1}-v^n|^2.\end{aligned}$$

Отсюда

$$|v^{n+1}-v^*|^2+d|v^n-\bar{v}^n|^2+|\bar{v}^n-v^{n+1}|^2 \le |v^n-v^*|^2, \tag{2.10.15}$$

где $d=1-2(\alpha|\Phi|)^2>0$, так как $\alpha<1/(\sqrt{2}|\Phi|)$.

Просуммируем (2.10.15) от $n=0$ до $n=N$:

$$|v^{N+1}-v^*|^2+d\sum_{k=1}^{k=N}|v^k-\bar{v}^k|^2+\sum_{k=1}^{k=N}|\bar{v}^k-v^{k+1}|^2 \le |v^0-v^*|^2.$$

Из этого неравенства следует сходимость рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty}|v^n-\bar{v}^n|^2<\infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty}|\bar{v}^n-v^{n+1}|^2<\infty \tag{2.10.16}$$

и $|v^n-\bar{v}^n|^2 \to 0$, $|\bar{v}^n-v^{n+1}| \to 0$ при $n\to\infty$.

Используя оценку

$$(1/2)|x_1-x_2|^2 \le |x_1-x_3|^2+|x_3-x_2|^2, \tag{2.10.17}$$

преобразуем неравенство (2.10.15) к виду

$$|v^{n+1}-v^*|^2+(d/2)|v^{n+1}-v^n|^2 \le |v^n-v^*|^2.$$

Отсюда

$$(|v^{n+1}-v^*|-|v^n-v^*|)(|v^{n+1}-v^*|+|v^n-v^*|)+(d/2)|v^{n+1}-v^n|^2 \le 0.$$

Разделим левую и правую части этого неравенства на величину $(|v^{n+1}-v^*|+|v^n-v^*|)$, а затем, учитывая монотонность $|v^{n+1}-v^*| \le |v^n-v^*|$, получим

$$|v^{n+1}-v^*|-|v^n-v^*|+\frac{d}{4}\,\frac{|v^{n+1}-v^n|^2}{|v^n-v^*|} \le 0. \tag{2.10.18}$$

Просуммируем (2.10.18) от $n=0$ до $n=N$:

$$|v^{N+1}-v^*|^2+\frac{d}{4}\sum_{k=0}^{k=N}\frac{|v^{k+1}-v^k|^2}{|v^k-v^*|} \le |v^0-v^*|^2. \tag{2.10.19}$$

Из (2.10.19) следует, что

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|v^{k+1}-v^k|^2}{|v^k-v^*|}<\infty.$$

Таким образом,

$$|v^{n+1}-v^n|^2/|v^n-v^*| \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Используя неравенство треугольника, получим

$$\frac{|v^{n+1}-v^n|^2}{|v^n-\bar{u}^n|+|\bar{u}^n-v^*|} \le \frac{|v^{n+1}-v^n|^2}{|v^n-v^*|} \to 0 \tag{2.10.20}$$

при $n \to \infty$. Учитывая (2.10.16), отсюда имеем

$$|v^{n+1} - v^n|^2/|\bar{u}^n - v^*| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{2.10.21}$$

Действительно, если это не так, то существует подпоследовательность v^{n_i} такая, что $|v^{n_i+1} - v^{n_i}|^2/|\bar{u}^{n_i} - v^*| \geq a > 0$ для всех $n_i \to \infty$. Так как $|v^{n_i} - \bar{u}^{n_i}| \to 0$, $n_i \to \infty$, то всегда можно выбрать такой номер n_{i_0}, что для всех $n_i \geq n_{i_0}$ выполняется оценка $|v^{n_{i_0}+1} - v^{n_{i_0}}|^2/(|v^{n_{i_0}} - \bar{u}^{n_{i_0}}| + |\bar{u}^{n_{i_0}} - v^*|) \geq (1/2)a > 0$. Но это противоречит (2.10.20).

Возвращаясь к (2.10.12), преобразуем два первых скалярных произведения

$$\langle v^{n+1} - v^n, v^* - \bar{v}^n\rangle - |v^{n+1} - \bar{v}^n|^2 + (\alpha|\Phi|)^2|\bar{v}^n - v^n|^2 + \alpha\langle\Phi\bar{v}^n + \varphi, v^* - \bar{v}^n\rangle \geq 0.$$

Второе слагаемое $|v^{n+1} - \bar{v}^n|^2$ преобразуем с помощью тождества (2.9.14)

$$\alpha\langle\Phi\bar{v}^n + \varphi, \bar{v}^n - v^*\rangle + |v^{n+1} - v^n|^2 + 2\langle v^{n+1} - v^n, v^n - \bar{v}^n\rangle + d_1|\bar{v}^n - v^n|^2 \leq \langle v^{n+1} - v^n, v^* - \bar{v}^n\rangle,$$

где $d_1 = 1 - (\alpha|\Phi|)^2 > 0$, так как $\alpha < 1/(\sqrt{2}|\Phi|)$.

Используя условие остроты (2.10.2), оценим первый член в полученном неравенстве

$$\begin{aligned}\alpha\gamma|\bar{v}^n - v^*| \quad &+ \quad |v^{n+1} - v^n|^2 + 2\langle v^{n+1} - v^n, v^n - \bar{v}^n\rangle + \\ &+ \quad d_1|\bar{v}^n - v^n|^2 \leq \langle v^{n+1} - v^n, v^* - \bar{v}^n\rangle.\end{aligned}$$

Из третьего и четвертого слагаемых выделим полный квадрат

$$\begin{aligned}\alpha\gamma|\bar{v}^n - v^*| \quad &+ \quad \left|\frac{1}{\sqrt{d_1}}(v^{n+1} - v^n) + \sqrt{d_1}(v^n - \bar{v}^n)\right|^2 + \\ &+ \quad \left(1 - \frac{1}{d_1}\right)|v^{n+1} - v^n|^2 \leq \langle v^{n+1} - v^n, v^* - \bar{v}^n\rangle.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\alpha\gamma|\bar{v}^n - v^*| \leq |v^{n+1} - v^n|\,|v^* - \bar{v}^n| + \left(\frac{1}{d_1} - 1\right)|v^{n+1} - v^n|^2.$$

Предполагая, что $|\bar{v}^n - v^*| \neq 0$ для всех n, получаем

$$\alpha\gamma \leq |v^{n+1} - v^n| + \left(\frac{1}{d_1} - 1\right)\frac{|v^{n+1} - v^n|^2}{|\bar{v}^n - v^*|}. \tag{2.10.22}$$

Рассматривая (2.10.22), можно видеть, что правая часть этого неравенства согласно (2.10.16) и (2.10.21) с ростом номера n стремится к нулю; с другой стороны, эта правая часть ограничена величиной $\alpha\gamma$ для всех $n \to \infty$. Выход из этого противоречия состоит в том, чтобы признать, что утверждение $|\bar{u}^n - v^*| \neq 0$ для всех n неверно. Поэтому существует такой номер n_f, что $\bar{u}^{n_f}$ — решение задачи (2.10.1). Теорема доказана. □

2.11. Сходимость со скоростью геометрической прогрессии

Рассмотрим билинейную задачу

$$v^* \in \text{Argmin}\{\langle\Phi v^* + \varphi, w\rangle + (1/2)\langle Bw, w\rangle \mid w \in D\}, \tag{2.11.1}$$

где $D = \{w|Aw \leq a,\ w \geq 0\}$ — допустимое множество. Будем предполагать, что решение этой задачи имеет квадратичный порядок остроты равновесия, т.е. в (2.5.3)

$$\langle\Phi v + \varphi, v - v^*\rangle + (1/2)(\langle Bv, v\rangle - \langle Bv^*, v^*\rangle) \geq \gamma|v - v^*|^2 \tag{2.11.2}$$

для всех $w \in D$. Известно, что квадратичные функции вида $\Phi(v,v) = \langle Av - b, Av - b\rangle$ с матрицей $A > 0$ и вектором $b \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяют этому условию [3].

Для решения задачи (2.11.1), (2.11.2) используем метод (2.9.4) с $\alpha_n = \alpha = const$:

$$\bar{v}^n = \pi_D(v^n - \alpha((\Phi + B)v^n + \varphi)), \qquad v^{n+1} = \pi_D(v^n - \alpha((\Phi + B)\bar{v}^n + \varphi)). \tag{2.11.3}$$

Оценка отклонения векторов $\bar{v}^n$ и v^{n+1} за один шаг метода в (2.11.3) имеет вид

$$|v^{n+1} - \bar{v}^n| \le \alpha|(\Phi + B)(v^n - \bar{v}^n)| \le \alpha|\Phi + B|\,|v^n - \bar{v}^n|. \tag{2.11.4}$$

Представим операторные уравнения (2.11.3) в форме вариационных неравенств

$$\langle \bar{v}^n - v^n + \alpha((\Phi + B)v^n + \varphi), w - \bar{v}^n\rangle \ge 0 \ \ \forall w \in D \tag{2.11.5}$$

и

$$\langle v^{n+1} - v^n + \alpha((\Phi + B)\bar{v}^n + \varphi), w - v^{n+1}\rangle \ge 0 \ \ \forall w \in D. \tag{2.11.6}$$

Эти неравенства отличаются от аналогичных неравенств (2.10.7), (2.10.8) только тем, что вместо матрицы Φ здесь используется матрица $\Phi + B$. Поэтому все рассуждения предыдущей теоремы, начиная с (2.10.9) и до (2.10.12) включительно, проведенные относительно неравенств (2.11.5), (2.11.6), приводят к неравенству, аналогичному (2.10.12):

$$\begin{gathered}\langle v^{n+1} - v^n, v^* - v^{n+1}\rangle + \langle \bar{v}^n - v^n, v^{n+1} - \bar{v}^n\rangle + \alpha\langle B\bar{v}^n, v^* - \bar{v}^n\rangle + \\ +\alpha\langle \Phi\bar{v}^n + \varphi, v^* - \bar{v}^n\rangle + (\alpha|\Phi + B|)^2|v^n - \bar{v}^n|^2 \ge 0.\end{gathered} \tag{2.11.7}$$

Преобразуем третье слагаемое в этом неравенстве. Для этого используем тождество, в котором предполагается, что матрица B симметричная и положительно полуопределенная:

$$\langle Bw, w\rangle = \langle Bv, v\rangle + 2\langle Bv, w - v\rangle + \langle B(w - v), w - v\rangle.$$

Тогда при $v = \bar{v}^n, w = v^*$ имеем

$$\langle B\bar{v}^n, v^* - \bar{v}^n\rangle \le (1/2)(\langle B\bar{v}^*, \bar{v}^*\rangle - \langle B\bar{v}^n, \bar{v}^n\rangle).$$

С учетом полученной оценки перепишем неравенство (2.11.7) в виде

$$\begin{gathered}\langle v^{n+1} - v^n, v^* - v^{n+1}\rangle + \langle \bar{v}^n - v^n, v^{n+1} - \bar{v}^n\rangle + \alpha\langle \Phi\bar{v}^n + \varphi, v^* - \bar{v}^n\rangle + \\ +(\alpha/2)(\langle Bv^*, v^*\rangle - \langle B\bar{v}^n, \bar{v}^n\rangle) + (\alpha|\Phi + B|)^2|v^n - \bar{v}^n|^2 \ge 0.\end{gathered} \tag{2.11.8}$$

Покажем, что квадратичный порядок остроты равновесия обеспечивает сходимость процесса со скоростью геометрической прогрессии.

Теорема 2.11.1. *Если множество решений задачи (2.11.1) непусто и удовлетворяет условию остроты (2.11.2), матрицы $\Phi \ge 0$, $B \ge 0$ положительно полуопределенные, а B симметричная, то последовательность v^n, порожденная методом (2.11.3) с параметром $0 < \alpha < 1/(\sqrt{2}|\Phi + B|)$, сходится к решению равновесной задачи (2.11.1) со скоростью геометрической прогрессии, т.е.*

$$|v^{n+1} - v^*|^2 \le q(\alpha)^{n+1}|v^0 - v^*|^2 \qquad \textit{при} \quad n \to \infty,$$

где

$$q(\alpha) = \Big(1 + 4(\alpha\gamma)^2/d_1 - 2\alpha\gamma\Big) < 1, \qquad d_1 = 1 + 2\alpha\gamma - 2(\alpha|\Phi + B|)^2.$$

Доказательство. Используя условие остроты (2.11.2), оценим третье и четвертое слагаемые в неравенстве (2.11.8); тогда получим

$$\langle v^{n+1} - v^n, v^* - v^{n+1}\rangle + \langle \bar{v}^n - v^n, v^{n+1} - \bar{v}^n\rangle - \alpha\gamma|\bar{v}^n - v^*|^2 + (\alpha|\Phi + B|)^2|v^n - \bar{v}^n|^2 \geq 0. \quad (2.11.9)$$

Скалярные произведения в неравенстве (2.11.9) разложим в сумму квадратов с помощью тождества (2.9.14)

$$|v^{n+1} - v^*|^2 + |v^{n+1} - \bar{v}^n|^2 + d|\bar{v}^n - v^n|^2 + 2\alpha\gamma|\bar{v}^n - v^*|^2 \leq |v^n - v^*|^2, \quad (2.11.10)$$

где $d = 1 - 2(\alpha|\Phi + B|)^2 > 0$, так как $0 < \alpha < 1/(\sqrt{2}|\Phi + B|)$.

С помощью тождества

$$|\bar{v}^n - v^*|^2 = |\bar{v}^n - v^n|^2 + 2\langle \bar{v}^n - v^n, v^n - v^*\rangle + |v^n - v^*|^2$$

преобразуем (2.11.10)

$$|v^{n+1}-v^*|^2+|v^{n+1}-\bar{v}^n|^2+d|\bar{v}^n-v^n|^2+2\alpha\gamma|\bar{v}^n-v^n|^2+4\alpha\gamma\langle\bar{v}^n-v^n, v^n-v^*\rangle+2\alpha\gamma|v^n-v^*|^2 \leq |v^n-v^*|^2$$

или

$$|v^{n+1} - v^*|^2 + |v^{n+1} - \bar{v}^n|^2 + d_1|\bar{v}^n - v^n|^2 + 4\alpha\gamma\langle\bar{v}^n - v^n, v^n - v^*\rangle \leq (1 - 2\alpha\gamma)|v^n - v^*|^2,$$

где $d_1 = 1 + 2\alpha\gamma - 2(\alpha L)^2$. Из третьего и четвертого слагаемых выделим полный квадрат

$$|v^{n+1}-v^*|^2+|v^{n+1}-\bar{v}^n|^2+\left|\sqrt{d_1}(\bar{v}^n - v^n) + \frac{2\alpha\gamma}{\sqrt{d_1}}(v^n - v^*)\right|^2-\frac{4(\alpha\gamma)^2}{d_1}\,|v^n - v^*|^2 \leq (1-2\alpha\gamma)|v^n-v^*|^2.$$

Отсюда

$$|v^{n+1} - v^*|^2 \leq \Big(1 + 4(\alpha\gamma)^2/d_1 - 2\alpha\gamma\Big)\,|v^n - v^*|^2.$$

Поскольку $\alpha < 1/(\sqrt{2}|\Phi + B|)$, то величина

$$q(\alpha) = 1 + 4(\alpha\gamma)^2/d_1 - 2\alpha\gamma = 1 + 2\alpha\gamma((2\alpha\gamma/d_1) - 1) < 1.$$

Здесь $((2\alpha\gamma)/d_1) - 1 < 0$.

Таким образом, $|v^{n+1} - v^*|^2 \leq q(\alpha)|v^n - v^*|^2$, откуда

$$|v^{n+1} - v^*|^2 \leq q(\alpha)^{n+1}|v^0 - v^*|^2.$$

Знаменатель прогрессии $q(\alpha)$ зависит от параметра α. Минимизируя его на отрезке $(0, 1/(\sqrt{2}|\Phi + B|))$, можно выбрать наилучшее значение знаменателя прогрессии. Теорема доказана. □

2.12. Игровые экстраградиентные методы

Рассмотрим билинейную игру двух лиц в общем случае с ненулевой суммой. Решение этой игры — равновесие по Нэшу — представляет собой неподвижную точку системы двух экстремальных включений

$$\begin{aligned} x_1^* &\in \mathrm{Argmin}\{\langle x_1, C_1x_2^* + c_1\rangle + \frac{1}{2}\langle B_1x_1, x_1\rangle \mid x_1 \in X_1\}, \\ x_2^* &\in \mathrm{Argmin}\{\langle C_2x_1^* + c_2, x_2\rangle + \frac{1}{2}\langle B_2x_2, x_2\rangle \mid x_2 \in X_2\}, \end{aligned} \quad (2.12.1)$$

где
$$X_1 = \{x_1 \in \mathbb{R}^{n_1} \mid A_1 x_1 \le a_1,\ x_1 \ge 0\}, \quad X_2 = \{x_2 \in \mathbb{R}^{n_2} \mid A_2 x_2 \le a_2,\ x_2 \ge 0\}.$$
Здесь C_1 — $m \times n$-матрица, а C_2 — $n \times m$-матрица, x_1, c_1 и x_2, c_2 — векторы размерности m и n соответственно, B_1 — $m \times m$-матрица, а B_2 — $n \times n$-матрица, A_1 — $m_1 \times n$-матрица, а A_2 — $m_2 \times n$-матрица.

В (2.12.1) каждому из участников игры приходится решать задачу квадратичного программирования по собственным переменным при фиксированных значениях параметров, которые одновременно являются переменными для каждого из соперников.

Игра двух лиц (2.12.1) представляет собой расщепленную форму равновесной задачи (2.9.1). Необходимые условия этой задачи можно записать в расщепленном виде как в форме вариационного неравенства

$$\langle C_1 x_2^* + c_1 + B_1 x_1^*, x_1 - x_1^* \rangle \ge 0 \ \forall x_1 \in X_1, \quad \langle C_2 x_1^* + c_2 + B_2 x_2^*, x_2 - x_2^* \rangle \ge 0 \ \forall x_2 \in X_2, \quad (2.12.2)$$

так и в форме операторных уравнений

$$x_1^* = \pi_{X_1}(x_1^* - \alpha(C_1 x_2^* + c_1 + B_1 x_1^*)), \quad x_2^* = \pi_{X_2}(x_2^* - \alpha(C_2 x_1^* + c_2 + B_2 x_2^*)), \qquad (2.12.3)$$

где $\pi_{X_i}(\ldots)$, $i = 1, 2,$ — операторы проектирования векторов на множество X_i, $\alpha > 0$ — параметр типа длины шага. Эти условия являются необходимыми и достаточными для игры (2.12.1).

Для решения системы (2.12.3) используем метод экстраградиентного типа, состоящий из двух полушагов:

первый полушаг

$$\bar{x}_1^n = \pi_{X_1}(x_1^n - \alpha(C_1 x_2^n + c_1 + B_1 x_1^n)), \quad \bar{x}_2^n = \pi_{X_2}(x_2^n - \alpha(C_2 x_1^n + c_2 + B_2 x_2^n)), \qquad (2.12.4)$$

второй полушаг

$$x_1^{n+1} = \pi_{X_1}(x_1^n - \alpha(C_1 \bar{x}_2^n + c_1 + B_1 \bar{x}_1^n)), \quad x_2^{n+1} = \pi_{X_2}(x_2^n - \alpha(C_2 \bar{x}_1^n + c_2 + B_2 \bar{x}_2^n)). \qquad (2.12.5)$$

Длина шага α в этом процессе определяется из некоторого условия.

Этот процесс является расщепленной формой метода (2.9.4) и сходимость его, конечно, следует из теоремы 2.9.1. Но по многим причинам представляется важным привести доказательство сходимости игрового процесса (2.12.4), (2.12.5) в расщепленной форме, независимо от доказательства теоремы 2.9.1. В частности, имеются в виду различные обобщения игрового экстраградиентного метода на случай независимого поведения игроков, например, когда каждый из игроков независимо выбирает свою длину шага в экстраградиентном процессе.

Из (2.12.4), (2.12.5) имеем оценки

$$|\bar{x}_1^n - x_1^{n+1}| \le \alpha |C_1(x_2 - \bar{x}_2^n) + B_1(x_1^n - \bar{x}_1^n)|, \quad |\bar{x}_2^n - x_2^{n+1}| \le \alpha |C_2(x_1 - \bar{x}_1^n) + B_2(x_2^n - \bar{x}_2^n)|. \quad (2.12.6)$$

Представим процесс (2.12.4), (2.12.5) в форме вариационных неравенств. Уравнения из (2.12.4) в соответствии с определением оператора проектирования запишем в виде

$$\begin{aligned} &\langle \bar{x}_1^n - x_1^n + \alpha(C_1 x_2^n + c_1 + B_1 x_1^n), x_1 - \bar{x}_1^n \rangle \ge 0 \qquad \forall x_1 \in X_1, \\ &\langle \bar{x}_2^n - x_2^n + \alpha(C_2 x_1^n + c_2 + B_2 x_2^n), x_2 - \bar{x}_2^n \rangle \ge 0 \qquad \forall x_2 \in X_2. \end{aligned} \qquad (2.12.7)$$

Уравнения (2.12.5) представим в форме

$$\begin{aligned} &\langle x_1^{n+1} - x_1^n + \alpha(C_1 \bar{x}_2^n + c_1 + B_1 \bar{x}_1^n), x_1 - x_1^{n+1} \rangle \ge 0 \qquad \forall x_1 \in X_1, \\ &\langle x_2^{n+1} - x_2^n + \alpha(C_2 x_1^n + c_2 + B_2 \bar{x}_2^n), x_2 - x_2^{n+1} \rangle \ge 0 \qquad \forall x_2 \in X_2. \end{aligned} \qquad (2.12.8)$$

Сходимость процесса (2.12.4), (2.12.5) существенно зависит от свойств системных матриц

$$C = \begin{pmatrix} 0 & C_1 \\ C_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}.$$

Для сходимости процесса необходимо, чтобы их сумма была положительно полуопределенной. Это всегда так, поскольку матрица C по крайней мере антисимметрична и тем самым положительно полуопределена, а матрица B симметричная и положительная полуопределенная, так как функции $\langle B_1x_1, x_1\rangle$, $\langle B_2x_2, x_2\rangle$ выпуклые по определению.

Теорема 2.12.1. *Если множество решений задачи (2.12.1) непусто, матрица $C+ +B$ положительно полуопределена, то последовательность x_1^n, x_2^n, порожденная методом (2.12.4), (2.12.5) с выбором длины шага α из условия $\alpha < (1/\sqrt{2}|C+B|)$, сходится монотонно по норме к одному из игровых решений, т.е. $x_1^n, x_2^n \to x_1^*, x_2^*$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Положим $x_1 = x_1^*$, $x_2 = x_2^*$ в (2.12.8); тогда

$$\begin{aligned} &\langle x_1^{n+1} - x_1^n + \alpha(C_1\bar{x}_2^n + c_1 + B_1\bar{x}_1^n), x_1^* - x_1^{n+1}\rangle \geq 0, \\ &\langle x_2^{n+1} - x_2^n + \alpha(C_2x_1^n + c_2 + B_2\bar{x}_2^n), x_2^* - x_2^{n+1}\rangle \geq 0, \end{aligned} \tag{2.12.9}$$

Положим $x_1 = x_1^{n+1}$, $x_2 = x_2^{n+1}$ в (2.12.7)

$$\begin{aligned} &\langle \bar{x}_1^n - x_1^n + \alpha(C_1x_2^n + c_1 + B_1x_1^n), x_1^{n+1} - \bar{x}_1^n\rangle \geq 0, \\ &\langle \bar{x}_2^n - x_2^n + \alpha(C_2x_1^n + c_2 + B_2x_2^n), x_2^{n+1} - \bar{x}_2^n\rangle \geq 0. \end{aligned}$$

Из первого неравенства имеем

$$\begin{aligned} &\langle \bar{x}_1^n - x_1^n, x_1^{n+1} - \bar{x}_1^n\rangle + \alpha\langle C_1\bar{x}_2^n + c_1 + B_1\bar{x}_1^n, x_1^{n+1} - \bar{x}_1^n\rangle - \\ &-\alpha\langle C_1(\bar{x}_2^n - x_2^n) + B_1(\bar{x}_1^n - x_1^n), x_1^{n+1} - \bar{x}_1^n\rangle \geq 0, \end{aligned}$$

или, с учетом (2.12.6),

$$\begin{aligned} &\langle \bar{x}_1^n - x_1^n, x_1^{n+1} - \bar{x}_1^n\rangle + \alpha\langle C_1\bar{x}_2^n + c_1 + B_1\bar{x}_1^n, x_1^{n+1} - \bar{x}_1^n\rangle + \\ &+ \ \alpha^2|C_1(x_2^n - \bar{x}_2^n) + B_1(x_1^n - \bar{x}_1^n)|^2 \geq 0. \end{aligned} \tag{2.12.10}$$

Аналогичное неравенство получим относительно переменной x_2:

$$\begin{aligned} &\langle \bar{x}_2^n - x_2^n, x_2^{n+1} - \bar{x}_2^n\rangle + \alpha\langle C_2\bar{x}_1^n + c_2 + B_2\bar{x}_2^n, x_2^{n+1} - \bar{x}_2^n\rangle + \\ &+ \ \alpha^2|C_2(x_1^n - \bar{x}_1^n) + B_2(x_2^n - \bar{x}_2^n)|^2 \geq 0. \end{aligned} \tag{2.12.11}$$

Сложим системы пар неравенства (2.12.9) и (2.12.10),(2.12.11):

$$\begin{aligned} &\langle x_1^{n+1} - x_1^n, x_1^* - x_1^{n+1}\rangle + \langle \bar{x}_1^n - x_1^n, x_1^{n+1} - \bar{x}_1^n\rangle + \\ &+\langle x_2^{n+1} - x_2^n, x_2^* - x_2^{n+1}\rangle + \langle \bar{x}_2^n - x_2^n, x_2^{n+1} - \bar{x}_2^n\rangle + \\ &+\alpha\langle C_1\bar{x}_2^n + c_1 + B_1\bar{x}_1^n, x_1^* - \bar{x}_1^n\rangle + \alpha\langle C_2\bar{x}_1^n + c_2 + B_2\bar{x}_2^n, x_2^* - \bar{x}_2^n\rangle + \\ &+\alpha^2|C_1(x_2^n - \bar{x}_2^n) + B_1(x_1^n - \bar{x}_1^n)|^2 + \alpha^2|C_2(x_1^n - \bar{x}_1^n) + B_2(x_2^n - \bar{x}_2^n)|^2 \geq 0. \end{aligned} \tag{2.12.12}$$

Положим $x_1 = \bar{x}_1^n$, $x_2 = \bar{x}_2^n$ в неравенствах системы (2.12.2); тогда

$$\langle C_1x_2^* + c_1 + B_1x_1^*, \bar{x}_1^n - x_1^*\rangle \geq 0, \quad \langle C_2x_1^* + c_2 + B_2x_2^*, \bar{x}_2^n - x_2^*\rangle \geq 0.$$

Сложим полученные неравенства с (2.12.12):

$$\begin{aligned}&\langle x_1^{n+1}-x_1^n, x_1^*-x_1^{n+1}\rangle+\langle \bar x_1^n-x_1^n, x_1^{n+1}-\bar x_1^n\rangle+\\ &+\langle x_2^{n+1}-x_2^n, x_2^*-x_2^{n+1}\rangle+\langle \bar x_2^n-x_2^n, x_2^{n+1}-\bar x_2^n\rangle+\\ &+\alpha\langle C_1(\bar x_2^n-x_2^*)+B_1(\bar x_1^n-x_1^*), x_1^*-\bar x_1^n\rangle+\alpha\langle C_2(\bar x_1^n-x_1^*)+B_2(\bar x_2^n-x_2^*), x_2^*-\bar x_2^n\rangle+\\ &+\alpha^2|C_1(x_2^n-\bar x_2^n)+B_1(x_1^n-\bar x_1^n)|^2+\alpha^2|C_2(x_1^n-\bar x_1^n)+B_2(x_2^n-\bar x_2^n)|^2\ge 0.\end{aligned}\tag{2.12.13}$$

Перепишем (2.12.13) в векторно-матричном виде

$$\begin{aligned}&(x_1^{n+1}-x_1^n, x_2^{n+1}-x_2^n)\begin{pmatrix} x_1^*-x_1^{n+1}\\ x_2^*-x_2^{n+1}\end{pmatrix}++(\bar x_1^n-x_1^n,\bar x_2^n-x_2^n)\begin{pmatrix} x_1^{n+1}-\bar x_1^n\\ x_2^{n+1}-\bar x_2^n\end{pmatrix}+\\ &+\alpha(x_1^*-\bar x_1^n, x_2^*-\bar x_2^n)\begin{pmatrix} 0 & C_1\\ C_2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar x_1^n-x_1^*\\ \bar x_2^n-x_2^*\end{pmatrix}+\\ &+\alpha(x_1^*-\bar x_1^n, x_2^*-\bar x_2^n)\begin{pmatrix} B_1 & 0\\ 0 & B_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar x_1^n-x_1^*\\ \bar x_2^n-x_2^*\end{pmatrix}+\\ &+\alpha^2\left|\left\{\begin{pmatrix} B_1 & 0\\ 0 & B_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & C_1\\ C_2 & 0\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} x_1^n-\bar x_1^n\\ x_2^n-\bar x_2^n\end{pmatrix}\right|^2\ge 0.\end{aligned}$$

Введем обозначения для матриц

$$C=\begin{pmatrix} 0 & C_1\\ C_2 & 0\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix} B_1 & 0\\ 0 & B_2\end{pmatrix}$$

и векторов

$$v^*=\begin{pmatrix} x_1^*\\ x_2^*\end{pmatrix},\qquad v=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

и перепишем последнее неравенство в форме

$$\langle v^{n+1}-v^n, v^*-v^{n+1}\rangle+\langle \bar v^n-v^n, v^{n+1}-\bar v^n\rangle++\langle (C+B)(v^*-\bar v^n),\bar v^n-v^*\rangle+\alpha^2|(C+B)(\bar v^n-v^n)|^2\ge 0.$$

С помощью тождества (2.9.14) разложим первых два скалярных произведения в сумму квадратов. Учитывая также положительную полуопределенность матрицы $\Phi+B$, получим

$$|v^{n+1}-v^*|^2+|v^{n+1}-\bar v^n|^2+|\bar v^n-v^n|^2+2\alpha^2|(C+B)(\bar v^n-v^n)|^2\le|v^n-v^*|^2.$$

Отсюда имеем

$$|v^{n+1}-v^*|^2+|v^{n+1}-\bar v^n|^2+(1-2\alpha^2|C+B|^2)|\bar v^n-v^n|^2\le|v^n-v^*|^2.$$

Просуммируем полученное неравенство от $n=0$ до $n=N$

$$|v^{N+1}-v^*|^2+\sum_{k=0}^{k=N}|v^{k+1}-\bar v^k|^2+d\sum_{k=0}^{k=N}|\bar v^k-v^k|^2\le|v^0-v^*|^2,$$

где $d=1-2\alpha^2|C+B|^2>0$ по условию теоремы. Из полученного неравенства следует ограниченность траектории

$$|v^{N+1}-v^*|^2\le|v^0-v^*|^2,$$

а также сходимость рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty}|v^{k+1}-\bar v^k|^2<\infty,\qquad \sum_{k=0}^{\infty}|\bar v^k-v^k|^2<\infty$$

и, следовательно, стремление к нулю величин $|v^{n+1}-\bar{v}^n|^2 \to 0,\ |\bar{v}^n - v^n|^2 \to 0,\ n\to\infty$.

Так как последовательность v^n ограничена, то существует элемент v' такой, что $v^{n_i}\to v'$ при $n_i\to\infty$ и при этом $|v^{n_i+1}-v^{n_i}|^2\to 0$.

Рассмотрим неравенства (2.12.7), (2.12.8) для всех $n_i\to\infty$ и, перейдя к пределу, получим

$$\langle C_1x_2'+c_1+B_1x_1', x_1-x_1'\rangle \geq 0\ \forall x_1\in X_1, \qquad \langle C_2x_1'+c_2+B_2x_2', x_2-x_2'\rangle \geq 0\,\forall x_2\in X_2. \quad (2.12.14)$$

Поскольку эти соотношения совпадают с (2.12.2), то $v' = v^* \in D^*$, т.е. любая предельная точка последовательности v^n является решением задачи. Условие монотонности убывания величины $|v^n - v^*|$ обеспечивает единственность предельной точки, т.е. сходимость $v^n = (x_1^n, x_2^n)\to v^* = (x_1^*, x_2^*)$ при $n\to\infty$. Теорема доказана. $\square$

2.13. Экстраградиентные методы для равновесных задач с функциональными ограничениями

В предыдущих разделах функциональные ограничения при построении методов учитывались с помощью оператора проектирования. При этом предполагалось, что структура допустимого множества достаточно проста (параллелепипед, пересечения шаров) и реализация операции проектирования на допустимое множество не требует большого объема вычислений. Однако ситуация резко меняется, если допустимое множество имеет сложную структуру, например многогранное множество; тогда при построении методов функциональные ограничения разумно учитывать с помощью функции Лагранжа.

Рассмотрим равновесную задачу

$$v^*\in \operatorname{Argmin}\{\langle \Phi v^*+\varphi, w\rangle + (1/2)\langle Bw, w\rangle \mid Aw\leq a,\ w\geq 0\}. \quad (2.13.1)$$

Для учета функциональных ограничений при $v=v^*$ введем функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(v^*, w, p) = \langle \Phi v^*+\varphi, w\rangle + (1/2)\langle Bw, w\rangle + \langle p, Aw-a\rangle$$

для всех $w\geq 0$, $p\geq 0$. Точку v^*, p^* назовем седловой для функции Лагранжа $\mathcal{L}(v^*, w, p)$, если выполняются неравенства

$$\mathcal{L}(v^*, v^*, p)\leq \mathcal{L}(v^*, v^*, p^*)\leq \mathcal{L}(v^*, w, p^*)\quad \forall w\geq 0,\ \forall p\geq 0. \quad (2.13.2)$$

Систему (2.13.2) представим в виде

$$\begin{aligned} &v^*\in \operatorname{Argmin}\{\langle \Phi v^*+\varphi, w\rangle + (1/2)\langle Bw, w\rangle + \langle p^*, Aw-b\rangle \mid w\geq 0\},\\ &p^*\in \operatorname{Argmax}\{\langle p, Av^*-a\rangle \mid p\geq 0\}\end{aligned} \quad (2.13.3)$$

или в форме вариационных неравенств

$$\langle (\Phi+B)v^*+\varphi+A^\top p^*, w-v^*\rangle \geq 0\ \forall w\geq 0, \qquad -\langle Av^*-a, p-p^*\rangle\geq 0\quad \forall p\geq 0. \quad (2.13.4)$$

Полученную систему вариационных неравенств представим в форме операторных уравнений с использованием оператора проектирования

$$v^* = \pi_+(v^*-\alpha((\Phi+B)v^*+\varphi+A^\top p^*)), \qquad p^* = \pi_+(p^*+\alpha(Av^*-a)), \quad (2.13.5)$$

где $\pi_+(\ldots)$ — оператор проектирования некоторого вектора на положительный ортант $\mathbb{R}^n_+$, $\alpha>0$ — параметр типа длины шага.

Для решения системы (2.13.5) используем метод экстраградиентного типа по прямым и двойственным переменным [6]:

$$\begin{array}{lllllll} \bar{p}^n &=& \pi_+(p^n + \alpha_n(Av^n - a)), & \bar{v}^n &=& \pi_+(v^n - \alpha_n((\Phi + B)v^n + \varphi + A^\top \bar{p}^n)), \\ p^{n+1} &=& \pi_+(p^n + \alpha_n(A\bar{v}^n - a)), & v^{n+1} &=& \pi_+(v^n - \alpha_n((\Phi + B)\bar{v}^n + \varphi + A^\top \bar{p}^n)). \end{array} \tag{2.13.6}$$

Длина шага α_n в этом процессе определяется либо из условия

$$0 < \varepsilon_0 \le \alpha_n \le \sqrt{(1-\varepsilon)}/\sqrt{2(|\Phi + B|^2 + |A|^2)}, \tag{2.13.7}$$

либо из условия

$$2\alpha_n^2 \left(|(\Phi + B)(\bar{v}^n - v^n)|^2 + |A(\bar{v}^n - v^n)|^2\right) \le (1-\varepsilon)|\bar{v}^n - v^n|^2. \tag{2.13.8}$$

В этом методе предлагается два способа выбора параметра α_n: из условия (2.13.7) или из условия (2.13.8). Реализация первого способа очень проста, но для того чтобы вычислить правую границу интервала, требуется знание априорной информации о нормах матриц $|\Phi{+}B|$ и $|A|$. Во многих случаях эта информация неизвестна или ее трудно априори оценить. Во втором способе выбора параметра α_n механизм оценки этой информации фактически вложен в сам метод. Дифференциальный аналог метода (2.13.6) – (2.13.8) обоснован в [41].

Для обоснования корректности способа выбора параметра α_n из условий (2.13.7) и (2.13.8) получим оценку отклонения векторов $\bar{v}^n$, v^{n+1} и $\bar{p}^n$, p^{n+1} из (2.13.6):

$$|\bar{p}^n - p^{n+1}| \le \alpha_n |A(v^n - \bar{v}^n)|, \qquad |\bar{v}^n - v^{n+1}| \le \alpha_n |(\Phi + B)(v^n - \bar{v}^n)|. \tag{2.13.9}$$

С учетом (2.13.9) имеем оценку

$$|(\Phi + B)(\bar{v}^n - v^n)|^2 + |A(\bar{v}^n - v^n)|^2 \le (|\Phi + B|^2 + |A|^2)|\bar{v}^n - v^n|^2.$$

Очевидно, что всегда можно выбрать параметр α_n так, что выполнено условие $2\alpha_n^2|\Phi + B|^2 + |A|^2 \le (1-\varepsilon)$, т.е.

$$2\alpha_n^2 \le (1-\varepsilon)/(|\Phi + B|^2 + |A|^2).$$

Это означает, что всегда существует α_n, удовлетворяющее оценке (2.13.8).

Представим этот процесс в форме вариационных неравенств. Первое и третье уравнение из (2.13.6) в соответствии с определением оператора проектирования запишем в виде

$$\langle \bar{p}^n - p^n - \alpha_n(Av^n - a), p - \bar{p}^n \rangle \ge 0 \tag{2.13.10}$$

и

$$\langle p^{n+1} - p^n - \alpha_n(A\bar{v}^n - a), p - p^{n+1} \rangle \ge 0 \tag{2.13.11}$$

для всех $p \ge 0$. Второе и четвертое уравнения представим в форме

$$\langle \bar{v}^n - v^n + \alpha_n((\Phi + B)v^n + \varphi + A^\top \bar{p}^n), w - \bar{v}^n \rangle \ge 0 \tag{2.13.12}$$

и

$$\langle v^{n+1} - v^n + \alpha_n((\Phi + B)\bar{v}^n + \varphi + A^\top \bar{p}^n), w - v^{n+1} \rangle \ge 0 \tag{2.13.13}$$

для всех $w \ge 0$. Покажем, что процесс (2.13.6) сходится монотонно по норме к одному из равновесных решений.

Теорема 2.13.1. *Если множество решений задачи (2.13.1) непусто, матрица $\Phi + B$ положительно полуопределена, то последовательность v^n, порожденная методом (2.13.6)* *с выбором параметра α_n способом (2.13.7) или (2.13.8), сходится монотонно по норме к одному из равновесных решений, т.е. $v^n \to v^* \in D^*$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Положим $w = v^*$ в (2.13.13); тогда

$$\langle v^{n+1} - v^n, v^* - v^{n+1}\rangle + \alpha_n\langle(\Phi + B)\bar{v}^n + \varphi + A^\top\bar{p}^n, v^* - v^{n+1}\rangle \geq 0. \tag{2.13.14}$$

Положим $w = v^{n+1}$ в (2.13.12)

$$\langle\bar{v}^n - v^n + \alpha_n((\Phi + B)v^n + \varphi + A^\top\bar{p}^n), v^{n+1} - \bar{v}^n\rangle \geq 0.$$

Отсюда

$$\begin{gathered}\langle\bar{v}^n - v^n, v^{n+1} - \bar{v}^n\rangle + \alpha_n\langle(\Phi + B)\bar{v}^n + \varphi, v^{n+1} - \bar{v}^n\rangle - \\ -\alpha_n\langle(\Phi + B)(\bar{v}^n - v^n), v^{n+1} - \bar{v}^n\rangle + \alpha_n\langle A^\top\bar{p}^n, v^{n+1} - \bar{v}^n\rangle \geq 0\end{gathered}$$

или, с учетом (2.13.9),

$$\begin{gathered}\langle\bar{v}^n - v^n, v^{n+1} - \bar{v}^n\rangle + \alpha_n\langle(\Phi + B)\bar{v}^n + \varphi, v^{n+1} - \bar{v}^n\rangle + \\ + \alpha_n\langle A^\top\bar{p}^n, v^{n+1} - \bar{v}^n\rangle + \alpha_n^2|(\Phi + B)(\bar{v}^n - v^n)|^2 \geq 0.\end{gathered} \tag{2.13.15}$$

Сложим неравенства (2.13.14) и (2.13.15):

$$\begin{gathered}\langle v^{n+1} - v^n, v^* - v^{n+1}\rangle + \langle\bar{v}^n - v^n, v^{n+1} - \bar{v}^n\rangle + \alpha_n\langle(\Phi + B)\bar{v}^n + \\ +\varphi, v^* - \bar{v}^n\rangle + \alpha_n\langle A^\top\bar{p}^n, v^* - \bar{v}^n\rangle + \alpha_n^2|(\Phi + B)(\bar{v}^n - v^n)|^2 \geq 0.\end{gathered} \tag{2.13.16}$$

Учитывая, что $\langle\bar{p}^n, Av^* - b\rangle \leq 0$, преобразуем отдельно четвертый член из (2.13.16)

$$\langle A^\top\bar{p}^n, v^* - \bar{v}^n\rangle = \langle\bar{p}^n, Av^* - a + a - A\bar{v}^n\rangle \leq \langle\bar{p}^n, a - A\bar{v}^n\rangle;$$

тогда

$$\begin{gathered}\langle v^{n+1} - v^n, v^* - v^{n+1}\rangle + \langle\bar{v}^n - v^n, v^{n+1} - \bar{v}^n\rangle + \alpha_n\langle(\Phi + B)\bar{v}^n + \\ +\varphi, v^* - \bar{v}^n\rangle + \alpha_n\langle\bar{p}^n, a - A\bar{v}^n\rangle + \alpha_n^2|(\Phi + B)(\bar{v}^n - v^n)|^2 \geq 0.\end{gathered}$$

Положим $w = \bar{v}^n$ в первом неравенстве (2.13.4); тогда

$$\langle(\Phi + B)v^* + \varphi, \bar{v}^n - v^*\rangle + \langle p^*, A\bar{v}^n - a + a - Av^*\rangle \geq 0$$

или

$$\langle(\Phi + B)v^* + \varphi, \bar{v}^n - v^*\rangle + \langle p^*, A\bar{v}^n - a\rangle \geq 0.$$

Сложим полученные неравенства

$$\begin{gathered}\langle v^{n+1} - v^n, v^* - v^{n+1}\rangle + \langle\bar{v}^n - v^n, v^{n+1} - \bar{v}^n\rangle + \\ +\alpha_n\langle(\Phi + B)\bar{v}^n - (\Phi + B)v^*, v^* - \bar{v}^n\rangle + \\ +\alpha_n\langle\bar{p}^n - p^*, a - A\bar{v}^n\rangle + \alpha_n^2|(\Phi + B)(\bar{v}^n - v^n)|^2 \geq 0.\end{gathered} \tag{2.13.17}$$

Рассмотрим неравенства (2.13.10) и (2.13.11). Положим $p = p^*$ в (2.13.11)

$$\langle p^{n+1} - p^n, p^* - p^{n+1}\rangle - \alpha_n\langle A\bar{v}^n - a, p^* - p^{n+1}\rangle \geq 0 \tag{2.13.18}$$

и $p = p^{n+1}$ в (2.13.10):

$$\langle\bar{p}^n - p^n, p^{n+1} - \bar{p}^n\rangle + \alpha_n\langle A(\bar{v}^n - v^n), p^{n+1} - \bar{p}^n\rangle - \alpha_n\langle A\bar{v}^n - a, p^{n+1} - \bar{p}^n\rangle \geq 0. \tag{2.13.19}$$

Сложим оба неравенства

$$\langle p^{n+1}-p^n, p^*-p^{n+1}\rangle+\langle \bar{p}^n-p^n, p^{n+1}-\bar{p}^n\rangle+\alpha_n\langle A(\bar{v}^n-v^n), p^{n+1}-\bar{p}^n\rangle-\alpha_n\langle A\bar{v}^n-a, p^*-\bar{p}^n\rangle\geq 0.$$

Используя (2.13.9), перепишем последнее неравенство в виде

$$\langle p^{n+1}-p^n, p^*-p^{n+1}\rangle+\langle \bar{p}^n-p^n, p^{n+1}-\bar{p}^n\rangle+\alpha_n^2|A(\bar{v}^n-v^n)|^2-\alpha_n\langle A\bar{v}^n-a, p^*-\bar{p}^n\rangle\geq 0. \quad (2.13.20)$$

Сложим неравенства (2.13.17) и (2.13.20), при этом учтем положительную полуопределенность оператора $\langle(\Phi+B)v, v\rangle\geq 0\ \ \forall v\geq 0$

$$\begin{gathered}\langle v^{n+1}-v^n, v^*-v^{n+1}\rangle+\langle \bar{v}^n-v^n, v^{n+1}-\bar{v}^n\rangle+\langle p^{n+1}-p^n, p^*-p^{n+1}\rangle+\\+\langle \bar{p}^n-p^n, p^{n+1}-\bar{p}^n\rangle+\alpha_n^2\left(|(\Phi+B)(\bar{v}^n-v^n)|^2+|A(\bar{v}^n-v^n)|^2\right)\geq 0.\end{gathered}$$

С помощью тождества (2.9.14) четыре первых скалярных произведения представим в виде суммы квадратов

$$\begin{gathered}|v^{n+1}-v^*|^2+|p^{n+1}-p^*|^2+|v^{n+1}-\bar{v}^n|^2+|\bar{v}^n-v^n|^2+|p^{n+1}-\bar{p}^n|^2+|\bar{p}^n-p^n|^2+\\2\alpha_n^2\left(|(\Phi+B)(\bar{v}^n-v^n)|^2+|A(\bar{v}^n-v^n)|^2\right)\leq|v^n-v^*|^2+|p^n-p^*|^2.\end{gathered}$$

В силу (2.10.17) полученное неравенство представим в форме

$$\begin{gathered}|v^{n+1}-v^*|^2+|p^{n+1}-p^*|^2+(1/2)|p^{n+1}-p^n|^2+|v^{n+1}-\bar{v}^n|^2+|\bar{v}^n-v^n|^2-\\-2\alpha_n^2\left(|(\Phi+B)(\bar{v}^n-v^n)|^2+|A(\bar{v}^n-v^n)|^2\right)\leq|v^n-v^*|^2+|p^n-p^*|^2.\end{gathered}\quad(2.13.21)$$

В полученном неравенстве сумму пятого и шестого слагаемых оценим с помощью (2.13.8); тогда

$$\begin{aligned}|v^{n+1}-v^*|^2\ &+\ |p^{n+1}-p^*|^2+(1/2)|p^{n+1}-p^n|^2+|v^{n+1}-\bar{v}^n|^2+\varepsilon|\bar{v}^n-v^n|^2\leq\\&\leq\ |v^n-v^*|^2+|p^n-p^*|^2.\end{aligned}\quad(2.13.22)$$

Если же в процессе (2.13.6) длина шага α_n выбирается из условия (2.13.7), то шестой член в (2.13.21) оценим как

$$|(\Phi+B)(\bar{v}^n-v^n)|^2+|A(\bar{v}^n-v^n)|^2\leq(|(\Phi+B)|^2+|A|^2)|\bar{v}^n-v^n|^2;$$

тогда

$$\begin{gathered}|v^{n+1}-v^*|^2+|p^{n+1}-p^*|^2+(1/2)|p^{n+1}-p^n|^2+|v^{n+1}-\bar{v}^n|^2+\\+(1-2\alpha_n^2(|\Phi+B|^2+|A|^2))|\bar{v}^n-v^n|^2\leq|v^n-v^*|^2+|p^n-p^*|^2.\end{gathered}\quad(2.13.23)$$

Так как $1-2\alpha_n^2(|\Phi+B|^2+|A|^2)\geq\varepsilon$ по условию (2.13.7), получим неравенство, которое имеет вид (2.13.22). Таким образом, независимо от способа выбора длины шага α_n мы в любом случае приходим к неравенству (2.13.22). Просуммируем (2.13.22) от $n=0$ до $n=N$:

$$|v^{N+1}-v^*|^2+|p^{N+1}-p^*|^2+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{k=N}|p^{k+1}-p^k|^2+\sum_{k=0}^{k=N}|v^{k+1}-v^k|^2+\varepsilon\sum_{k=0}^{k=N}|\bar{v}^k-v^k|^2\leq|v^0-v^*|^2+|p^0-p^*|^2.$$

Из полученного неравенства следует ограниченность траектории

$$|v^{N+1}-v^*|^2+|p^{N+1}-p^*|^2\leq|v^0-v^*|^2+|p^0-p^*|^2,$$

а также сходимость рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty} |v^{k+1} - v^k|^2 < \infty, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} |p^{k+1} - p^k|^2 < \infty$$

и, следовательно, стремление к нулю величин

$$|v^{n+1} - v^n|^2 \to 0, \qquad |p^{n+1} - p^n|^2 \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Так как последовательность v^n, p^n ограничена, то существует элемент v', p' такой, что $v^{n_i} \to v'$, $p^{n_i} \to p'$ при $n_i \to \infty$ и при этом

$$|v^{n_i+1} - v^{n_i}|^2 \to 0, \qquad |p^{n_i+1} - p^{n_i}|^2 \to 0.$$

Рассмотрим неравенства (2.13.10) – (2.13.13) для всех $n_i \to \infty$ и, перейдя к пределу, получим

$$\langle (\Phi + B)v' + \varphi + A^\top p', w - v' \rangle \geq 0, \quad -\langle Av' - a, p - p' \rangle \geq 0 \ \ \forall p \geq 0.$$

Поскольку эти соотношения совпадают с (2.13.4), то $v' = v^* \in D^*$, $p' = p^* \geq 0$, т.е. любая предельная точка последовательности v^n, p^n является решением задачи. Условие монотонности убывания величины $|v^n - v^*| + |p^n - p^*|$ обеспечивает единственность предельной точки, т.е. сходимость $v^n \to v^*$, $p^n \to p^*$ при $n \to \infty$. Теорема доказана. $\square$

2.14. Игровые экстраградиентные методы с учетом ограничений с помощью функции Лагранжа

Рассмотрим билинейную игру двух лиц с равновесием по Нэшу [16] и, в общем случае, с ненулевой суммой

$$\begin{aligned} x_1^* &\in \operatorname{Argmin}\{\langle x_1, C_1 x_2^* + c_1 \rangle + (1/2)\langle B_1 x_1, x_1 \rangle \mid A_1 x_1 \leq a_1, x_1 \geq 0\}, \\ x_2^* &\in \operatorname{Argmin}\{\langle C_2 x_1^* + c_2, x_2 \rangle + (1/2)\langle B_2 x_2, x_2 \rangle \mid A_2 x_2 \leq a_2, x_2 \geq 0\}. \end{aligned} \tag{2.14.1}$$

Каждому из участников этой игры приходится решать задачи квадратичного программирования по собственным переменным при фиксированных значениях параметров, которые одновременно являются переменными для каждого из соперников. Для учета функциональных ограничений для каждого из игроков при $v = v^* = (x_1^*, x_2^*)$ введем функции Лагранжа

$$\mathcal{L}_1(x_1, x_2^*, p_1) = \langle x_1, C_1 x_2^* + c_1 \rangle + (1/2)\langle B_1 x_1, x_1 \rangle + \langle p_1, A_1 x_1 - a_1 \rangle$$

— для всех $x_1 \geq 0$, $p_1 \geq 0$ и

$$\mathcal{L}_2(x_1^*, x_2, p_2) = \langle C_2 x_1^* + c_2, x_2 \rangle + (1/2)\langle B_2 x_2, x_2 \rangle + \langle p_2, A_2 x_2 - a_2 \rangle$$

— для всех $x_2 \geq 0$, $p_2 \geq 0$. Точки x_1^*, p_1^* и x_2^*, p_2^* назовем седловыми для функций Лагранжа $\mathcal{L}_1(x_1, x_2^*, p_1)$ и $\mathcal{L}_2(x_1^*, x_2, p_2)$, если выполняются неравенства

$$\mathcal{L}_1(x_1^*, x_2^*, p_1) \leq \mathcal{L}_1(x_1^*, x_2^*, p_1^*) \leq \mathcal{L}_1(x_1, x_2^*, p_1^*) \quad \forall x_1 \geq 0, \ \forall p_1 \geq 0, \tag{2.14.2}$$

$$\mathcal{L}_2(x_1^*, x_2^*, p_2) \leq \mathcal{L}_2(x_1^*, x_2^*, p_2^*) \leq \mathcal{L}_2(x_1^*, x_2, p_2^*) \quad \forall x_2 \geq 0, \ \forall p_2 \geq 0. \tag{2.14.3}$$

Систему неравенств (2.14.2), (2.14.3) можно записать в виде системы задач

$$\begin{aligned} x_1^* &\in \operatorname{Argmin}\{\langle x_1, C_1 x_2^* + c_1 \rangle + (1/2)\langle B_1 x_1, x_1 \rangle + \langle p_1^*, A_1 x_1 - a_1 \rangle \mid x_1 \geq 0\}, \\ p_1^* &\in \operatorname{Argmax}\{\langle p_1, A_1 x_1^* - a_1 \rangle \mid p_1 \geq 0\}, \end{aligned} \tag{2.14.4}$$

$$
\begin{aligned}
&x_2^* \in \mathrm{Argmin}\{\langle x_2, C_2x_1^* + c_2\rangle + (1/2)\langle B_2x_2, x_2\rangle + \langle p_2^*, A_2x_2 - a_2\rangle \mid x_2 \geq 0\},\\
&p_2^* \in \mathrm{Argmax}\{\langle p_2, A_2x_2^* - a_2\rangle \mid p_2 \geq 0\}
\end{aligned}
\tag{2.14.5}
$$

или в форме вариационных неравенств

$$
\begin{array}{ll}
\langle C_1x_2^* + c_1 + B_1x_1^* + A_1^\top p_1^*, x_1 - x_1^*\rangle \geq 0 & \forall x_1 \geq 0,\\
-\langle A_1x_1^* - a_1, p_1 - p_1^*\rangle \geq 0 & \forall p_1 \geq 0,\\
\langle C_2x_1^* + c_2 + B_2x_2^* + A_2^\top p_2^*, x_2 - x_2^*\rangle \geq 0 & \forall x_2 \geq 0,\\
-\langle A_2x_2^* - a_2, p_2 - p_2^*\rangle \geq 0 & \forall p_2 \geq 0.
\end{array}
\tag{2.14.6}
$$

Полученную систему вариационных неравенств с использованием оператора проектирования представим в форме операторных уравнений

$$
\begin{array}{rcl}
x_1^* &=& \pi_+(x_1^* - \alpha(C_1x_2^* + c_1 + B_1x_1^* + A_1^\top p_1^*)),\\
p_1^* &=& \pi_+(p_1^* + \alpha(A_1x_1^* - a_1)),\\
x_2^* &=& \pi_+(x_2^* - \alpha(C_2x_1^* + c_2 + B_2x_2^* + A_2^\top p_2^*)),\\
p_2^* &=& \pi_+(p_2^* + \alpha(A_2x_2^* - a_2)),
\end{array}
\tag{2.14.7}
$$

где $\pi_+(\ldots)$ — оператор проектирования некоторого вектора на положительный ортант $\mathbb{R}^n_+$, $\alpha > 0$ — параметр типа длины шага.

Для решения системы (2.14.7) используем метод экстраградиентного типа по прямым и двойственным переменным, состоящим из двух полушагов:

первый полушаг

$$
\begin{array}{rcl}
\bar{p}_1^n &=& \pi_+(p_1^n + \alpha(A_1x_1^n - a_1)),\\
\bar{x}_1^n &=& \pi_+(x_1^n - \alpha(C_1x_2^n + c_1 + B_1x_1^n + A_1^\top \bar{p}_1^n)),\\
\bar{p}_2^n &=& \pi_+(p_2^n + \alpha(A_2x_2^n - a_2)),\\
\bar{x}_2^n &=& \pi_+(x_2^n - \alpha(C_2x_1^n + c_2 + B_2x_2^n + A_2^\top \bar{p}_2^n)),
\end{array}
\tag{2.14.8}
$$

второй полушаг

$$
\begin{array}{rcl}
p_1^{n+1} &=& \pi_+(p_1^n + \alpha(A_1\bar{x}_1^n - a_1)),\\
x_1^{n+1} &=& \pi_+(x_1^n - \alpha(C_1\bar{x}_2^n + c_1 + B_1\bar{x}_1^n + A_1^\top \bar{p}_1^n)),\\
p_2^{n+1} &=& \pi_+(p_2^n + \alpha(A_2\bar{x}_2^n - a_2)),\\
x_2^{n+1} &=& \pi_+(x_2^n - \alpha(C_2\bar{x}_1^n + c_2 + B_2\bar{x}_2^n + A_2^\top \bar{p}_2^n)).
\end{array}
\tag{2.14.9}
$$

Длина шага α в процессе (2.14.8), (2.14.9) определяется из условия

$$
0 < \varepsilon_0 \leq \alpha < 1/\sqrt{2(|C + B|^2 + |A|^2)}, \qquad \varepsilon_0 > 0. \tag{2.14.10}
$$

Для обоснования корректности способа выбора параметра α из условий (2.14.10) получим оценку отклонения векторов $\bar{x}_1^n$, $\bar{x}_2^n$ и x_1^{n+1}, x_2^{n+1} и $\bar{p}_1^n$, $\bar{p}_2^n$ и p_1^{n+1}, p_2^{n+1} из (2.14.8), (2.14.9)

$$
\begin{array}{rcl}
|\bar{p}_1^n - p_1^{n+1}| &\leq& \alpha|A_1(x_1^n - \bar{x}_1^n)|,\\
|\bar{p}_2^n - p_2^{n+1}| &\leq& \alpha|A_2(x_2^n - \bar{x}_2^n)|,\\
|\bar{x}_1^n - x_1^{n+1}| &\leq& \alpha|C_1(x_2^n - \bar{x}_2^n) + B_1(x_1^n - \bar{x}_1^n)|,\\
|\bar{x}_2^n - x_2^{n+1}| &\leq& \alpha|C_2(x_1^n - \bar{x}_1^n) + B_2(x_2^n - \bar{x}_2^n)|.
\end{array}
\tag{2.14.11}
$$

Представим этот процесс в форме вариационных неравенств. Уравнения из (2.14.8) в соответствии с определением оператора проектирования запишем в виде

$$\begin{aligned}&\langle \bar{p}_1^n - p_1^n - \alpha(A_1 x_1^n - a_1), p_1 - \bar{p}_1^n \rangle \geq 0 \quad \forall p_1 \geq 0,\\ &\langle \bar{p}_2^n - p_2^n - \alpha(A_2 x_2^n - a_2), p_2 - \bar{p}_2^n \rangle \geq 0 \quad \forall p_2 \geq 0\end{aligned} \tag{2.14.12}$$

и

$$\begin{aligned}&\langle \bar{x}_1^n - x_1^n + \alpha(C_1 x_2^n + c_1 + B_1 x_1^n + A_1^\top \bar{p}_1^n), x_1 - \bar{x}_1^n \rangle \geq 0 \;\; \forall x_1 \geq 0,\\ &\langle \bar{x}_2^n - x_2^n + \alpha(C_2 x_1^n + c_2 + B_2 x_2^n + A_2^\top \bar{p}_2^n), x_2 - \bar{x}_2^n \rangle \geq 0 \;\; \forall x_2 \geq 0.\end{aligned} \tag{2.14.13}$$

Уравнения (2.14.9) представим в форме

$$\begin{aligned}&\langle p_1^{n+1} - p_1^n - \alpha(A_1 \bar{x}_1^n - a_1), p_1 - p_1^{n+1} \rangle \geq 0 \;\; \forall p_1 \geq 0,\\ &\langle p_2^{n+1} - p_2^n - \alpha(A_2 \bar{x}_2^n - a_2), p_2 - p_2^{n+1} \rangle \geq 0 \;\; \forall p_2 \geq 0\end{aligned} \tag{2.14.14}$$

и

$$\begin{aligned}&\langle x_1^{n+1} - x_1^n + \alpha(C_1 \bar{x}_2^n + c_1 + B_1 \bar{x}_1^n + A_1^\top \bar{p}_1^n), x_1 - x_1^{n+1} \rangle \geq 0 \;\; \forall x_1 \geq 0,\\ &\langle x_2^{n+1} - x_2^n + \alpha(C_2 x_1^n + c_2 + B_2 \bar{x}_2^n + A_2^\top \bar{p}_2^n), x_2 - x_2^{n+1} \rangle \geq 0 \;\; \forall x_2 \geq 0.\end{aligned} \tag{2.14.15}$$

Доказательство сходимости метода (2.14.8), (2.14.9) следует из теоремы 2.13.1. Однако представляется полезным дать независимое, игровое доказательство сходимости этого процесса, имея в виду его различные игровые обобщения, например, на случай, когда оба игрока независимо друг от друга выбирают свою собственную длину шага α. Покажем, что процесс (2.14.8), (2.14.9) сходится монотонно по норме к одному из равновесных решений.

Теорема 2.14.1. *Если множество решений задачи (2.14.1) непусто, в равновесном состоянии функция Лагранжа каждого из игроков имеет седловую точку, матрица $C + B$ положительно полуопределена, то последовательность x_1^n, x_2^n, p_1^n, p_2^n, порожденная методом (2.14.8), (2.14.9) с выбором параметра α из условия (2.14.10), сходится монотонно по норме к одному из равновесных решений, т.е. $x_1^n, x_2^n, p_1^n, p_2^n \to x_1^*, x_2^*, p_1^*, p_2^*$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Положим $x_1 = x_1^*$, $x_2 = x_2^*$ в (2.14.15); тогда

$$\begin{aligned}&\langle x_1^{n+1} - x_1^n + \alpha(C_1 \bar{x}_2^n + c_1 + B_1 \bar{x}_1^n + A_1^\top \bar{p}_1^n), x_1^* - x_1^{n+1} \rangle \geq 0,\\ &\langle x_2^{n+1} - x_2^n + \alpha(C_2 x_1^n + c_2 + B_2 \bar{x}_2^n + A_2^\top \bar{p}_2^n), x_2^* - x_2^{n+1} \rangle \geq 0.\end{aligned} \tag{2.14.16}$$

Положим $x_1 = x_1^{n+1}$, $x_2 = x_2^{n+1}$ в (2.14.13):

$$\begin{aligned}&\langle \bar{x}_1^n - x_1^n + \alpha(C_1 x_2^n + c_1 + B_1 x_1^n + A_1^\top \bar{p}_1^n), x_1^{n+1} - \bar{x}_1^n \rangle \geq 0,\\ &\langle \bar{x}_2^n - x_2^n + \alpha(C_2 x_1^n + c_2 + B_2 x_2^n + A_2^\top \bar{p}_2^n), x_2^{n+1} - \bar{x}_2^n \rangle \geq 0.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}&\langle \bar{x}_1^n - x_1^n, x_1^{n+1} - \bar{x}_1^n \rangle + \alpha \langle C_1 \bar{x}_2^n + c_1 + B_1 \bar{x}_1^n, x_1^{n+1} - \bar{x}_1^n \rangle -\\ &-\alpha \langle C_1(\bar{x}_2^n - x_2^n) + B_1(\bar{x}_1^n - x_1^n), x_1^{n+1} - \bar{x}_1^n \rangle + \alpha \langle A_1^\top \bar{p}_1^n, x_1^{n+1} - \bar{x}_1^n \rangle \geq 0,\end{aligned}$$

или, с учетом (2.14.11),

$$\begin{aligned}&\langle \bar{x}_1^n - x_1^n, x_1^{n+1} - \bar{x}_1^n \rangle + \alpha \langle C_1 \bar{x}_2^n + c_1 + B_1 \bar{x}_1^n, x_1^{n+1} - \bar{x}_1^n \rangle +\\ &+\alpha \langle A_1^\top \bar{p}_1^n, x_1^{n+1} - \bar{x}_1^n \rangle + \alpha^2 |C_1(\bar{x}_2^n - x_2^n) + B_1(\bar{x}_1^n - x_1^n)|^2 \geq 0.\end{aligned} \tag{2.14.17}$$

Аналогичное неравенство получим для переменных x_2:

$$\begin{aligned}&\langle \bar{x}_2^n - x_2^n, x_2^{n+1} - \bar{x}_2^n \rangle + \alpha \langle C_2 \bar{x}_1^n + c_2 + B_2 \bar{x}_2^n, x_2^{n+1} - \bar{x}_2^n \rangle +\\ &+\alpha \langle A_2^\top \bar{p}_2^n, x_2^{n+1} - \bar{x}_2^n \rangle + \alpha^2 |C_2(\bar{x}_1^n - x_1^n) + B_2(\bar{x}_2^n - x_2^n)|^2 \geq 0.\end{aligned} \tag{2.14.18}$$

Сложим системы пар неравенств (2.14.16), (2.14.17) и (2.14.18):

$$\begin{aligned}
&\langle x_1^{n+1} - x_1^n, x_1^* - x_1^{n+1}\rangle + \langle \bar{x}_1^n - x_1^n, x_1^{n+1} - \bar{x}_1^n\rangle +\\
&+\langle x_2^{n+1} - x_2^n, x_2^* - x_2^{n+1}\rangle + \langle \bar{x}_2^n - x_2^n, x_2^{n+1} - \bar{x}_2^n\rangle +\\
&+\alpha\langle C_1\bar{x}_2^n + c_1 + B_1\bar{x}_1^n, x_1^* - \bar{x}_1^n\rangle +\\
&+\alpha\langle C_2\bar{x}_1^n + c_2 + B_2\bar{x}_2^n, x_2^* - \bar{x}_2^n\rangle +\\
&+\alpha\langle A_1^\top\bar{p}_1^n, x_1^* - \bar{x}_1^n\rangle + \alpha\langle A_2^\top\bar{p}_2^n, x_2^* - \bar{x}_2^n\rangle +\\
&+\alpha^2|C_1(\bar{x}_2^n - x_2^n) + B_1(\bar{x}_1^n - x_1^n)|^2 +\\
&+\alpha^2|C_2(\bar{x}_1^n - x_1^n) + B_2(\bar{x}_2^n - x_2^n)|^2 \ge 0.
\end{aligned} \tag{2.14.19}$$

Учитывая, что $\langle \bar{p}_1^n, A_1x_1^* - a_1\rangle \le 0$, $\langle \bar{p}_2^n, A_2x_2^* - a_2\rangle \le 0$, преобразуем отдельно седьмое и восьмое слагаемые из (2.14.19):

$$\langle A_1^\top\bar{p}_1^n, x_1^* - \bar{x}_1^n\rangle = \langle \bar{p}_1^n, A_1x_1^* - a_1 + a_1 - A_1\bar{x}_1^n\rangle \le \langle \bar{p}_1^n, a_1 - A_1\bar{x}_1^n\rangle$$

и аналогично

$$\langle A_2^\top\bar{p}_2^n, x_2^* - \bar{x}_2^n\rangle \le \langle \bar{p}_2^n, a_2 - A_2\bar{x}_2^n\rangle;$$

тогда

$$\begin{aligned}
&\langle x_1^{n+1} - x_1^n, x_1^* - x_1^{n+1}\rangle + \langle \bar{x}_1^n - x_1^n, x_1^{n+1} - \bar{x}_1^n\rangle +\\
&+\langle x_2^{n+1} - x_2^n, x_2^* - x_2^{n+1}\rangle + \langle \bar{x}_2^n - x_2^n, x_2^{n+1} - \bar{x}_2^n\rangle +\\
&+\alpha\langle C_1\bar{x}_2^n + c_1 + B_1\bar{x}_1^n, x_1^* - \bar{x}_1^n\rangle +\\
&+\alpha\langle C_2\bar{x}_1^n + c_2 + B_2\bar{x}_2^n, x_2^* - \bar{x}_2^n\rangle +\\
&+\alpha\langle \bar{p}_1^n, a_1 - A_1\bar{x}_1^n\rangle + \alpha\langle \bar{p}_2^n, a_2 - A_2\bar{x}_2^n\rangle +\\
&+\alpha^2|C_1(\bar{x}_2^n - x_2^n) + B_1(\bar{x}_1^n - x_1^n)|^2 +\\
&+\alpha^2|C_2(\bar{x}_1^n - x_1^n) + B_2(\bar{x}_2^n - x_2^n)|^2 \ge 0.
\end{aligned} \tag{2.14.20}$$

Положим $x_1 = \bar{x}_1^n$, $x_2 = \bar{x}_2^n$ в первом и третьем неравенствах системы (2.14.6); тогда

$$\begin{aligned}
&\langle C_1x_2^* + c_1 + B_1x_1^*, \bar{x}_1^n - x_1^*\rangle + \langle p_1^*, A_1\bar{x}_1^n - a_1 + a_1 - A_1x_1^*\rangle \ge 0,\\
&\langle C_2x_1^* + c_2 + B_2x_2^*, \bar{x}_2^n - x_2^*\rangle + \langle p_2^*, A_2\bar{x}_2^n - a_2 + a_2 - A_2x_2^*\rangle \ge 0
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
&\langle C_1x_2^* + c_1 + B_1x_1^*, \bar{x}_1^n - x_1^*\rangle + \langle p_1^*, A_1\bar{x}_1^n - a_1\rangle \ge 0,\\
&\langle C_2x_1^* + c_2 + B_2x_2^*, \bar{x}_2^n - x_2^*\rangle + \langle p_2^*, A_2\bar{x}_2^n - a_2\rangle \ge 0.
\end{aligned}$$

Сложим полученные неравенства с (2.14.20):

$$\begin{aligned}
&\langle x_1^{n+1} - x_1^n, x_1^* - x_1^{n+1}\rangle + \langle \bar{x}_1^n - x_1^n, x_1^{n+1} - \bar{x}_1^n\rangle +\\
&+\langle x_2^{n+1} - x_2^n, x_2^* - x_2^{n+1}\rangle + \langle \bar{x}_2^n - x_2^n, x_2^{n+1} - \bar{x}_2^n\rangle +\\
&+\alpha\langle C_1(\bar{x}_2^n - x_2^*) + B_1(\bar{x}_1^n - x_1^*), x_1^* - \bar{x}_1^n\rangle +\\
&+\alpha\langle C_2(\bar{x}_1^n - x_1^*) + B_2(\bar{x}_2^n - x_2^*), x_2^* - \bar{x}_2^n\rangle +\\
&+\alpha\langle \bar{p}_1^n - p_1^*, a_1 - A_1\bar{x}_1^n\rangle + \alpha\langle \bar{p}_2^n - p_2^*, a_2 - A_2\bar{x}_2^n\rangle +\\
&+\alpha^2|C_1(x_2^n - \bar{x}_2^n) + B_1(x_1^n - \bar{x}_1^n)|^2 +\\
&+\alpha^2|C_2(x_1^n - \bar{x}_1^n) + B_2(x_2^n - \bar{x}_2^n)|^2 \ge 0.
\end{aligned} \tag{2.14.21}$$

Рассмотрим неравенства (2.14.12) и (2.14.14). Положим $p_1 = p_1^*$, $p_2 = p_2^*$ в (2.14.14):

$$\begin{aligned}
&\langle p_1^{n+1} - p_1^n, p_1^* - p_1^{n+1}\rangle - \alpha\langle A_1\bar{x}_1^n - a_1, p_1^* - p_1^{n+1}\rangle \ge 0,\\
&\langle p_2^{n+1} - p_2^n, p_2^* - p_2^{n+1}\rangle - \alpha\langle A_2\bar{x}_2^n - a_2, p_2^* - p_2^{n+1}\rangle \ge 0
\end{aligned} \tag{2.14.22}$$

и $p_1 = p_1^{n+1}$, $p_2 = p_2^{n+1}$ в (2.14.12); тогда

$$\begin{aligned}
&\langle \bar p_1^n - p_1^n, p_1^{n+1} - \bar p_1^n\rangle + \alpha\langle A_1(\bar x_1^n - x_1^n), p_1^{n+1} - \bar p_1^n\rangle - \alpha\langle A_1\bar x_1^n - a_1, p_1^{n+1} - \bar p_1^n\rangle \geq 0,\\
&\langle \bar p_2^n - p_2^n, p_2^{n+1} - \bar p_2^n\rangle + \alpha\langle A_2(\bar x_2^n - x_2^n), p_2^{n+1} - \bar p_2^n\rangle - \alpha\langle A_2\bar x_2^n - a_2, p_2^{n+1} - \bar p_2^n\rangle \geq 0.
\end{aligned} \tag{2.14.23}$$

Сложим неравенства (2.14.22) и (2.14.23):

$$\begin{aligned}
&\langle p_1^{n+1} - p_1^n, p_1^* - p_1^{n+1}\rangle + \langle p_2^{n+1} - p_2^n, p_2^* - p_2^{n+1}\rangle +\\
&+\langle \bar p_1^n - p_1^n, p_1^{n+1} - \bar p_1^n\rangle + \langle \bar p_2^n - p_2^n, p_2^{n+1} - \bar p_2^n\rangle +\\
&+\alpha\langle A_1(\bar x_1^n - x_1^n), p_1^{n+1} - \bar p_1^n\rangle + \alpha\langle A_2(\bar x_2^n - x_2^n), p_2^{n+1} - \bar p_2^n\rangle -\\
&-\alpha\langle A_1\bar x_1^n - a_1, p_1^* - \bar p_1^n\rangle - \alpha\langle A_2\bar x_2^n - a_2, p_2^* - \bar p_2^n\rangle \geq 0.
\end{aligned}$$

Используя (2.14.11), перепишем последние неравенства в виде

$$\begin{aligned}
&\langle p_1^{n+1} - p_1^n, p_1^* - p_1^{n+1}\rangle + \langle p_2^{n+1} - p_2^n, p_2^* - p_2^{n+1}\rangle +\\
&+\langle \bar p_1^n - p_1^n, p_1^{n+1} - \bar p_1^n\rangle + \langle \bar p_2^n - p_2^n, p_2^{n+1} - \bar p_2^n\rangle +\\
&+\alpha^2|A_1(\bar x_1^n - x_1^n)|^2 + \alpha^2|A_2(\bar x_2^n - x_2^n)|^2 -\\
&-\alpha\langle A_1\bar x_1^n - a_1, p_1^* - \bar p_1^n\rangle - \alpha\langle A_2\bar x_2^n - a_2, p_2^* - \bar p_2^n\rangle \geq 0.
\end{aligned} \tag{2.14.24}$$

Сложим неравенства (2.14.21) и (2.14.24):

$$\begin{aligned}
&\langle x_1^{n+1} - x_1^n, x_1^* - x_1^{n+1}\rangle + \langle \bar x_1^n - x_1^n, x_1^{n+1} - \bar x_1^n\rangle +\\
&+\langle x_2^{n+1} - x_2^n, x_2^* - x_2^{n+1}\rangle + \langle \bar x_2^n - x_2^n, x_2^{n+1} - \bar x_2^n\rangle +\\
&+\langle p_1^{n+1} - p_1^n, p_1^* - p_1^{n+1}\rangle + \langle p_2^{n+1} - p_2^n, p_2^* - p_2^{n+1}\rangle +\\
&+\langle \bar p_1^n - p_1^n, p_1^{n+1} - \bar p_1^n\rangle + \langle \bar p_2^n - p_2^n, p_2^{n+1} - \bar p_2^n\rangle +\\
&+\alpha\langle C_1(\bar x_2^n - x_2^*) + B_1(\bar x_1^n - x_1^*), x_1^* - \bar x_1^n\rangle +\\
&+\alpha\langle C_2(\bar x_1^n - x_1^*) + B_2(\bar x_2^n - x_2^*), x_2^* - \bar x_2^n\rangle +\\
&+\alpha^2|C_1(x_2^n - \bar x_2^n) + B_1(x_1^n - \bar x_1^n)|^2 +\\
&+\alpha^2|C_2(x_1^n - \bar x_1^n) + B_2(x_2^n - \bar x_2^n)|^2 +\\
&+\alpha^2|A_1(\bar x_1^n - x_1^n)|^2 + \alpha^2|A_2(\bar x_2^n - x_2^n)|^2 \geq 0.
\end{aligned} \tag{2.14.25}$$

Перепишем (2.14.25) в векторно-матричном виде

$$\begin{aligned}
&(x_1^{n+1} - x_1^n, x_2^{n+1} - x_2^n)\begin{pmatrix} x_1^* - x_1^{n+1} \\ x_2^* - x_2^{n+1}\end{pmatrix} + (\bar x_1^n - x_1^n, \bar x_2^n - x_2^n)\begin{pmatrix} x_1^{n+1} - \bar x_1^n \\ x_2^{n+1} - \bar x_2^n\end{pmatrix} +\\
&+(p_1^{n+1} - p_1^n, p_2^{n+1} - p_2^n)\begin{pmatrix} p_1^* - p_1^{n+1} \\ p_2^* - p_2^{n+1}\end{pmatrix} + (\bar p_1^n - p_1^n, \bar p_2^n - p_2^n)\begin{pmatrix} p_1^{n+1} - \bar p_1^n \\ p_2^{n+1} - \bar p_2^n\end{pmatrix} +\\
&+\alpha(x_1^* - \bar x_1^n, x_2^* - \bar x_2^n)\left\{\begin{pmatrix} 0 & C_1 \\ C_2 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} \bar x_1^n - x_1^* \bar x_2^n - x_2^* \end{pmatrix} +\\
&+\alpha^2\left|\left\{\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & C_1 \\ C_2 & 0\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} x_1^n - \bar x_1^n \\ x_2^n - \bar x_2^n\end{pmatrix}\right|^2 + \alpha^2\left|\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar x_1^n - x_1^n \\ \bar x_2^n - x_2^n\end{pmatrix}\right|^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Введем обозначения для матриц

$$C = \begin{pmatrix} 0 & C_1 \\ C_2 & 0\end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2\end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2\end{pmatrix}$$

и векторов

$$v^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^*\end{pmatrix}, \ v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix}, \ p^* = \begin{pmatrix} p_1^* \\ p_2^*\end{pmatrix}, \ p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2\end{pmatrix}$$

и перепишем последнее неравенство в форме

$$\langle v^{n+1}-v^n, v^*-v^{n+1}\rangle+\langle \bar v^n-v^n, v^{n+1}-\bar v^n\rangle+\langle p^{n+1}-p^n, p^*-p^{n+1}\rangle+\langle \bar p^n-p^n, p^{n+1}-\bar p^n\rangle+$$
$$+\langle (C+B)(\bar v^n-v^*), v^*-\bar v^n\rangle+\alpha^2|(C+B)(\bar v^n-v^n)|^2+\alpha^2|A(\bar v^n-v^n)|^2\geq 0.$$

С помощью тождества (2.9.14) представим первые четыре скалярные произведения в виде суммы квадратов. Учитывая положительную полуопределенность матрицы $\Phi+B$, имеем

$$|v^{n+1}-v^*|^2+|v^{n+1}-\bar v^n|^2+|\bar v^n-v^n|^2+|p^{n+1}-p^*|^2+|p^{n+1}-\bar p^n|^2+|\bar p^n-p^n|^2+$$
$$+2\alpha^2|(C+B)(\bar v^n-v^n)|^2+2\alpha^2|A(\bar v^n-v^n)|^2\leq |v^n-v^*|^2+|p^n-p^*|^2.$$

Отсюда имеем

$$|v^{n+1}-v^*|^2+|v^{n+1}-\bar v^n|^2+(1-2\alpha^2(|C+B|^2+|A|^2))|\bar v^n-v^n|^2+$$
$$+|p^{n+1}-p^*|^2+|p^{n+1}-\bar p^n|^2+|\bar p^n-p^n|^2\leq |v^n-v^*|^2+|p^n-p^*|^2.$$

Просуммируем полученное неравенство от $n=0$ до $n=N$:

$$|v^{N+1}-v^*|^2+\sum_{k=0}^{k=N}|v^{k+1}-\bar v^k|^2+d\sum_{k=0}^{k=N}|\bar v^k-v^k|^2+|p^{N+1}-p^*|^2+$$
$$+\sum_{k=0}^{k=N}|p^{k+1}-\bar p^k|^2+\sum_{k=0}^{k=N}|\bar p^k-p^k|^2\leq |v^0-v^*|^2+|p^0-p^*|^2,$$

где $d=1-2\alpha^2(|C+B|^2+|A|^2)>0$ по условию теоремы. Из полученного неравенства следует ограниченность траектории

$$|v^{N+1}-v^*|^2+|p^{N+1}-p^*|^2\leq |v^0-v^*|^2+|p^0-p^*|^2,$$

а также сходимость рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty}|v^{k+1}-\bar v^k|^2<\infty,\quad \sum_{k=0}^{\infty}|\bar v^k-v^k|^2<\infty,\quad \sum_{k=0}^{\infty}|p^{k+1}-\bar p^k|^2<\infty,\quad \sum_{k=0}^{\infty}|\bar p^k-p^k|^2<\infty$$

и, следовательно, стремление к нулю величин $|v^{n+1}-\bar v^n|^2\to 0$, $|\bar v^n-v^n|^2\to 0$, $|p^{n+1}-\bar p^n|^2\to 0$, $|\bar p^n-p^n|^2\to 0$, $n\to\infty$.

Так как последовательность v^n, p^n ограничена, то существует элемент v', p' такой, что $v^{n_i}\to v'$, $p^{n_i}\to p'$ при $n_i\to\infty$, и при этом $|v^{n_i+1}-v^{n_i}|^2\to 0$, $|p^{n_i+1}-p^{n_i}|^2\to 0$.

Рассмотрим неравенства (2.14.12) – (2.14.15) для всех $n_i\to\infty$ и, перейдя к пределу, получим

$$\begin{aligned}
&\langle C_1x_2'+c_1+B_1x_1'+A_1^\top p_1', x_1-x_1'\rangle\geq 0 && \forall x_1\geq 0,\\
-&\langle A_1x_1'-a_1, p_1-p_1'\rangle\geq 0 && \forall p_1\geq 0,\\
&\langle C_2x_1'+c_2+B_2x_2'+A_2^\top p_2', x_2-x_2'\rangle\geq 0 && \forall x_2\geq 0,\\
-&\langle A_2x_2'-a_2, p_2-p_2'\rangle\geq 0 && \forall p_2\geq 0.
\end{aligned}$$

Поскольку эти соотношения совпадают с (2.14.6), то $v'=v^*\in D^*$, $p'=p^*\geq 0$, т.е. любая предельная точка последовательности v^n, p^n является решением задачи. Условие монотонности убывания величины $|v^n-v^*|+|p^n-p^*|$ обеспечивает единственность предельной точки, т.е. сходимость $(x_1^n, x_2^n, p_1^n, p_2^n)\to(x_1^*, x_2^*, p_1^*, p_2^*)$ при $n\to\infty$. Теорема доказана. $\square$

2.15. Экстраградиентные методы для равновесных задач со связанными ограничениями

Рассмотрим равновесную задачу (2.2.11) со связанными ограничениями [5, 6]

$$v^* \in \operatorname{Argmin}\{\langle \Phi v^* + \varphi, w\rangle + (1/2)\langle Bw, w\rangle \mid \langle v^*, A^i w\rangle \le \beta_i, w \ge 0\},\ \ i = 1, 2, \dots, m. \tag{2.15.1}$$

Задачи со связанными ограничениями представляют собой адекватный математический инструментарий для описания разнообразных рынков со многими участниками и сложных сетей со многими частично противоречивыми факторами.

Введем обозначения $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$, $\langle v, Aw\rangle - \beta = (\langle v, A^1 w\rangle - \beta_1, \langle v, A^2 w\rangle - \beta_2, \dots, \dots, \langle v, A^m w\rangle - \beta_m)$, затем при значении параметра $v = v^*$ выпишем функцию Лагранжа для задачи (2.15.1)

$$\mathcal{L}(v^*, w, \lambda) = \langle \Phi v^* + \varphi, w\rangle + (1/2)\langle Bw, w\rangle + \langle \lambda, (\langle v^*, Aw\rangle - \beta)\rangle \quad \forall w \ge 0,\ \lambda \ge 0.$$

Точку v^*, λ^* назовем седловой для функции Лагранжа $\mathcal{L}(v^*, w, \lambda)$, если выполняются неравенства

$$\mathcal{L}(v^*, v^*, \lambda) \le \mathcal{L}(v^*, v^*, \lambda^*) \le \mathcal{L}(v^*, w, \lambda^*) \quad \forall w \ge 0,\ \lambda \ge 0. \tag{2.15.2}$$

Систему неравенств (2.15.2) представим в эквивалентной форме

$$\begin{aligned} v^* &\in \operatorname{Argmin}\{\langle \Phi v^* + \varphi, w\rangle + (1/2)\langle Bw, w\rangle + \langle \lambda^*, (\langle v^*, Aw\rangle - \beta)\rangle \mid w \ge 0\}, \\ \lambda^* &\in \operatorname{Argmax}\{\langle \lambda, (\langle v^*, Av^*\rangle - \beta)\rangle \mid \lambda \ge 0\}. \end{aligned} \tag{2.15.3}$$

Следующие вариационные неравенства представляют собой необходимые условия системы задач оптимизации (2.15.3):

$$\begin{aligned} &\left\langle (\Phi + B)v^* + \varphi + \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i^* A^i\right) v^*, w - v^* \right\rangle \ge 0 \qquad \forall w \ge 0, \\ &\langle \lambda^* - \lambda, \langle v^*, Av^*\rangle - \beta\rangle \ge 0 \qquad \forall \lambda \ge 0. \end{aligned} \tag{2.15.4}$$

Напомним, что A^i, $i = 1, 2, \dots, m$, — симметричные положительно полуопределенные матрицы, поэтому нетрудно проверить тождество

$$\langle Aw, w\rangle = \langle Av, v\rangle + 2\langle Av, w - v\rangle + \langle A(w - v), w - v\rangle. \tag{2.15.5}$$

Используя это тождество, преобразуем отдельно третье слагаемое из первого неравества системы (2.15.4):

$$\begin{aligned} &\left\langle \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i^* A^i\right) v^*, w - v^* \right\rangle = \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \langle A^i v^*, w - v^*\rangle \le \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m \lambda_i^* \langle A^i w, w\rangle - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m \lambda_i^* \langle A^i v^*, v^*\rangle - \\ &- \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m \lambda_i^* \langle A^i (w - v^*), w - v^*\rangle \le \frac{1}{2}\langle \lambda^*, (\langle Aw, w\rangle - \beta)\rangle - \frac{1}{2}\langle \lambda^*, (\langle Av^*, v^*\rangle - \beta)\rangle. \end{aligned}$$

С учетом полученной оценки первое неравенство системы (2.15.4) перепишем в виде [5]

$$\langle (\Phi + B)v^* + \varphi, w - v^*\rangle + (1/2)\langle \lambda^*, (\langle Aw, w\rangle - \beta)\rangle \ge 0 \quad \forall w \ge 0. \tag{2.15.6}$$

Напомним, что система вариационных неравенств (2.15.4) может быть эквивалентно представлена в форме операторных уравнений

$$\begin{aligned} v^* &= \pi_+(v^* - \alpha((\Phi + B)v^* + \varphi + (\sum_{i=1}^m \lambda_i^* A^i) v^*), \\ \lambda^* &= \pi_+(\lambda^* + (\alpha/2)(\langle v^*, Av^*\rangle - \beta)), \end{aligned} \tag{2.15.7}$$

где $\pi_+(\ldots)$ — оператор проектирования некоторого вектора на положительный ортант $\mathbb{R}^n_+$, $\alpha > 0$ — параметр типа длины шага.

Для решения системы операторных уравнений (2.15.7) используем экстраградиентный подход [6]

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}^n &= \pi_+(\lambda^n + (\alpha/2)(\langle v^n, Av^n\rangle - \beta)), \\ \bar{v}^n &= \pi_+(v^n - \alpha((\Phi + B)v^n + \varphi + \left(\sum_{i=1}^m \bar{\lambda}^n_i A^i\right) v^n), \\ \lambda^{n+1} &= \pi_+(\lambda^n + (\alpha/2)(\langle \bar{v}^n, A\bar{v}^n\rangle - \beta)), \\ v^{n+1} &= \pi_+(v^n - \alpha((\Phi + B)\bar{v}^n + \varphi + \left(\sum_{i=1}^m \bar{\lambda}^n_i A^i\right) \bar{v}^n). \end{aligned} \tag{2.15.8}$$

Длина шага α в процессе (2.15.8) определяется из условия

$$0 < \varepsilon_0 \le \alpha < 1/\sqrt{2(L_2^2 + (1/2)L_1^2)}, \qquad \varepsilon_0 > 0, \tag{2.15.9}$$

где константы L_1 и L_2 определены ниже.

Получим оценку отклонения векторов $\bar{v}^n$, v^{n+1} и $\bar{\lambda}^n$, λ^{n+1} из (2.15.8). Поскольку векторная квадратичная функция $\langle v, Av\rangle$ на любом ограниченном множестве удовлетворяет условию Липшица, то из первого и третьего уравнений (2.15.8) имеем

$$|\bar{\lambda}^n - \lambda^{n+1}| \le (\alpha/2)|\langle \bar{v}^n, A\bar{v}^n\rangle - \langle v^n, Av^n\rangle| \le (\alpha/2)\, L_1|\bar{v}^n - v^n|. \tag{2.15.10}$$

Предполагая, что последовательность $|\bar{\lambda}^n| \le C_0$ для всех $n \to \infty$ и $\max|A^i| \le |A|$, имеем $|\sum\limits_{i=1}^m \bar{\lambda}^n_i A^i| \le \sum\limits_{i=1}^m \bar{\lambda}^n_i |A^i| \le mC_0|A| \le C|A|$. Пусть $L_2 = |\Phi| + |B| + C|A|$; тогда из второго и четвертого уравнений получим

$$\begin{gathered} |\bar{v}^n - v^{n+1}| \le \alpha|(\Phi + B + \sum_{n+1}^m \bar{\lambda}^n_i A^i)(\bar{v}^n - v^n)| \le \\ \le \alpha(|\Phi| + |B| + C|A|)|\bar{v}^n - v^n| \le \alpha L_2|\bar{v}^n - v^n| \end{gathered} \tag{2.15.11}$$

Представим рассматриваемый процесс в форме вариационных неравенств. Первое и третье уравнения из (2.15.8) в соответствии с определением оператора проектирования запишем в виде

$$\langle \bar{\lambda}^n - \lambda^n - (\alpha/2)(\langle v^n, Av^n\rangle - \beta), \lambda - \bar{\lambda}^n\rangle \ge 0, \tag{2.15.12}$$

$$\langle \lambda^{n+1} - \lambda^n - (\alpha/2)(\langle \bar{v}^n, A\bar{v}^n\rangle - \beta), \lambda - \lambda^{n+1})\rangle \ge 0 \tag{2.15.13}$$

для всех $\lambda \ge 0$. Второе и четвертое уравнения представим в форме

$$\langle \bar{v}^n - v^n + \alpha((\Phi + B)v^n + \varphi + (\sum_{i=1}^m \bar{\lambda}^n_i A^i)v^n), v - \bar{v}^n \ge 0, \tag{2.15.14}$$

$$\langle v^{n+1} - v^n + \alpha((\Phi + B)\bar{v}^n + \varphi + (\sum_{i=1}^m \bar{\lambda}^n_i A^i)\bar{v}^n), v - v^{n+1}\rangle \ge 0 \tag{2.15.15}$$

для всех $v \ge 0$.

Покажем, что процесс (2.15.8) сходится монотонно по норме к одному из равновесных решений.

Теорема 2.15.1. *Если множество решений задачи (2.15.1) непусто, матрицы $\Phi + B$ и A_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, положительно полуопределены, кроме того, A^i, $i = 1, 2, \ldots, m$, — симметричные матрицы, то последовательность v^n, порожденная методом (2.15.8) с выбором* *параметра α из условия (2.15.9), сходится монотонно по норме к одному из равновесных решений, т.е. $v^n \to v^* \in D^*$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Положим $w = v^*$ в (2.15.15); тогда

$$\langle v^{n+1} - v^n, v^* - v^{n+1}\rangle + \alpha\langle(\Phi + B)\bar{v}^n + \varphi + \left(\sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i^n A^i\right) \bar{v}^n, v^* - v^{n+1}\rangle \geq 0. \qquad (2.15.16)$$

Положим $w = v^{n+1}$ в (2.15.14):

$$\langle \bar{v}^n - v^n + \alpha((\Phi + B)v^n + \varphi + \left(\sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i^n A^i\right) v^n), v^{n+1} - \bar{v}^n\rangle \geq 0.$$

Отсюда

$$\langle \bar{v}^n - v^n, v^{n+1} - \bar{v}^n\rangle + \alpha\langle(\Phi + B)\bar{v}^n + \varphi, v^{n+1} - \bar{v}^n\rangle - \alpha\langle(\Phi + B)(\bar{v}^n - v^n), v^{n+1} - \bar{v}^n\rangle +$$
$$+\alpha \left\langle \left(\sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i^n A^i\right) \bar{v}^n, v^{n+1} - \bar{v}^n \right\rangle - \alpha \left\langle \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i^n A^i(\bar{v}^n - v^n), v^{n+1} - \bar{v}^n \right\rangle \geq 0,$$

или, с учетом (2.15.11),

$$\begin{aligned} &\langle \bar{v}^n - v^n, v^{n+1} - \bar{v}^n\rangle + \alpha\langle(\Phi + B)\bar{v}^n + \varphi, v^{n+1} - \bar{v}^n\rangle + \\ +\ &\alpha\langle\left(\sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i^n A^i\right) \bar{v}^n, v^{n+1} - \bar{v}^n\rangle + \alpha^2 L_2^2 |\bar{v}^n - v^n|^2 \geq 0. \end{aligned} \qquad (2.15.17)$$

Сложим неравенства (2.15.16) и (2.15.17):

$$\begin{aligned} &\langle v^{n+1} - v^n, v^* - v^{n+1}\rangle + \langle \bar{v}^n - v^n, v^{n+1} - \bar{v}^n\rangle + \alpha\langle(\Phi + B)\bar{v}^n + \varphi, v^* - \bar{v}^n\rangle + \\ &+\alpha \left\langle \left(\sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i^n A^i\right) \bar{v}^n, v^* - \bar{v}^n \right\rangle + \alpha^2 L_2^2 |\bar{v}^n - v^n|^2 \geq 0. \end{aligned} \qquad (2.15.18)$$

С помощью тождества (2.15.5) преобразуем отдельно четвертый член из (2.15.18), учитывая также, конечно, что $\langle\bar{\lambda}^n, \langle v^*, Av^*\rangle - \beta\rangle \leq 0$:

$$\begin{aligned} &\left\langle \left(\sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i^n A^i\right) \bar{v}^n, v^* - \bar{v}^n \right\rangle = \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i^n \langle A^i\bar{v}^n, v^* - \bar{v}^n\rangle \leq \\ \leq\ &\frac{1}{2}\langle\bar{\lambda}^n, (\langle Av^*, v^*\rangle - \beta)\rangle - \frac{1}{2}\langle\bar{\lambda}^n, (\langle A\bar{v}^n, \bar{v}^n\rangle - \beta)\rangle - \\ -\ &\frac{1}{2}\langle\bar{\lambda}^n, \langle A(v^* - \bar{v}^n), v^* - \bar{v}^n\rangle\rangle \leq -\frac{1}{2}\langle\bar{\lambda}^n, (\langle A\bar{v}^n, \bar{v}^n\rangle - \beta)\rangle. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\langle v^{n+1} - v^n, v^* - v^{n+1}\rangle + \langle \bar{v}^n - v^n, v^{n+1} - \bar{v}^n\rangle + \alpha\langle(\Phi + B)\bar{v}^n + \varphi, v^* - \bar{v}^n\rangle - \\ &-(\alpha/2)\langle\bar{\lambda}^n, (\langle A\bar{v}^n, \bar{v}^n\rangle - \beta)\rangle + \alpha^2 L_2^2 |\bar{v}^n - v^n|^2 \geq 0. \end{aligned} \qquad (2.15.19)$$

Положим $w = \bar{v}^n$ в (2.15.6); тогда

$$\langle(\Phi + B)v^* + \varphi, \bar{v}^n - v^*\rangle + \frac{1}{2}\langle\lambda^*, (\langle A\bar{v}^n, \bar{v}^n\rangle - \beta)\rangle \geq 0. \qquad (2.15.20)$$

Сложим полученные неравенства

$$\begin{aligned}&\langle v^{n+1}-v^n, v^*-v^{n+1}\rangle + \langle \bar v^n - v^n, v^{n+1}-\bar v^n\rangle + \alpha\langle (\Phi+B)\bar v^n - \\ &-(\Phi+B)v^*, v^*-\bar v^n\rangle - (\alpha/2)\langle \bar\lambda^n-\lambda^*, (\langle A\bar v^n, \bar v^n\rangle - \beta)\rangle + \alpha^2 L_2^2|\bar v^n - v^n|^2 \geq 0.\end{aligned} \tag{2.15.21}$$

Рассмотрим неравенства (2.15.12) и (2.15.13). Положим $\lambda=\lambda^*$ в (2.15.13) и $\lambda=\lambda^{n+1}$ в (2.15.12):

$$\begin{aligned}&\langle \lambda^{n+1}-\lambda^n, \lambda^*-\lambda^{n+1}\rangle - (\alpha/2)\langle(\langle \bar v^n, A\bar v^n\rangle - \beta), \lambda^*-\lambda^{n+1}\rangle \geq 0,\\ &\langle \bar\lambda^n - \lambda^n - (\alpha/2)(\langle v^n A v^n\rangle - \beta), \lambda^{n+1}-\bar\lambda^n\rangle \geq 0\end{aligned} \tag{2.15.22}$$

или

$$\langle \bar\lambda^n-\lambda^n, \lambda^{n+1}-\bar\lambda^n\rangle + \frac{\alpha}{2}(\langle \bar v^n, A\bar v^n\rangle - \langle v^n, Av^n\rangle), \lambda^{n+1}-\bar\lambda^n\rangle - \frac{\alpha}{2}(\langle \bar v^n, A\bar v^n\rangle - \beta), \lambda^{n+1}-\bar\lambda^n\rangle \geq 0.$$

Сложим полученные неравенства

$$\begin{aligned}&\langle \lambda^{n+1}-\lambda^n, \lambda^*-\lambda^{n+1}\rangle + \langle \bar\lambda^n-\lambda^n, \lambda^{n+1}-\bar\lambda^n\rangle - \\ &-\frac{\alpha}{2}(\langle \bar v^n, A\bar v^n\rangle - \beta), \lambda^*-\bar\lambda^n\rangle + \frac{\alpha}{2}\langle(\langle \bar v^n, A\bar v^n\rangle - \langle v^n, Av^n\rangle), \lambda^{n+1}-\bar\lambda^n\rangle \geq 0.\end{aligned}$$

С учетом (2.15.10), оценим четвертый член в полученном неравенстве

$$\begin{aligned}&\langle \lambda^{n+1}-\lambda^n, \lambda^*-\lambda^{n+1}\rangle + \langle \bar\lambda^n-\lambda^n, \lambda^{n+1}-\bar\lambda^n\rangle - \\ &- \quad \frac{\alpha}{2}(\langle \bar v^n, A\bar v^n\rangle - \beta), \lambda^*-\bar\lambda^n\rangle + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 L_1^2|\bar v^n - v^n|^2 \geq 0.\end{aligned} \tag{2.15.23}$$

Сложим неравенства (2.15.21) и (2.15.23), учитывая при этом положительную полуопределенность оператора $\langle(\Phi+B)v, v\rangle \geq 0 \ \ \forall v \geq 0$:

$$\begin{aligned}&\langle v^{n+1}-v^n, v^*-v^{n+1}\rangle + \langle \bar v^n-v^n, v^{n+1}-\bar v^n\rangle\langle \lambda^{n+1}-\lambda^n, \lambda^*-\lambda^{n+1}\rangle + \\ &+\langle \bar\lambda^n-\lambda^n, \lambda^{n+1}-\bar\lambda^n\rangle + \alpha^2(2L_2^2 + (1/2)L_1^2)|\bar v^n - v^n|^2 \geq 0.\end{aligned} \tag{2.15.24}$$

С помощью тождества (2.9.14) разложим четыре первых скалярных произведения в сумму квадратов

$$\begin{aligned}&|v^{n+1}-v^*|^2 + |\lambda^{n+1}-\lambda^*|^2 + |v^{n+1}-\bar v^n|^2 + |\bar v^n - v^n|^2 + |\lambda^{n+1}-\bar\lambda^n|^2 + \\ &+|\bar\lambda^n-\lambda^n|^2 - \alpha^2\left(2L_2^2 + (1/2)L_1^2\right)|\bar v^n - v^n|^2 \leq |v^n - v^*|^2 + |\lambda^n-\lambda^*|^2.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}&|v^{n+1}-v^*|^2 + |\lambda^{n+1}-\lambda^*|^2 + |v^{n+1}-\bar v^n|^2 + (1/2)|\lambda^{n+1}-\bar\lambda^n|^2 + \\ &+(1/2)|\bar\lambda^n-\lambda^n|^2 + d|\bar v^n - v^n|^2 \leq |v^n - v^*|^2 + |\lambda^n-\lambda^*|^2,\end{aligned} \tag{2.15.25}$$

где $d = 1 - \alpha^2(2L_2^2 + (1/2)L_1^2) > 0$ в силу условия (2.15.9).

Просуммируем (2.15.25) от $n=0$ до $n=N$:

$$\begin{aligned}&|v^{N+1}-v^*|^2 + |\lambda^{N+1}-\lambda^*|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{k=N}|\lambda^{k+1}-\bar\lambda^k|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{k=N}|\bar\lambda^{k+1}-\lambda^k|^2 + \\ &+\sum_{k=0}^{k=N}|v^{k+1}-\bar v^k|^2 + d\sum_{k=0}^{k=N}|\bar v^k - v^k|^2 \leq |v^0-v^*|^2 + |\lambda^0-\lambda^*|^2.\end{aligned}$$

Из полученного неравенства следует ограниченность траектории

$$|v^{N+1} - v^*|^2 + |\lambda^{N+1} - \lambda^*|^2 \le |v^0 - v^*|^2 + |\lambda^0 - \lambda^*|^2,$$

а также сходимость рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty} |v^{k+1} - \bar{v}^k|^2 < \infty, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} |\bar{v}^k - v^k|^2 < \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda^{k+1} - \bar{\lambda}^k|^2 < \infty, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} |\bar{\lambda}^k - \lambda^k|^2 < \infty$$

и, следовательно, стремление к нулю величин

$$\begin{array}{ll} |v^{n+1} - \bar{v}^n|^2 \to 0, & |\bar{v}^n - v^n|^2 \to 0, \\ |\lambda^{n+1} - \bar{\lambda}^n|^2 \to 0, & |\bar{\lambda}^n - \lambda^n|^2 \to 0 \qquad n \to \infty. \end{array}$$

Так как последовательность v^n, λ^n ограничена, то существует элемент v', λ' такой, что $v^{n_i} \to v'$, $\lambda^{n_i} \to \lambda'$ при $n_i \to \infty$ и при этом

$$|v^{n_i+1} - v^{n_i}|^2 \to 0, \qquad |\lambda^{n_i+1} - \lambda^{n_i}|^2 \to 0.$$

Рассмотрим неравенства (2.15.12) – (2.15.15) для всех $n_i \to \infty$ и, перейдя к пределу, получим

$$\begin{array}{ll} \langle (\Phi + B)v' + \varphi + \left(\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda'_i A^i\right) v', w - v' \rangle \ge 0 & \forall w \ge 0, \\ \langle \lambda' - \lambda, (\langle v', Av' \rangle - \beta \rangle \ge 0 & \forall \lambda \ge 0. \end{array}$$

Поскольку эти соотношения совпадают с (2.15.4), то $v' = v^* \in D^*$, $\lambda' = \lambda^* \ge 0$, т.е. любая предельная точка последовательности v^n, λ^n является решением задачи. Условие монотонности убывания величины $|v^n - v^*| + |\lambda^n - \lambda^*|$ обеспечивает единственность предельной точки, т.е. сходимость $v^n \to v^*$, $\lambda^n \to \lambda^*$ при $n \to \infty$. Теорема доказана. □

2.16. Игровые экстраградиентные методы для задач со связанными ограничениями

Рассмотрим билинейную игру двух лиц со связанными ограничениями. Решение этой игры представляет собой неподвижную точку системы двух экстремальных включений

$$\begin{array}{l} x_1^* \in \text{Argmin}\{\langle x_1, C_1 x_2^* + c_1 \rangle + (1/2)\langle B_1 x_1, x_1 \rangle \mid \langle x_1, A x_2^* \rangle \le (\beta/2),\ x_1 \ge 0\}, \\ x_2^* \in \text{Argmin}\{\langle C_2 x_1^* + c_2, x_2 \rangle + (1/2)\langle B_2 x_2, x_2 \rangle \mid \langle A^\top x_1^*, x_2 \rangle \le (\beta/2),\ x_2 \ge 0\}. \end{array} \tag{2.16.1}$$

Каждому из участников этой игры приходится решать задачу квадратичного программирования по собственным переменным при фиксированных значениях параметров, при этом параметры являются одновременно переменными для каждого из соперников. Обе задачи этой системы фактически имеют одно и то же ограничение, но относительно разных переменных: первая задача — относительно переменной x_1, вторая — относительно переменной x_2. В этой игровой ситуации оба игрока жестко связаны как по функционалу, так и по ограничениям. Уровень самостоятельности у них невысокий, поэтому игровой задаче (2.16.1) поставим в соответствие равновесную задачу вида

$$\begin{array}{l} x_1^*, x_2^* \in \text{Argmin}\Big\{ \langle x_1, C_1 x_2^* + c_1 \rangle + \langle C_2 x_1^* + c_2, x_2 \rangle + \dfrac{1}{2}\langle B_1 x_1, x_1 \rangle + \dfrac{1}{2}\langle B_2 x_2, x_2 \rangle \mid \\ \qquad \mid \langle x_1, A_1 x_2^* \rangle + \langle x_2, A_1^\top x_1^* \rangle \le \beta, \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \Big\}. \end{array} \tag{2.16.2}$$

Из рассуждений (2.7.11) – (2.7.13) следует, что решение (2.16.2) является решением игры (2.16.1).

Используя введенные ранее обозначения

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & C_1 \\ C_2 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}, \;\; A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

$$v^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix}, \;\; v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \;\; p^* = \begin{pmatrix} p_1^* \\ p_2^* \end{pmatrix}, \;\; p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix},$$

представим (2.16.2) в форме

$$v^* \in \mathrm{Argmin}\{\langle \Phi v^* + \varphi, w\rangle + \frac{1}{2}\langle Bw, w\rangle \mid \langle v^*, Aw\rangle \le \beta, \; w \ge 0\}. \tag{2.16.3}$$

Очевидно, что полученная задача совпадает с (2.15.1) при $m = 1$. Для решения равновесной задачи (2.16.3) можно использовать метод (2.15.8), (2.15.9):

$$\begin{array}{lcl} \bar{\lambda}^n & = & \pi_+(\lambda^n + \frac{\alpha}{2}(\langle v^n, Av^n\rangle - \beta)), \\ \bar{v}^n & = & \pi_+(v^n - \alpha((\Phi + B)v^n + \varphi + \bar{\lambda}^n A)v^n), \\ \lambda^{n+1} & = & \pi_+(\lambda^n + \frac{\alpha}{2}(\langle \bar{v}^n, A\bar{v}^n\rangle - \beta)), \\ v^{n+1} & = & \pi_+(v^n - \alpha((\Phi + B)\bar{v}^n + \varphi + \bar{\lambda}^n A)\bar{v}^n). \end{array} \tag{2.16.4}$$

Длина шага α на каждой итерации выбирается из некоторого фиксированного интервала

$$0 < \varepsilon_0 \le \alpha < \alpha_0, \qquad \varepsilon_0 > 0. \tag{2.16.5}$$

Сходимость этого процесса к игровому решению задачи (2.16.1) следует из теоремы 2.15.1.

Пусть равновесная задача (2.2.1) является положительно полуопределенной и v^* — ее равновесное решение; тогда пара v^*, v^* является седловой точкой функции сдвига $\Psi(v, w) = \langle \Phi v, w\rangle + \langle \varphi, w\rangle - \langle \Phi v, v\rangle + \langle \varphi, v\rangle$. Чтобы вычислить равновесное решение задачи, можно использовать методы, развитые для вычисления седловых точек. Некоторые из них, точнее, основанные на экстраградиентном подходе, были рассмотрены в этой главе. Отметим, что эта ситуация является полным аналогом задачи выпуклого программирования, которая с помощью функции Лагранжа сводится к решению седловой задачи (теорема Куна–Таккера).

3. Оптимизационный подход к вычислению равновесий

3.1. Метод множителей

До сих пор мы рассматривали возможность применения экстраградиентного подхода к различного сорта равновесным и игровым билинейным задачам. Для выпуклых равновесных задач этот подход обоснован в [7, 10, 42]. В основе сходимости экстраградиентного метода лежат седловые свойства функции сдвига $\Psi(v, w)$ (2.3.6). Поскольку седловая точка функции сдвига всегда принадлежит диагонали квадрата $D \times D$, то ее компоненты равны, поэтому в равновесной ситуации достаточно ограничиться итеративными формулами пересчета только одной векторной переменной, например $w \in D$, относительно которой функция $\Psi(v, w)$ предполагается выпуклой. По другой переменной, т.е. по $v \in D$, вогнутость $\Psi(v, w)$ (в нелинейном случае) не предполагается, так как формулы пересчета по этой переменной отсутствуют.

В последующей части этой работы мы рассмотрим применение градиентного подхода к задачам максимизации функции минимумов (2.4.1), к которым, как следует из рассуждений параграфа 2.5, могут быть сведены равновесные задачи. Чтобы улучшить дифференциальные свойства функции минимумов, мы используем идею модификации функции Лагранжа. В отличие от оптимизации в равновесной ситуации речь пойдет о максимизации функции, которая порождена решением вспомогательной равновесной задачи по прямым переменным при фиксированных значениях двойственных переменных модифицированной функции Лагранжа. Градиентная процедура максимизации этой функции приводит к методу, который по аналогии с задачами оптимизации можно назвать методом множителей.

Итак, рассмотрим равновесную задачу

$$\langle \Phi v^* + \varphi, v^* \rangle + (1/2)\langle Bv^*, v^* \rangle \leq \langle \Phi v^* + \varphi, w \rangle + (1/2)\langle Bw, w \rangle \quad \forall w \in D, \tag{3.1.1}$$

где $D = \{w \mid Aw \leq a,\ w \geq 0\}$. Введем функцию сдвига $\Psi(v, w)$

$$\Psi(v, w) = \langle \Phi v + \varphi, w \rangle + \frac{1}{2}\langle Bw, w \rangle - \langle \Phi v + \varphi, v \rangle - \frac{1}{2}\langle Bv, v \rangle \quad \forall v, w \in D.$$

С помощью функции $\Psi(v, w)$ сформируем модифицированную функцию Лагранжа

$$\mathcal{M}(v, w, p) = \Psi(v, w) + (1/2\alpha)|\pi_+(p + \alpha(Aw - a))|^2 - (1/2\alpha)|p|^2 \quad \forall v \geq 0,\ w \geq 0,\ p \geq 0.$$

В равновесном состоянии, т.е. при $v = v^*$, точка с координатами v^*, p^* (при выполнении условий регулярности) является седловой для функции Лагранжа $\mathcal{L}(v^*, w, p) = \Psi(v, w)+$ $+\langle p, Aw - a \rangle$, $\forall v \geq 0$, $w \geq 0$, $p \geq 0$; тем более, эта точка будет седловой и для модифицированной функции Лагранжа $\mathcal{M}(v^*, w, p)$, т.е.

$$\mathcal{M}(v^*, v^*, p) \leq \mathcal{M}(v^*, v^*, p^*) \leq \mathcal{M}(v^*, w, p^*) \quad \forall w \geq 0,\ \forall p \geq 0. \tag{3.1.2}$$

Поскольку функция $\mathcal{M}(v, w, p)$ дифференцируема по своим переменным (по крайней мере, один раз), выпишем необходимые условия оптимальности для системы задач оптимизации (3.1.2):

$$\begin{aligned} &\langle \nabla_w \Psi(v^*, v^*) + A^\top \pi_+(p^* + \alpha(Av^* - a)), w - v^* \rangle \geq 0 && \forall w \geq 0, \\ &\langle \pi_+(p^* + (Av^* - a)) - p^*, p - p^* \rangle \geq 0 && \forall p \in \mathbb{R}^n_+. \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

Заметим, что вектор $p^* \geq 0$ в этом неравенстве не равен нулю ($p^* \neq 0$); в противном случае функциональные ограничения неактивны. Поэтому второе неравенство из (3.1.3) можно представить в эквивалентной форме операторного уравнения

$$\pi_+(p^* + (Av^* - a)) - p^* = 0. \tag{3.1.4}$$

Действительно, если бы вектор $\pi_+(p^* + (Av^* - a)) - p^*$ имел хотя бы одну отрицательную или положительную компоненту, то, выбирая в неравенстве (3.1.3) значение p_i с номером этой компоненты сначала больше, а затем меньше p_i^*, мы получим противоречие с утверждением этого неравенства.

Чтобы сформулировать метод, который мы будем изучать в этом разделе, придадим последним неравенствам другую форму, а именно: правое неравенство (3.1.2) оставим без изменения, а левое запишем в форме (3.1.4)

$$\begin{aligned} &v^* \in \operatorname{Argmin}\left\{\Psi(v^*, w) + (1/2\alpha)|\pi_+(p^* + \alpha(Aw - a))|^2 - -(1/2\alpha)|p^*|^2 \mid \forall w \geq 0\right\}, \\ &\pi_+(p^* + \alpha(Av^* - a)) - p^* = 0. \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

Все утверждения (3.1.2) – (3.1.5) эквивалентны.

Система (3.1.5) дает нам очевидную возможность сформулировать процесс, который по аналогии с оптимизацией мы будем называть методом множителей

$$p^{n+1} = \pi_+(p^n + \alpha(Av^{n+1} - a)), \qquad v^{n+1} \in \operatorname{Argmin}\{\mathcal{M}(v^{n+1}, w, p^n) \mid w \geq 0\}. \tag{3.1.6}$$

Реализация этого процесса предполагает, что функция

$$\mathcal{M}(v, w, p) = \Psi(v, w) + (1/2\alpha)|\pi_+(p + \alpha(Aw - a))|^2 - (1/2\alpha)|p|^2$$

выпукла по w при любых v и p и множество неподвижных точек вспомогательной равновесной задачи непусто при любом $p \in \mathbb{R}^n_+$. Для решения этой задачи можно использовать любые методы, развитые в первой части этой работы, а также в [10, 34].

Смысл последующего изложения состоит в том, чтобы доказать, что система (3.1.5) является предельной для процесса (3.1.6) при $n \to \infty$. Каждую итерацию процесса (3.1.6) запишем в форме вариационных неравенств

$$\langle p^{n+1} - p^n - \alpha(Av^{n+1} - a), p - p^{n+1}\rangle \geq 0 \qquad \forall p \geq 0, \tag{3.1.7}$$

$$\langle \nabla_w \Psi(v^{n+1}, v^{n+1}) + A^\top \pi_+(p^n + \alpha(Av^{n+1} - a)), w - v^{n+1}\rangle \geq 0 \tag{3.1.8}$$

для всех $w \geq 0$. Покажем, что процесс (3.1.6) сходится монотонно по p^n к p^*.

Теорема 3.1.1. *Если множество решений задачи (3.1.1) непусто, матрица $\Phi + B$ положительно полуопределена, вспомогательная равновесная задача на каждой итерации разрешима, последовательность v^n ограничена, то последовательность p^n, порожденная методом (3.1.6), сходится монотонно по норме по переменной p к одному из равновесных решений, т.е. $p^n \to p^* \in \mathbb{R}^n_+$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Положим $w = v^*$ в (3.1.8)

$$\langle \Phi v^{n+1} + \varphi + Bv^{n+1} + A^\top \pi_+(p^n + \alpha(Av^{n+1} - a)), v^* - v^{n+1}\rangle \geq 0,$$

и $w = v^{n+1}$ в неравенстве (3.1.3); тогда

$$\langle \Phi v^* + \varphi + Bv^* + A^\top \pi_+(p^* + \alpha(Av^* - a)), v^{n+1} - v^*\rangle \geq 0.$$

Сложим полученные неравенства

$$\langle (\Phi + B)(v^{n+1} - v^*) + A^\top p^{n+1} - A^\top p^*, v^* - v^{n+1}\rangle \geq 0.$$

Отсюда

$$\langle (\Phi + B)(v^{n+1} - v^*), v^* - v^{n+1}\rangle + \langle p^{n+1} - p^*, Av^* - a + a - Av^{n+1}\rangle \geq 0.$$

С учетом $\langle p^{n+1} - p^*, Av^* - a\rangle \geq 0$ и положительной полуопределенности матрицы $\Phi + B \geq 0$ имеем

$$\langle p^{n+1} - p^*, a - Av^{n+1}\rangle \geq 0. \tag{3.1.9}$$

Из (3.1.7) при $p = p^*$ имеем

$$\langle p^{n+1} - p^n, p^* - p^{n+1}\rangle - \alpha\langle Av^{n+1} - a, p^* - p^{n+1}\rangle \geq 0.$$

Сопоставляя полученное неравенство с (3.1.9), имеем

$$\langle p^{n+1} - p^n, p^* - p^{n+1}\rangle \geq 0.$$

С помощью тождества (2.9.14) разложим скалярное произведение

$$|p^{n+1} - p^*|^2 + |p^{n+1} - p^n|^2 \le |p^n - p^*|^2. \tag{3.1.10}$$

Просуммируем (3.1.10) от $n = 0$ до $n = N$:

$$|p^{N+1} - p^*|^2 + \sum_{k=0}^{k=N} |p^{k+1} - p^k|^2 \le |p^0 - p^*|^2.$$

Из полученного неравенства следует ограниченность траектории $|p^{N+1} - p^*|^2 \le |p^0 - p^*|^2$, а также сходимость ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |p^{k+1} - p^k|^2 < \infty$ и, следовательно, стремление к нулю величины $|p^{n+1} - p^n|^2 \to 0$, $n \to \infty$.

Так как последовательность p^n ограничена по доказанному, а v^n ограничена по условиям теоремы, то существует элемент p', v' такой, что $p^{n_i} \to p'$, $v^{n_i} \to v'$ при $n_i \to \infty$ и при этом $|p^{n_i+1} - p^{n_i}|^2 \to 0$.

Рассмотрим соотношения (3.1.6) для всех $n_i \to \infty$ и, перейдя к пределу, получим

$$\begin{aligned}
&v' \in \mathrm{Argmin}\left\{\Psi(v', w) + (1/2\alpha)|\pi_+(p' + \alpha(Av' - a))|^2 - (1/2\alpha)|p'|^2 \mid \forall w \ge 0\right\}, \\
&\pi_+(p' + \alpha(Av' - a)) = p'.
\end{aligned}$$

Поскольку эти соотношения эквивалентны (3.1.2), то $p' = p^* \in \mathbb{R}^n_+$, т.е. любая предельная точка последовательности p^n является решением задачи. Условие монотонности убывания величины $|p^n - p^*|$ обеспечивает единственность предельной точки, т.е. сходимость $p^n \to p^*$ при $n \to \infty$. В отличие от p^n последовательность v^n может иметь много предельных точек и все они являются решениями исходной задачи. Теорема доказана. $\square$

3.2. Геометрическая интерпретация метода множителей

В методе множителей ключевую роль играет оператор $\pi_+(p+\alpha(Av(p)-a))-p$, определенный для всех $p \in \mathbb{R}^n_+$, где

$$v(p) \in V(p) = \{v(p) \mid v(p) \in \mathrm{Argmin}\{\mathcal{M}(v(p), w, p) \mid w \ge 0\}\}. \tag{3.2.1}$$

Напомним, что любой образ точечно-множественного отображения $V(p)$, как было установлено ранее, — выпуклое замкнутое множество (утверждение 2.4.4).

В пространстве трех переменных v, w, p проведем “плоскость”, проходящую через ось переменной p, и “прямую” $v = w$. В этой “плоскости” лежит граф $(V(p), p)$ отображения $V(p)$. На этом графе рассмотрим сужение оператора $\nabla_p \mathcal{M}(v, w, p) = \pi_+(p + \alpha(Av - a)) - p$, которое можно получить, если продифференцировать функцию $\mathcal{M}(v, w, p)$ по p. Убедимся, что множество $V(p)$ вложено в множество нулей уравнения $\pi_+(p+\alpha(Av-a))-p = 0$ относительно переменной v для любого фиксированного p. Действительно, пусть v' и v'' — две точки, взятые из $V(p)$. Тогда в силу (3.2.1) имеем

$$\begin{aligned}
&\langle \nabla_w \Psi(v', v') + A^\top \pi_+(p + \alpha(Av' - a)), w - v'\rangle \ge 0 \quad\ \ \forall w \ge 0, \\
&\langle \nabla_w \Psi(v'', v'') + A^\top \pi_+(p + \alpha(Av'' - a)), w - v''\rangle \ge 0 \quad \forall w \ge 0.
\end{aligned}$$

Полагая $w = v''$ в первом неравенстве и $w = v'$ — во втором, получим

$$\begin{aligned}
&\langle \nabla_w \Psi(v', v') - \nabla_w \Psi(v'', v''), v'' - v'\rangle + \langle \pi_+(p + \alpha(Av' - a)) - \\
&- \pi_+(p + \alpha(Av'' - a)), Av'' - a - Av' + a\rangle \ge 0.
\end{aligned}$$

Используя монотонность оператора $\nabla_w \Psi(v, v)$, т.е. фактически положительную полуопределенность матрицы $(\Phi + B) \geq 0$, имеем

$$\langle \pi_+(p + \alpha(Av' - a)) - \pi_+(p + \alpha(Av'' - a)), (p + \alpha(Av'' - a)) - (p + \alpha(Av' - a))\rangle \geq 0.$$

Далее, применяя легко проверяемое неравенство Н.В. Третьякова

$$\langle \pi_+(a) - \pi_+(b), a - b\rangle \geq |\pi_+(a) - \pi_+(b)|^2 \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}^n, \tag{3.2.2}$$

которое впервые появилось в работе [43], преобразуем последнее неравенство

$$\begin{aligned} 0 \;&\geq\; \langle \pi_+(p + \alpha(Av' - a)) - \pi_+(p + \alpha(Av'' - a)), (p + \alpha(Av' - a)) - (p + \alpha(Av'' - a))\rangle \geq \\ &\geq\; |\pi_+(p + \alpha(Av' - a)) - \pi_+(p + \alpha(Av'' - a))|^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\pi_+(p + \alpha(Av' - a)) = \pi_+(p + \alpha(Av'' - a)). \tag{3.2.3}$$

Таким образом, можно сформулировать следующее

Утверждение 3.2.1. *Оператор $\pi_+(p+\alpha(Av(p)-a))-p$ однозначно определен для любого $p \in \mathbb{R}^n_+$.*

Рассмотрим сужение функции $\mathcal{M}(v, w, p)$ на графе $(V(p), p)$, который лежит в "плоскости", проходящей через ось переменной p и "прямую" $v = w$, т.е. $\mathcal{M}(v, w, p) = (\Psi(v, w) + (1/2\alpha)|\pi_+(p+\alpha(Av-a))|^2-(1/2\alpha)|p|^2)|_{v=w, v(p)\in V(p)} = (1/2\alpha)|\pi_+(p+\alpha(Av(p)-a))|^2-(1/2\alpha)|p|^2$. Обозначим введенную функцию через $m(p) = (1/2\alpha)|\pi_+(p+\alpha(Av(p)-a))|^2-(1/2\alpha)|p|^2$. Структура функции $m(p)$ и равенство (3.2.3) позволяют нам сделать следующее утверждение.

Утверждение 3.2.2. *Вещественная функция $m(p)$ однозначно определена на $\mathbb{R}^n_+$.*

Интуиция подсказывает, что если $m(p)$ — дифференцируемая функция, то, по-видимому, ее градиент $\nabla m(p)$ совпадает с оператором $\pi_+(p + \alpha(Av(p) - a)) - p$. Не останавливаясь детально на этом факте, установим основное свойство этого оператора. Покажем, что оператор $\pi_+(p + \alpha(Av(p) - a)) - p$ является монотонным и, более того, обратно сильно монотонным [44, 21].

Возьмем две произвольные точки $p' \in \mathbb{R}^n_+$ и $p'' \in \mathbb{R}^n_+$; пусть им соответствуют две равновесные точки $v' \in V(p')$ и $v'' \in V(p'')$

$$\begin{aligned} &\langle \nabla_w \Psi(v', v') + A^\top \pi_+(p' + \alpha(Av' - a)), w - v'\rangle \geq 0 \qquad \forall w \geq 0, \\ &\langle \nabla_w \Psi(v'', v'') + A^\top \pi_+(p'' + \alpha(Av'' - a)), w - v''\rangle \geq 0 \quad \forall w \geq 0. \end{aligned}$$

Полагая $w = v''$ в первом неравенстве и $w = v'$ во втором, сложим оба неравенства, учитывая при этом положительную полуопределенность матрицы $\Phi + B \geq 0$:

$$\begin{aligned} &\langle \pi_+(p' + \alpha(Av' - a)) - \pi_+(p'' + \alpha(Av'' - a)), \\ &(p'' + \alpha(Av'' - a)) - p'' - (p' + \alpha(Av' - a)) + p'\rangle \geq 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} &\langle \pi_+(p' + \alpha(Av' - a)) - \pi_+(p'' + \alpha(Av'' - a)), (p' + \alpha(Av' - a)) - (p'' + \alpha(Av'' - a))\rangle - \\ &-\langle \pi_+(p' + \alpha(Av' - a)) - \pi_+(p'' + \alpha(Av'' - a)), p' - p''\rangle \leq 0. \end{aligned}$$

Используем неравенство (3.2.2); тогда

$$\begin{aligned} &|\pi_+(p' + \alpha(Av' - a)) - \pi_+(p'' + \alpha(Av'' - a))|^2 - \\ &-\langle \pi_+(p' + \alpha(Av' - a)) - \pi_+(p'' + \alpha(Av'' - a)), p' - p''\rangle \leq 0. \end{aligned}$$

Выделим полный квадрат

$$|\pi_+(p' + \alpha(Av' - a)) - \pi_+(p'' + \alpha(Av'' - a)) - (p' - p'')|^2 + \langle \pi_+(p' + \alpha(Av' - a)) -$$
$$- \pi_+(p'' + \alpha(Av'' - a)), p' - p''\rangle - |p' - p''|^2 \leq 0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} &\langle (\pi_+(p' + \alpha(Av' - a)) - p') - (\pi_+(p'' + \alpha(Av'' - a)) - p''), p' - p''\rangle \leq \\ &\leq -|(\pi_+(p' + \alpha(Av' - a)) - p') - (\pi_+(p'' + \alpha(Av'' - a)) - p'')|^2. \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Таким образом, установлено следующее утверждение.

Утверждение 3.2.3. *Оператор $\pi_+(p + \alpha(Av(p) - a)) - p$, где $v(p) \in V(p)$, является обратно сильно монотонным на $\mathbb{R}^n_+$.*

Введем обозначение $\nabla m(p) = \pi_+(p + \alpha(Av - a)) - p$; тогда (3.2.4) можно переписать в форме

$$\langle \nabla m(p') - \nabla m(p''), p' - p''\rangle \leq -|\nabla m(p') - \nabla m(p'')|^2. \tag{3.2.5}$$

Сопоставляя (3.2.5) и (3.2.2), можно видеть, что оператор $\nabla m(p)$ является обратно сильно монотонно убывающим, в то время как оператор проектирования $\pi_+(a)$ — обратно сильно монотонно возрастающим.

Если воспользоваться свойством обратной сильной монотонности (3.2.4), то сходимость метода множителей (3.1.6) может быть обоснована совсем просто. Действительно, из (3.1.4) и (3.1.6) имеем

$$\begin{aligned} |p^{n+1} - p^*|^2 &= |\pi_+(p^n - \alpha(Ax^{n+1} - a)) - \pi_+(p^* - \alpha(Ax^* - a))|^2 = \\ &= |\pi_+(p^n - \alpha(Ax^{n+1} - a)) - p^n - \pi_+(p^* - \alpha(Ax^* - a)) + p^* - (p^* - p^n)|^2 = \\ &= |\pi_+(p^n - \alpha(Ax^{n+1} - a)) - p^n - \pi_+(p^* - \alpha(Ax^* - a)) + \\ &+ p^*|^2 + 2\langle (\pi_+(p^n - \alpha(Ax^{n+1} - a)) - p^n) - \\ &- (\pi_+(p^* - \alpha(Ax^* - a)) - p^*), p^n - p^*\rangle + |p^n - p^*|^2. \end{aligned}$$

Учитывая (3.2.4), получим

$$|p^{n+1} - p^*|^2 + |\pi_+(p^n - \alpha(Ax^{n+1} - a)) - (\pi_+(p^* - \alpha(Ax^* - a))|^2 \leq |p^n - p^*|^2.$$

Суммирование полученных неравенств по n дает

$$|p^{N+1} - p^*|^2 + \sum_{k=0}^{k=N} |p^{k+1} - p^*|^2 \leq |p^0 - p^*|^2.$$

Из сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |p^{k+1} - p^*|^2 < \infty$ следует стремление к нулю величины $|p^{n+1} - p^*|^2 \to 0$, $n \to \infty$, т.е. сходимость процесса.

Утверждение 3.2.4. *Условие обратной сильной монотонности (3.2.4) гарантирует сходимость (3.1.6).*

Метод (3.1.6) можно рассматривать как метод простой итерации решения операторного уравнения (3.1.4), как метод решения вариационного неравенства (3.1.7) или как градиентный метод максимизации функции $m(p)$.

3.3. Экстрапроксимальный метод

Модифицированная функция Лагранжа, лежащая в основе метода (3.1.6), поддерживает сходимость этого метода. Однако эта функция не является линейной по двойственным переменным и поэтому теряет свойства декомпозиции, если этими свойствами обладала исходная задача, например, имела блочно-сепарабельную структуру. Это обстоятельство особенно плохо отражается на игровых задачах, поскольку последние всегда имеют декомпозиционную структуру и большую размерность.

Итак, рассмотрим нашу базовую равновесную задачу

$$\langle \Phi v^* + \varphi, v^* \rangle + \frac{1}{2}\langle Bv^*, v^* \rangle \leq \langle \Phi v^* + \varphi, w \rangle + \frac{1}{2}\langle Bw, w \rangle \tag{3.3.1}$$

для всех $w \in D$, где $D = \{w \mid Aw \leq a,\ \ w \geq 0\}$. Будем считать, что в равновесном состоянии при $v = v^*$ точка $w = v^*$, $p = p^*$ является седловой для функции Лагранжа $\mathcal{L}(v^*, w, p) = \Psi(v^*, w) + \langle p, Aw - a \rangle$ $\forall w \geq 0$, $p \geq 0$, где $\Psi(v^*, w) = \langle \Phi^* v + \varphi, w \rangle + (1/2)\langle Bw, w \rangle - \langle \Phi v^* + \varphi, v^* \rangle - (1/2)\langle Bv^*, v^* \rangle$ $\forall w \in D$. Последнее означает, что выполняется система неравенств

$$\mathcal{L}(v^*, v^*, p) \leq \mathcal{L}(v^*, v^*, p^*) \leq \mathcal{L}(v^*, w, p^*) \quad \forall w \geq 0,\ \forall p \geq 0. \tag{3.3.2}$$

В этих условиях рассмотрим аналог процесса (3.1.6), в основе которого лежит обычная функция Лагранжа:

$$\begin{array}{lcl} \bar{p}^n & = & \pi_+(p^n + \alpha(Av^n - a)), \\ v^{n+1} & \in & \mathrm{Argmin}\{\mathcal{L}(v^{n+1}, w, \bar{p}^n) \mid w \geq 0\}, \\ p^{n+1} & = & \pi_+(p^n + \alpha(Av^{n+1} - a)). \end{array}$$

В этом методе оператор $\pi_+(p + \alpha(Av(p) - a)) - p$ уже не будет ни однозначным, ни обратно сильно монотонным, поэтому двух полушагов по переменной p явно недостаточно, чтобы стабилизировать процесс. Чтобы придать методу регулярный характер и обеспечить его устойчивость, регуляризируем функцию Лагранжа по переменной w:

$$\begin{array}{lcl} \bar{p}^n & = & \pi_+(p^n + \alpha(Av^n - a)), \\ v^{n+1} & \in & \mathrm{Argmin}\{(1/2)|w - v^n|^2 + \mathcal{L}(v^{n+1}, w, \bar{p}^n) \mid w \geq 0\}, \\ p^{n+1} & = & \pi_+(p^n + \alpha(Av^{n+1} - a)), \end{array} \tag{3.3.3}$$

где $\mathcal{L}(v, w, p) = \Psi(v, w) + \langle p, Aw - a \rangle$ $\forall v \geq 0$, $w \geq 0$, $p \geq 0$ и $\Psi(v, w) = \langle \Phi v + \varphi, w \rangle + (1/2)\langle Bw, w \rangle - \langle \Phi v + \varphi, v \rangle - (1/2)\langle Bv, v \rangle$ $\forall v, w \in D$. Для седловых задач идея экстрапроксимального метода была впервые предложена в [35], а для равновесных задач — в [45]. Идея экстраградиентного метода для седловых задач впервые рассматривалась в работах [31, 32].

Представим процесс (3.3.3) в форме вариационных неравенств

$$\langle \bar{p}^n - p^n - \alpha(Av^n - a), p - \bar{p}^n \rangle \geq 0 \qquad \forall p \geq 0, \tag{3.3.4}$$

$$\langle p^{n+1} - p^n - \alpha(Av^{n+1} - a), p - p^{n+1} \rangle \geq 0 \qquad \forall p \geq 0, \tag{3.3.5}$$

$$\langle v^{n+1} - v^n + \alpha((\Phi + B)v^{n+1} + \varphi + A^\top \bar{p}^n), w - v^{n+1} \rangle \geq 0 \tag{3.3.6}$$

для всех $w \in D$. Выпишем оценку отклонения векторов p^{n+1} и $\bar{p}^n$ за один шаг метода

$$|p^{n+1} - \bar{p}^n| \leq \alpha|A(v^n - v^{n+1})| \leq \alpha|A||v^{n+1} - v^n|. \tag{3.3.7}$$

Покажем, что процесс (3.3.3) сходится монотонно по норме к одному из равновесных решений.

Теорема 3.3.1. *Если множество решений задачи (3.3.1) непусто, матрица $\Phi + B$ положительно полуопределена, то последовательность v^n, p^n, порожденная методом (3.3.3) с выбором шага α_n из условия $0 < \alpha < (\sqrt{2}|A|)^{-1}$, сходится монотонно по норме к одному из равновесных решений, т.е. $v^n, p^n \to v^*, p^*$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Положим $w = v^*$ в (3.3.6)

$$\langle v^{n+1} - v^n, v^* - v^{n+1}\rangle + \alpha\langle(\Phi + B)v^{n+1} + \varphi + A^\top \bar{p}^n, v^* - v^{n+1}\rangle \geq 0$$

и $w = v^{n+1}$ в правом неравенстве системы (3.3.2); тогда

$$\langle(\Phi + B)v^* + \varphi + A^\top p^*, v^{n+1} - v^*\rangle \geq 0.$$

Сложим оба неравенства

$$\begin{aligned}\langle v^{n+1} - v^n, v^* - v^{n+1}\rangle \;&+\; \alpha\langle(\Phi + B)(v^{n+1} - v^*), v^* - v^{n+1}\rangle + \\ &+\; \langle \bar{p}^n - p^*, (Av^* - a) - (Av^{n+1} - a)\rangle \geq 0.\end{aligned}$$

Учитывая, что $\langle \bar{p}^n, Av^* - a\rangle \leq 0$, представим последнее неравенство в виде

$$\begin{aligned}\langle v^{n+1} - v^n, v^* - v^{n+1}\rangle \;&+\; \alpha\langle(\Phi + B)(v^{n+1} - v^*), v^* - v^{n+1}\rangle - \\ &-\; \langle \bar{p}^n - p^*, Av^{n+1} - a\rangle \geq 0.\end{aligned} \tag{3.3.8}$$

Рассмотрим неравенства (3.3.4) и (3.3.5). Положим $p = p^*$ в (3.3.5) и $p = p^{n+1}$ в (3.3.4):

$$\begin{aligned}&\langle p^{n+1} - p^n, p^* - p^{n+1}\rangle &-&\quad \alpha\langle Av^{n+1} - a, p^* - p^{n+1}\rangle \geq 0,\\ &\langle \bar{p}^n - p^n, p^{n+1} - \bar{p}^n\rangle &+&\quad \alpha\langle A(v^{n+1} - v^n), p^{n+1} - \bar{p}^n\rangle - \alpha\langle Av^{n+1} - a, p^{n+1} - \bar{p}^n\rangle \geq 0.\end{aligned} \tag{3.3.9}$$

Используя (3.3.7), оценим второе слагаемое в этом неравенстве

$$\langle \bar{p}^n - p^n, p^{n+1} - \bar{p}^n\rangle + \alpha^2|A|^2|v^{n+1} - v^n|^2 - \alpha\langle Av^{n+1} - a, p^{n+1} - \bar{p}^n\rangle \geq 0. \tag{3.3.10}$$

Сложим неравенства (3.3.9) и (3.3.10):

$$\begin{aligned}&\langle p^{n+1} - p^n, p^* - p^{n+1}\rangle + \langle \bar{p}^n - p^n, p^{n+1} - \bar{p}^n\rangle + \\ &+\alpha^2|A|^2|v^{n+1} - v^n|^2 - \alpha\langle Av^{n+1} - a, p^* - \bar{p}^n\rangle \geq 0.\end{aligned} \tag{3.3.11}$$

Сложим неравенства (3.3.8) и (3.3.11), при этом учтем положительную полуопределенность оператора $\langle(\Phi + B)v, v\rangle \geq 0 \;\forall v \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}&\langle v^{n+1} - v^n, v^* - v^{n+1}\rangle + \langle p^{n+1} - p^n, p^* - p^{n+1}\rangle + \\ &+\langle \bar{p}^n - p^n, p^{n+1} - \bar{p}^n\rangle + \alpha^2|A|^2|v^{n+1} - v^n|^2 \geq 0.\end{aligned}$$

С помощью тождества (2.9.14) три первых скалярных произведения представим в виде суммы квадратов

$$\begin{aligned}|v^{n+1} - v^*|^2 \;&+\; |p^{n+1} - p^*|^2 + d|v^{n+1} - v^n|^2 + |p^{n+1} - \bar{p}^n|^2 + \\ &+\; |\bar{p}^n - p^n|^2 \leq |v^n - v^*|^2 + |p^n - p^*|^2,\end{aligned}$$

где $d = 1 - 2\alpha^2|A|^2 > 0$ по условиям теоремы. Просуммируем полученное неравенство от $n = 0$ до $n = N$:

$$\begin{aligned}&|v^{N+1} - v^*|^2 + |p^{N+1} - p^*|^2 + d\sum_{k=0}^{k=N}|v^{k+1} - v^k|^2 + \\ &+\sum_{k=0}^{k=N}|p^{k+1} - \bar{p}^k|^2 + \sum_{k=0}^{k=N}|\bar{p}^k - v^k|^2 \leq |v^0 - v^*|^2 + |p^0 - p^*|^2.\end{aligned}$$

Из полученного неравенства следует ограниченность траектории, сходимость рядов и стремление к нулю величин $|v^{n+1}-v^n|^2 \to 0$, $|p^{n+1}-p^n|^2 \to 0$, $n \to \infty$. Этого достаточно, чтобы завершить доказательство по аналогии с теоремой 3.1.1. Теорема доказана. $\square$

Процесс (3.3.3) здесь рассмотрен с фиксированным выбором шага α только из соображений простоты изложения. Конечно, его легко переформулировать в метод с выбором шага из условия выполнения некоторого неравенства.

В изложенном подходе на каждом шаге процесса приходится решать равновесную вспомогательную задачу, что, вообще говоря, не является простым делом. Поэтому желание заменить равновесную задачу на пару задач оптимизации представляется естественным и нормальным. Это можно сделать следующим образом [45]:

$$\begin{array}{rcl} \bar{p}^n &=& \pi_+(p^n+\alpha_n(Av^n-a)), \\ \bar{v}^n &=& \pi_+(v^n-\alpha_n((\Phi+B)v^n+\varphi+A^\top\bar{p}^n)), \\ p^{n+1} &=& \pi_+(p^n+\alpha_n(A\bar{v}^n-a)), \\ v^{n+1} &=& \pi_+(v^n-\alpha_n((\Phi+B)\bar{v}^n+\varphi+A^\top\bar{p}^n)). \end{array}$$

Сходимость этого метода основана также на седловых свойствах функции $\Psi(v,w)$.

3.4. Метод множителей и экстрапроксимальный метод для игровых задач

В параграфе 2.8 мы показали, что если равновесная задача (2.7.1) имеет специальную структуру, то она приводится к игре двух лиц с ненулевой суммой вида

$$\begin{array}{rcl} x_1^* &\in& \mathrm{Argmin}\{\langle x_1, C_1x_2^*+c_1\rangle + (1/2)\langle B_1x_1,x_1\rangle \mid A_1x_1 \le a_1,\ x_1 \ge 0\}, \\ x_2^* &\in& \mathrm{Argmin}\{\langle C_2x_1^*+c_2, x_2\rangle + (1/2)\langle B_2x_2,x_2\rangle \mid A_2x_2 \le a_2,\ x_2 \ge 0\}. \end{array} \quad (3.4.1)$$

В равновесном состоянии, т.е. при $v=v^*=(x_1^*,x_2^*)$, введем функции Лагранжа для каждой из задач

$$\mathcal{L}_1(x_1,x_2^*,p_1) = \Psi_1(x_1,x_2^*) + \langle p_1, A_1x_1-a_1\rangle \quad \forall x_1 \ge 0,\ p_1 \ge 0,$$
$$\mathcal{L}_2(x_1^*,x_2,p_2) = \Psi_2(x_1^*,x_2) + \langle p_2, A_2x_2-a_2\rangle \quad \forall x_2 \ge 0,\ p_2 \ge 0,$$

где

$$\Psi_1(x_1,x_2^*) = \langle x_1, C_1x_2^*+c_1\rangle + \frac{1}{2}\langle B_1x_1,x_1\rangle - \langle x_2^*, C_1x_2^*+c_1\rangle - \frac{1}{2}\langle B_1x_2^*,x_2^*\rangle \quad \forall x_1 \ge 0,$$

$$\Psi_2(x_1^*,x_2) = \langle C_2x_1^*+c_2, x_2\rangle + \frac{1}{2}\langle B_2x_2,x_2\rangle - \langle C_2x_1^*+c_2, x_1^*\rangle - \frac{1}{2}\langle B_2x_1^*,x_1^*\rangle \quad \forall x_2 \ge 0.$$

Точки x_1^*, p_1^* и x_2^*, p_2^* назовем седловыми для функций $\mathcal{L}_1(x_1,x_2^*,p_1)$ и $\mathcal{L}_2(x_1^*,x_2,p_2)$, если выполняются неравенства

$$\mathcal{L}_1(x_1^*,x_2^*,p_1) \le \mathcal{L}_1(x_1^*,x_2^*,p_1^*) \le \mathcal{L}_1(x_1,x_2^*,p_1^*) \quad \forall x_1 \ge 0,\ \forall p_1 \ge 0, \quad (3.4.2)$$

$$\mathcal{L}_2(x_1^*,x_2^*,p_2) \le \mathcal{L}_2(x_1^*,x_2^*,p_2^*) \le \mathcal{L}_2(x_1^*,x_2,p_2^*) \quad \forall x_2 \ge 0,\ \forall p_2 \ge 0. \quad (3.4.3)$$

Наряду с функциями Лагранжа $\mathcal{L}_1(x_1,x_2^*,p_1)$, $\mathcal{L}_2(x_1^*,x_2,p_2)$ введем модифицированные функции Лагранжа, отвечающие состоянию равновесия x_1^*,x_2^*,p_1^*,p_2^*

$$\mathcal{M}_1(x_1,x_2^*,p_1) = \Psi_1(x_1,x_2^*) + \frac{1}{2\alpha}|\pi_+(p_1+\alpha(A_1x_1-a_1)|^2 - \frac{1}{2\alpha}|p_1|^2 \ \forall x_1 \ge 0,\ p_1 \ge 0,$$
$$\mathcal{M}_2(x_1^*,x_2,p_2) = \Psi_2(x_1^*,x_2) + \frac{1}{2\alpha}|\pi_+(p_2+\alpha(A_2x_2-a_2))|^2 - \frac{1}{2\alpha}|p_2|^2 \ \forall x_1 \ge 0,\ p_2 \ge 0.$$

Точки x_1^*, p_1^* и x_2^*, p_2^* также являются седловыми для модифицированных функций Лагранжа, т.е. удовлетворяют системе неравенств

$$\mathcal{M}_1(x_1^*, x_2^*, p_1) \le \mathcal{M}_1(x_1^*, x_2^*, p1^*) \le \mathcal{M}_1(x_1, x_2^*, p_1^*) \tag{3.4.4}$$

для всех $x_1 \ge 0$, $p_1 \ge 0$ и

$$\mathcal{M}_2(x_1^*, x_2^*, p_2) \le \mathcal{M}_2(x_1^*, x_2^*, p_2^*) \le \mathcal{M}_2(x_1^*, x_2, p_2^*) \tag{3.4.5}$$

для всех $x_2 \ge 0$, $p_2 \ge 0$.

1) Метод множителей. Систему неравенств (3.4.4), (3.4.5) перепишем в эквивалентном виде

$$\begin{array}{rcl} x_1^* & \in & \mathrm{Argmin}\{\Psi_1(x_1, x_2^*) + (1/2\alpha)|\pi_+(p_1^* + \alpha(A_1x_1 - a_1)|^2 - (1/2\alpha)|p_1^*|^2 \quad \forall x_1 \ge 0, \\ p_1^* & = & \pi_+(p_1^* + \alpha(A_1x_1^* - a_1)), \\ x_2^* & \in & \mathrm{Argmin}\{\Psi_2(x_1^*, x_2) + (1/2\alpha)|\pi_+(p_2^* + \alpha(A_2x_2^* - a_2))|^2 - (1/2\alpha)|p_2^*|^2 \;\; \forall x_2 \ge 0, \\ p_2^* & = & \pi_+(p_2^* + \alpha(A_2x_2^* - a_2)). \end{array} \tag{3.4.6}$$

Для решения этой системы применим метод множителей в форме

$$\begin{array}{rcl} x_1^{n+1} & \in & \mathrm{Argmin}\{\mathcal{M}_1(x_1, x_2^{n+1}, p_1^n) \mid x_1 \ge 0\}, \\ x_2^{n+1} & \in & \mathrm{Argmin}\{\mathcal{M}_2(x_1^{n+1}, x_2, p_2^n) \mid x_2 \ge 0\}, \\ p_1^{n+1} & = & \pi_+(p_1^n + \alpha(A_1x_1^{n+1} - a_1)), \\ p_2^{n+1} & = & \pi_+(p_2^n + \alpha(A_2x_2^{n+1} - a_2)), \end{array} \tag{3.4.7}$$

где

$$\mathcal{M}_1(x_1, x_2^{n+1}, p_1^n) = \Psi_1(x_1, x_2^{n+1}) + \frac{1}{2\alpha}|\pi_+(p_1^n + \alpha(A_1x_1 - a_1))|^2 - \frac{1}{2\alpha}|p_1^n|^2 \;\; \forall x_1 \ge 0,$$
$$\mathcal{M}_2(x_1^{n+1}, x_2, p_2^n) = \Psi_2(x_1^{n+1}, x_2) + \frac{1}{2\alpha}|\pi_+(p_2^n + \alpha(A_2x_2 - a_2))|^2 - \frac{1}{2\alpha}|p_2^n|^2 \;\; \forall x_2 \ge 0.$$

Представим метод (3.4.7) в форме вариационных неравенств

$$\begin{array}{ll} \langle C_1x_2^{n+1} + c_1 + B_1x_1^{n+1} + A_1^\top p_1^{n+1}, x_1 - x_1^{n+1}\rangle \ge 0 & \forall x_1 \ge 0, \\ \langle C_2x_1^{n+1} + c_2 + B_2x_2^{n+1} + A_2^\top p_2^{n+1}, x_2 - x_2^{n+1}\rangle \ge 0 & \forall x_2 \ge 0, \\ \langle p_1^{n+1} - p_1^n - \alpha(A_1x_1^{n+1} - a_1), p_1 - p_1^{n+1}\rangle \ge 0 & \forall p_1 \ge 0, \\ \langle p_2^{n+1} - p_2^n - \alpha(A_2x_2^{n+1} - a_2), p_2 - p_2^{n+1}\rangle \ge 0 & \forall p_2 \ge 0. \end{array} \tag{3.4.8}$$

В системе обозначений задачи (2.7.1) – (2.7.2) перепишем полученные неравенства в векторно-матричной форме

$$(x_1 - x_1^{n+1}, x_2 - x_2^{n+1}) \times \left\{ \left[\begin{pmatrix} 0 & C_1 \\ C_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1^{n+1} \\ x_2^{n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathrm{c}_1 \\ \mathrm{c}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_1^\top & 0 \\ 0 & A_2^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^{n+1} \\ p_2^{n+1} \end{pmatrix} \right\} \ge 0$$

для всех $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$ и

$$(p_1 - p_1^{n+1}, p_2 - p_2^{n+1}) \times \left\{ \begin{pmatrix} p_1^{n+1} - p_1^n \\ p_2^{n+1} - p_2^n \end{pmatrix} - \alpha \left[\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{n+1} \\ x_2^{n+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right] \right\} \ge 0$$

для всех $p_1 \ge 0$, $p_2 \ge 0$.

Используя соответствующие обозначения для матриц и векторов из (2.7.1) – (2.7.2), полученные неравенства перепишем в форме

$$\langle (\Phi + B)v^{n+1} + \varphi + A^\top p^{n+1}, w - v^{n+1}\rangle \geq 0 \qquad \forall w \geq 0, \tag{3.4.9}$$

$$\langle p^{n+1} - p^n - \alpha(Av^{n+1} - a), p - p^{n+1}\rangle \geq 0 \qquad \forall p \geq 0. \tag{3.4.10}$$

Очевидно, что эти неравенства совпадают с (3.1.7) и (3.1.8). Следовательно, если системные матрицы $\Phi + B$ и A подчинены условиям теоремы 3.1.1, то сходимость метода (3.4.7) следует из этой теоремы.

2) Экстрапроксимальный метод. Систему неравенств (3.4.2), (3.4.3) перепишем в виде

$$\begin{array}{rcl}
x_1^* & \in & \mathrm{Argmin}\{\langle x_1, C_1x_2^* + c_1\rangle + (1/2)\langle B_1x_1, x_1\rangle + \langle p_1, A_1x_1^* - a_1\rangle \mid x_1 \geq 0\},\\
p_1^* & = & \pi_+(p_1^* + \alpha(A_1x_1^* - a_1)),\\
x_2^* & \in & \mathrm{Argmin}\{\langle C_2x_1^* + c_2, x_2\rangle + (1/2)\langle B_2x_2, x_2\rangle + \langle p_2, A_2x_2^* - a_2\rangle \mid x_2 \geq 0\},\\
p_2^* & = & \pi_+(p_2^* + \alpha(A_2x_2^* - a_2)).
\end{array} \tag{3.4.11}$$

Для решения системы (3.4.11) применим экстрапроксимальный метод (3.3.3):

$$\begin{array}{rcl}
\bar p_1^n & = & \pi_+(p_1^n + \alpha(A_1x_1^n - a_1)),\\
\bar p_2^n & = & \pi_+(p_2^n + \alpha(A_2x_1^n - a_2)),\\
x_1^{n+1} & \in & \mathrm{Argmin}\{(1/2)|x_1 - x_1^n|^2 + \alpha\mathcal{L}_1(x_1, x_2^{n+1}, \bar p_1^n) \mid x_1 \geq 0\},\\
x_2^{n+1} & \in & \mathrm{Argmin}\{(1/2)|x_2 - x_2^n|^2 + \alpha\mathcal{L}_2(x_1^{n+1}, x_2, \bar p_2^n) \mid x_2 \geq 0\},\\
p_1^{n+1} & = & \pi_+(p_1^n + \alpha(A_1x_1^{n+1} - a_1)),\\
p_2^{n+1} & = & \pi_+(p_2^n + \alpha(A_2x_2^{n+1} - a_2)),
\end{array} \tag{3.4.12}$$

где

$$\mathcal{L}_1(x_1, x_2^{n+1}, \bar p_1^n) = \Psi_1(x_1, x_2^{n+1}) + \langle \bar p_1^n, A_1x_1 - a_1\rangle \ \ \forall x_1 \geq 0,$$
$$\mathcal{L}_2(x_1^{n+1}, x_2, \bar p_2^n) = \Psi_2(x_1^{n+1}, x_2) + \langle \bar p_2^n, A_2x_2 - a_2\rangle \ \ \forall x_2 \geq 0.$$

Длина шага α в этом процессе выбирается из некоторого фиксированного интервала. Представим метод (3.4.12) в форме вариационных неравенств

$$\begin{array}{ll}
\langle \bar p_1^n - p_1^n - \alpha(A_1x_1^{n+1} - a_1), p_1 - \bar p_1^n\rangle \geq 0 & \forall p_1 \geq 0,\\
\langle \bar p_2^n - p_2^n - \alpha(A_2x_2^{n+1} - a_2), p_2 - \bar p_2^n\rangle \geq 0 & \forall p_2 \geq 0,\\
\langle x_1^{n+1} - x_1^n + \alpha(C_1x_2^{n+1} + c_1 + B_1x_1^{n+1} + A_1^\top \bar p_1^n), x_1 - x_1^{n+1}\rangle \geq 0 & \forall x_1 \geq 0,\\
\langle x_2^{n+1} - x_2^n + \alpha(C_2x_1^{n+1} + c_2 + B_2x_2^{n+1} + A_2^\top \bar p_2^n), x_2 - x_2^{n+1}\rangle \geq 0 & \forall x_2 \geq 0,\\
\langle p_1^{n+1} - p_1^n - \alpha(A_1x_1^{n+1} - a_1), p_1 - p_1^{n+1}\rangle \geq 0 & \forall p_1 \geq 0,\\
\langle p_2^{n+1} - p_2^n - \alpha(A_2x_2^{n+1} - a_2), p_2 - p_2^{n+1}\rangle \geq 0 & \forall p_2 \geq 0.
\end{array} \tag{3.4.13}$$

Используя векторно-матричные обозначения (2.7.1), (2.7.2), систему неравенств (3.4.13) можно представить в агрегированном виде

$$\begin{array}{ll}
\langle \bar p^n - p^n - \alpha(Av^n - a), p - \bar p^n\rangle \geq 0 & \forall p \geq 0,\\
\langle v^{n+1} - v^n + \alpha((\Phi + B)v^{n+1} + \varphi + A^\top \bar p^n), w - v^{n+1}\rangle \geq 0 & \forall w \geq 0,\\
\langle p^{n+1} - p^n - \alpha(Av^{n+1} - a), p - p^{n+1}\rangle \geq 0 & \forall p \geq 0.
\end{array}$$

Очевидно, что полученная система неравенств совпадает с (3.3.4) – (3.3.6) и поэтому сходимость процесса (3.4.12) следует из теоремы 3.3.1.

3.5. Метод множителей для равновесных задач со связанными ограничениями

Вернемся к задаче со связанными ограничениями (2.2.10):

$$v^* \in \mathrm{Argmin}\{\langle \Phi v^* + \varphi, w\rangle + (1/2)\langle Bw, w\rangle \mid \langle v^*, A_i w\rangle \le \beta_i,\ w \ge 0\},\quad i = 1, 2, \dots, m. \tag{3.5.1}$$

Введем обозначения: $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$, $\langle v, Aw\rangle - \beta = (\langle v, A_1 w\rangle - \beta_1, \langle v, A_2 w\rangle - \beta_2, \dots, \dots, \langle v, A_m w\rangle - \beta_m)$ и при значении параметра $v = v^*$, т.е. в равновесном состоянии, выпишем функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(v^*, w, \lambda) = \Psi(v^*, w) + \langle \lambda, (\langle v^*, Aw\rangle - \beta)\rangle\ \forall w \ge 0,\ \lambda \ge 0.$$

Если задача (3.5.1) достаточно регулярна (например, в смысле условия Слейтера), то точка v^*, λ^* является седловой для этой функции. Однако эта точка будет седловой и для модифицированной функции Лагранжа, которая при $v = v^*$ имеет вид

$$\mathcal{M}(v^*, w, \lambda) = \Psi(v^*, w) + \frac{1}{2\alpha}|\pi_+(\lambda + \alpha(\langle v^*, Aw\rangle - \beta))|^2 - \frac{1}{2\alpha}|\lambda|^2 \quad \forall w \ge 0,\ \lambda \ge 0,$$

где $\Psi(v^*, w) = \langle \Phi v^* + \varphi, w\rangle + (1/2)\langle Bw, w\rangle - \langle \Phi v^* + \varphi, v^*\rangle - (1/2)\langle Bv^*, v^*\rangle\ \forall w \in \mathbb{R}^n_+$ — функция сдвига относительно диагонали квадрата $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n n_+$.

Поскольку точка v^*, λ^* — седловая, то по определению выполняется система неравенств

$$\mathcal{M}(v^*, v^*, \lambda) \le \mathcal{M}(v^*, v^*, \lambda^*) \le \mathcal{M}(v^*, w, \lambda^*) \qquad \forall w \ge 0, \quad \lambda \ge 0. \tag{3.5.2}$$

Выпишем вариационные неравенства, соответствующие системе (3.5.2). Для того чтобы функцию $\mathcal{M}(v^*, w, \lambda)$ было достаточно легко продифференцировать, запишем ее квадратичные члены в координатной форме

$$\mathcal{M}(v^*, w, \lambda) = \Psi(v^*, w) + \frac{1}{2\alpha}\sum_{i=1}^{m}((\lambda_i + \alpha(\langle v^*, A_i w\rangle - \beta_i))_+)^2 - \frac{1}{2\alpha}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^2$$

для всех $w \ge 0$, $\lambda_i \ge 0$, затем, дифференцируя ее по переменным w и λ, получим

$$\begin{aligned} &\langle (\Phi + B)v^* + \varphi + (\sum_{i=1}^{m}(\lambda_i^* + \alpha(\langle v^*, A_i v^*\rangle - \beta_i))_+ A_i)v^*, w - v^*\rangle \ge 0, \\ &\langle (\lambda_i^* + \alpha(\langle v^*, A_i v^*\rangle - \beta_i))_+ - \lambda_i^*, \lambda_i - \lambda_i^*\rangle \le 0 \end{aligned} \tag{3.5.3}$$

для всех $w \ge 0$, $\lambda_i \ge 0$, где $i = 1, 2, ..., m$. Перепишем последнее неравенство в векторной форме

$$\langle \pi_+(\lambda^* + \alpha(\langle v^*, Av^*\rangle - \beta)) - \lambda^*, \lambda - \lambda^*\rangle \le 0 \qquad \forall \lambda \ge 0. \tag{3.5.4}$$

Используя тот факт, что вариационное неравенство $\langle Fx, y - x\rangle \ge 0\ \forall y \in Q$ и операторное уравнение $x = \pi_Q(x - \alpha F(x))$ эквивалентны, последнее неравенство представим в форме операторного уравнения

$$\lambda^* = \pi_+(\lambda^* + \pi_+(\lambda^* + \alpha(\langle v^*, Av^*\rangle - \beta)\lambda^*)),$$

что равносильно (сравним с (3.1.3) и (3.1.4))

$$\lambda^* = \pi_+(\lambda^* + \alpha(\langle v^*, Av^*\rangle - \beta)). \tag{3.5.5}$$

Используя (3.5.5), перепишем первое неравенство из (3.5.3) в виде

$$\langle (\Phi + B)v^* + \varphi + (\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^* A_i)v^*, w - v^*\rangle \ge 0 \qquad \forall w \ge 0. \tag{3.5.6}$$

Напомним, что A_i, $i = 1, 2, \dots, m$, — симметричные положительно полуопределенные матрицы. Используя тождество (2.15.5), отдельно оценим третий член в полученном неравенстве

$$\begin{aligned}
&\left\langle \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i^* A_i \right) v^*, w - v^* \right\rangle = \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \langle A_i v^*, w - v^* \rangle \leq \\
&\leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \langle A_i w, w \rangle - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \langle A_i v^*, v^* \rangle - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \langle A_i (w - v^*), w - v^* \rangle \leq \\
&\leq \frac{1}{2} \langle \lambda^*, (\langle Aw, w \rangle - \beta) \rangle - \frac{1}{2} \langle \lambda^*, (\langle Av^*, v^* \rangle - \beta) \rangle.
\end{aligned}$$

Тогда неравенство (3.5.6) можно представить как

$$\langle (\Phi + B) v^* + \varphi, w - v^* \rangle + \frac{1}{2} \langle \lambda^*, (\langle Aw, w \rangle - \beta) \rangle \geq 0 \quad \forall w \geq 0. \tag{3.5.7}$$

Эта оценка далее будет использована при обосновании сходимости методов.

Таким образом, после этой вводной части можно заключить, что исходная задача (3.5.1) приведена к формату (3.5.5), (3.5.6) и для решения этой системы мы используем идею метода множителей (3.1.6):

$$\begin{array}{rcl} \lambda^{n+1} & = & \pi_+ (\lambda^n + \alpha (\langle v^{n+1}, A v^{n+1} \rangle - \beta)), \\ v^{n+1} & \in & \mathrm{Argmin} \{ \mathcal{M}(v^{n+1}, w, \lambda^n) \mid w \geq 0 \}. \end{array} \tag{3.5.8}$$

Реализация этого процесса предполагает, что модифицированная функция Лагранжа

$$\mathcal{M}(v, w, \lambda) = \Psi(v, w) + \frac{1}{2\alpha} \sum_{i=1}^m ((\lambda_i + \alpha (\langle v, A_i w \rangle - \beta_i))_+)^2 - \frac{1}{2\alpha} \sum_{i=1}^m \lambda_i^2$$

выпукла по w для любых $v \geq 0$, $\lambda_i \geq 0$ и множество неподвижных точек вспомогательной равновесной задачи непусто при любом $\lambda \in \mathbb{R}^n_+$. Для решения вспомогательной задачи можно использовать любые методы, развитые в первой части этой работы.

Представим процесс (3.5.8) в форме

$$\langle (\Phi + B) v^{n+1} + \varphi + (\sum_{i=1}^m (\lambda_i^n + \alpha (\langle v^{n+1}, A_i v^{n+1} \rangle - \beta_i))_+ A_i) v^{n+1}, w - v^{n+1} \rangle \geq 0 \ \forall w \geq 0, \tag{3.5.9}$$

$$\lambda_i^{n+1} = (\lambda_i^n + \alpha (\langle v^{n+1}, A_i v^{n+1} \rangle - \beta_i))_+. \tag{3.5.10}$$

Затем, учитывая (3.5.10) в (3.5.9), получим

$$\langle (\Phi + B) v^{n+1} + \varphi + (\sum_{i=1}^m \lambda_i^{n+1} A_i) v^{n+1}, w - v^{n+1} \rangle \geq 0 \qquad \forall w \geq 0, \tag{3.5.11}$$

$$\langle \lambda^{n+1} - \lambda^n - \alpha (\langle v^{n+1}, A v^{n+1} \rangle - \beta), \lambda - \lambda^{n+1} \rangle \geq 0 \quad \forall \lambda \geq 0. \tag{3.5.12}$$

Докажем сходимость метода.

Теорема 3.5.1. *Если множество решений задачи (3.5.1) непусто, матрица $\Phi + B$ положительно полуопределена, матрицы A_i, $i = 1, 2, \dots, m$, симметричные и положительно полуопределенные, вспомогательная равновесная задача на каждой итерации метода разрешима, последовательность $|v^n| \leq const$ ограничена, то последовательность λ^n, порожденная методом (3.5.8), сходится монотонно по норме к одному из равновесных решений, т.е. $\lambda^n \to \lambda^* \in \mathbb{R}^n_+$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Положим $w = v^*$ в (3.5.11):

$$\langle (\Phi + B) v^{n+1} + \varphi + (\sum_{i=1}^m \lambda_i^{n+1} A_i) v^{n+1}, v^* - v^{n+1} \rangle \geq 0. \tag{3.5.13}$$

С помощью тождества (2.15.5) преобразуем отдельно третье слагаемое из полученного неравенства

$$\langle(\sum_{i+1}^{m}\lambda_i^{n+1}A_i)v^{n+1}, v^*-v^{n+1}\rangle = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i^{n+1}\langle A_iv^{n+1}, v^*-v^{n+1}\rangle \leq$$
$$\leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^{n+1}((\langle A_iv^*, v^*\rangle-\beta_i)-(\langle A_iv^{n+1}, v^{n+1}\rangle-\beta_i)-\langle A_i(v^{n+1}-v^*), v^{n+1}-v^*\rangle)=$$
$$=\frac{1}{2}\langle\lambda^{n+1}, (\langle Av^*, v^*\rangle-\beta)\rangle-\frac{1}{2}\langle\lambda^{n+1}, (\langle Av^{n+1}, v^{n+1}\rangle-\beta)\rangle-\frac{1}{2}\langle\lambda^{n+1}, \langle A(v^{n+1}-v^*), v^{n+1}-v^*\rangle\rangle\leq$$
$$\leq\frac{1}{2}\langle\lambda^{n+1}, (\langle Av^{n+1}, v^{n+1}\rangle-\beta)\rangle.$$

Тогда

$$\langle(\Phi+B)v^{n+1}+\varphi, v^*-v^{n+1}\rangle-\frac{1}{2}\langle\lambda^{n+1}, (\langle Av^{n+1}, v^{n+1}\rangle-\beta)\rangle\geq 0. \tag{3.5.14}$$

Положим $w=v^{n+1}$ в (3.5.7):

$$\langle(\Phi+B)v^*+\varphi, v^{n+1}-v^*\rangle+(1/2)\langle\lambda^*, (\langle Av^{n+1}, v^{n+1}\rangle-\beta)\rangle\geq 0.$$

Учитывая, что $(\Phi+B)\geq 0$, сложим полученное неравенство с (3.5.14); тогда

$$\langle\lambda^*-\lambda^{n+1}, (\langle Av^{n+1}, v^{n+1}\rangle-\beta)\rangle\geq 0. \tag{3.5.15}$$

Положим $\lambda=\lambda^*$ в (3.5.12):

$$\langle\lambda^{n+1}-\lambda^n, \lambda^*-\lambda^{n+1}\rangle-\alpha\langle(\langle v^{n+1}, Av^{n+1}\rangle-\beta), \lambda^*-\lambda^{n+1}\rangle\geq 0.$$

Сложим полученное неравенство с (3.5.15); тогда

$$\langle\lambda^{n+1}-\lambda^n, \lambda^*-\lambda^{n+1}\rangle\geq 0.$$

Используя тождество (2.9.14), разложим скалярное произведение

$$|\lambda^{n+1}-\lambda^*|^2+|\lambda^{n+1}-\lambda^n|^2\leq|\lambda^n-\lambda^*|^2. \tag{3.5.16}$$

Просуммируем (3.5.16) от $n=0$ до $n=N$:

$$|\lambda^{N+1}-\lambda^*|^2+\sum_{k=0}^{k=N}|\lambda^{k+1}-\lambda^k|^2\leq|\lambda^0-\lambda^*|^2.$$

Из полученного неравенства следует ограниченность траектории $|\lambda^{N+1}-\lambda^*|^2\leq|\lambda^0-\lambda^*|^2$, а также сходимость ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty}|\lambda^{k+1}-\lambda^k|^2<\infty$ и, следовательно, стремление к нулю величины $|\lambda^{n+1}-\lambda^n|^2\to 0$, $n\to\infty$.

Так как последовательность λ^n ограничена по доказанному, а v^n ограничена по условиям теоремы, то существует элемент λ', v' такой, что $\lambda^{n_i}\to\lambda'$, $v^{n_i}\to v'$ при $n_i\to\infty$ и при этом $|\lambda^{n_i+1}-\lambda^{n_i}|^2\to 0$.

Переходя в (3.5.8) к пределу при $n_i\to\infty$, получим

$$v'\in\mathrm{Argmin}\{\Psi(v', w)+\frac{1}{2\alpha}|\pi_+(\lambda'+\alpha(\langle v', Aw\rangle-\beta))|^2-\frac{1}{2\alpha}|\lambda'|^2 \mid \forall w\geq 0\},$$
$$\pi_+(\lambda'+\alpha(\langle v', Av'\rangle-\beta))=\lambda'.$$

Поскольку эти соотношения эквивалентны (3.5.2), то $\lambda'=\lambda^*\in\mathbb{R}^n_+$, т.е. любая предельная точка последовательности λ^n является решением задачи. Условие монотонности убывания величины $|\lambda^n-\lambda^*|$ обеспечивает единственность предельной точки, т.е. сходимость $\lambda^n\to\lambda^*$ при $n\to\infty$. В отличие от λ^n последовательность v^n может иметь много предельных точек, и все они являются решениями исходной задачи. Теорема доказана. □

3.6. Экстрапроксимальный метод для равновесных задач со связанными ограничениями

В этом параграфе для решения задачи (3.5.1) рассмотрим аналог экстрапроксимального метода со связанными ограничениями. Для удобства рассуждений выпишем еще раз равновесную задачу

$$v^* \in \text{Argmin}\{\langle \Phi v^* + \varphi, w\rangle + (1/2)\langle Bw, w\rangle \mid \langle v^*, A_i w\rangle \leq \beta_i,\ w \geq 0\},\quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{3.6.1}$$

В обозначениях предыдущего раздела функция Лагранжа для этой задачи в равновесном состоянии имеет вид

$$\mathcal{L}(v^*, w, \lambda) = \Psi(v^*, w) + \langle \lambda, (\langle v^*, Aw\rangle - \beta)\rangle \quad \forall w \geq 0,\ \lambda \geq 0.$$

В равновесном состоянии при $v = v^*$ седловая точка v^*, λ^* удовлетворяет системе неравенств (3.5.2), которой соответствует система вариационных неравенств

$$\begin{aligned} &\langle (\Phi + B)v^* + \varphi + \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* A_i\right) v^*, w - v^*\rangle \geq 0 && \forall w \geq 0, \\ &\langle \lambda^* - \lambda, (\langle v^*, Av^*\rangle - \beta\rangle \geq 0 && \forall \lambda \geq 0. \end{aligned} \tag{3.6.2}$$

Первое неравенство из (3.6.2) по схеме (2.15.5) – (3.5.7) может быть приведено к виду

$$\langle (\Phi + B)v^* + \varphi, w - v^*\rangle + \frac{1}{2}\langle \lambda^*, (\langle Aw, w\rangle - \beta)\rangle \geq 0 \quad \forall w \geq 0. \tag{3.6.3}$$

Для решения системы вариационных неравенств (3.6.2) используем экстрапроксимальный метод [1, 13]

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}^n &= \pi_+(\lambda^n + \frac{\alpha}{2}(\langle v^n, Av^n\rangle - \beta)), \\ v^{n+1} &\in \text{Argmin}\left\{\frac{1}{2}|w - v^n|^2 + \alpha\mathcal{L}(v^{n+1}, w, \bar{\lambda}^n) \mid w \geq 0\right\}, \\ \lambda^{n+1} &= \pi_+(\lambda^n + \frac{\alpha}{2}(\langle v^{n+1}, Av^{n+1}\rangle - \beta)), \end{aligned} \tag{3.6.4}$$

где

$$\mathcal{L}(v^{n+1}, w, \bar{\lambda}^n) = \Psi(v^{n+1}, w) + \langle \bar{\lambda}^n, (\langle v^{n+1}, Aw\rangle - \beta)\rangle\ \forall w \geq 0.$$

Длина шага α в этом процессе определяется из условия

$$0 < \varepsilon \leq \alpha < (2/L_1), \qquad \varepsilon > 0, \tag{3.6.5}$$

где константа L_1 определена ниже.

Получим оценку отклонения векторов $\bar{\lambda}^n$ и λ^{n+1} из (3.6.4). Любая квадратичная функция $\langle v, Av\rangle$ на ограниченном множестве всегда удовлетворяет условию Липшица, поэтому из первого и третьего уравнений (3.6.4) имеем

$$|\bar{\lambda}^n - \lambda^{n+1}| \leq (\alpha/2)|\langle v^n, Av^n\rangle - \langle v^{n+1}, Av^{n+1}\rangle| \leq (\alpha/2)L_1|v^n - v^{n+1}|. \tag{3.6.6}$$

Представим рассматриваемый процесс в форме вариационных неравенств

$$\langle \bar{\lambda}^n - \lambda^n - \frac{\alpha}{2}(\langle v^n, Av^n\rangle - \beta), \lambda - \bar{\lambda}^n\rangle \geq 0, \tag{3.6.7}$$

$$\langle \lambda^{n+1} - \lambda^n - \frac{\alpha}{2}(\langle v^{n+1}, Av^{n+1}\rangle - \beta), \lambda - \lambda^{n+1})\rangle \geq 0 \tag{3.6.8}$$

для всех $\lambda \geq 0$ и

$$\langle v^{n+1} - v^n + \alpha((\Phi + B)v^{n+1} + \varphi + \left(\sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i^n A_i\right) v^{n+1}), w - v^{n+1} \geq 0 \ \ \forall w \geq 0. \qquad (3.6.9)$$

Покажем, что рассматриваемый процесс сходится монотонно по норме к одному из равновесных решений.

Теорема 3.6.1. *Если множество решений задачи (3.6.1) непусто, матрицы $\Phi + B$ и A_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, положительно полуопределены, кроме того, A_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, — симметричные матрицы, то последовательность v^n, λ^n, порожденная методом (3.6.4) с выбором параметра α из условия (3.6.5), сходится монотонно по норме к одному из равновесных решений, т.е. $v^n \to v^* \in D^*$, $\lambda^n \to \lambda^* \in \mathbb{R}^n_+$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Положим $w = v^*$ в (3.6.9); тогда

$$\langle v^{n+1} - v^n, v^* - v^{n+1}\rangle + \alpha\langle(\Phi + B)v^{n+1} + \varphi + \left(\sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i^n A_i\right) v^{n+1}, v^* - v^{n+1}\rangle \geq 0. \qquad (3.6.10)$$

С помощью тождества (2.15.5) преобразуем отдельно четвертый член из (3.6.10), учитывая при этом, что $\langle \bar{\lambda}^n, \langle v^*, Av^*\rangle - \beta\rangle \leq 0$

$$\begin{aligned}
&\langle(\sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i^n A_i)v^{n+1}, v^* - v^{n+1}\rangle = \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i^n \langle A_i v^{n+1}, v^* - v^{n+1}\rangle \leq \\
&\leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i^n (\langle A_i v^*, v^*\rangle - \langle A_i v^{n+1}, v^{n+1}\rangle - \langle A_i(v^{n+1} - v^*), v^{n+1} - v^*\rangle) = \\
&= \frac{1}{2}\langle \bar{\lambda}^n, (\langle Av^*, v^*\rangle - \beta)\rangle - \frac{1}{2}\langle \bar{\lambda}^n, (\langle Av^{n+1}, v^{n+1}\rangle - \beta)\rangle - \frac{1}{2}\langle \bar{\lambda}^n, \langle A(v^{n+1} - v^*), v^{n+1} - v^*\rangle\rangle \leq \\
&\leq -\frac{1}{2}\langle \bar{\lambda}^n, (\langle Av^{n+1}, v^{n+1}\rangle - \beta)\rangle.
\end{aligned}$$

Учитывая полученную оценку, (3.6.10) перепишем в форме

$$\langle v^{n+1} - v^n, v^* - v^{n+1}\rangle + \alpha\langle(\Phi + B)v^{n+1} + \varphi, v^* - v^{n+1}\rangle - \frac{\alpha}{2}\langle \bar{\lambda}^n, (\langle Av^{n+1}, v^{n+1}\rangle - \beta)\rangle \geq 0. \qquad (3.6.11)$$

Положим $w = v^{n+1}$ в (3.6.3); тогда

$$\langle(\Phi + B)v^* + \varphi, v^{n+1} - v^*\rangle + \frac{1}{2}\langle \lambda^*, (\langle Av^{n+1}, v^{n+1}\rangle - \beta)\rangle \geq 0. \qquad (3.6.12)$$

Сложим полученные неравенства

$$\begin{aligned}
\langle v^{n+1} - v^n, v^* - v^{n+1}\rangle \ &+ \ \alpha\langle(\Phi + B)(v^{n+1} - v^*), v^* - v^{n+1}\rangle + \\
&+ \ (\alpha/2)\langle \lambda^* - \bar{\lambda}^n, (\langle Av^{n+1}, v^{n+1}\rangle - \beta)\rangle \geq 0.
\end{aligned} \qquad (3.6.13)$$

Рассмотрим неравенства (3.6.7) и (3.6.8). Положим $\lambda = \lambda^*$ в (3.6.8)

$$\langle \lambda^{n+1} - \lambda^n, \lambda^* - \lambda^{n+1}\rangle - (\alpha/2)\langle((v^{n+1}, Av^{n+1}\rangle - \beta), \lambda^* - \lambda^{n+1}\rangle \geq 0 \qquad (3.6.14)$$

и $\lambda = \lambda^{n+1}$ в (3.6.7)

$$\langle \bar{\lambda}^n - \lambda^n - (\alpha/2)(\langle v^n Av^n\rangle - \beta), \lambda^{n+1} - \bar{\lambda}^n\rangle \geq 0,$$

или

$$\langle\bar\lambda^n-\lambda^n,\lambda^{n+1}-\bar\lambda^n\rangle+\frac{\alpha}{2}((\langle v^{n+1},Av^{n+1}\rangle-\langle v^n,Av^n\rangle),\lambda^{n+1}-\bar\lambda^n\rangle-\frac{\alpha}{2}((\langle v^{n+1},Av^{n+1}\rangle-\beta),\lambda^{n+1}-\bar\lambda^n\rangle\geq 0.$$

Учитывая (3.6.6), оценим второй член в полученном неравенстве

$$\langle\bar\lambda^n-\lambda^n,\lambda^{n+1}-\bar\lambda^n\rangle+\left(\frac{\alpha}{2}L_1\right)^2|v^{n+1}-v^n|^2-\frac{\alpha}{2}((\langle v^{n+1},Av^{n+1}\rangle-\beta),\lambda^{n+1}-\bar\lambda^n\rangle\geq 0. \quad (3.6.15)$$

Сложим (3.6.14) и (3.6.15):

$$\begin{aligned}\langle\lambda^{n+1}-\lambda^n,\lambda^*-\lambda^{n+1}\rangle &+ \langle\bar\lambda^n-\lambda^n,\lambda^{n+1}-\bar\lambda^n\rangle+((\alpha/2)L_1)^2|v^{n+1}-v^n|^2-\\ &- (\alpha/2)\langle((\langle v^{n+1},Av^{n+1}\rangle-\beta),\lambda^*-\bar\lambda^n\rangle\geq 0.\end{aligned} \quad (3.6.16)$$

Сложим неравенства (3.6.13) и (3.6.16), учитывая при этом положительную полуопределенность оператора $\Phi+B\geq 0$:

$$\begin{aligned}\langle v^{n+1}-v^n,v^*-v^{n+1}\rangle+\langle\lambda^{n+1}-\lambda^n,\lambda^*-\lambda^{n+1}\rangle+\\ +\langle\bar\lambda^n-\lambda^n,\lambda^{n+1}-\bar\lambda^n\rangle+((\alpha/2)L_1)^2|v^{n+1}-v^n|^2\geq 0.\end{aligned} \quad (3.6.17)$$

С помощью тождества (2.9.14) представим три первых скалярных произведения в виде суммы квадратов

$$\begin{aligned}|v^{n+1}-v^*|^2+|\lambda^{n+1}-\lambda^*|^2+|v^{n+1}-v^n|^2+|\lambda^{n+1}-\bar\lambda^n|^2+\\ +|\bar\lambda^n-\lambda^n|^2-((\alpha/2)L_1)^2|v^{n+1}-v^n|^2\leq|v^n-v^*|^2+|\lambda^n-\lambda^*|^2.\end{aligned}$$

Отсюда

$$|v^{n+1}-v^*|^2+|\lambda^{n+1}-\lambda^*|^2+d|\bar v^n-v^n|^2+\frac{1}{2}|\lambda^{n+1}-\bar\lambda^n|^2+\frac{1}{2}|\bar\lambda^n-\lambda^n|^2\leq|v^n-v^*|^2+|\lambda^n-\lambda^*|^2, \quad (3.6.18)$$

где $d=1-(\alpha/2)^2L_1^2>0$ по условиям теоремы.

Просуммируем (3.6.18) от $n=0$ до $n=N$:

$$\begin{aligned}|v^{N+1}-v^*|^2+|\lambda^{N+1}-\lambda^*|^2+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{k=N}|\lambda^{k+1}-\bar\lambda^k|^2+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{k=N}|\bar\lambda^{k+1}-\lambda^k|^2+\\ +\sum_{k=0}^{k=N}|v^{k+1}-v^k|^2+d\sum_{k=0}^{k=N}|\bar v^k-v^k|^2\leq|v^0-v^*|^2+|\lambda^0-\lambda^*|^2.\end{aligned}$$

Из полученного неравенства следует ограниченность траектории

$$|v^{N+1}-v^*|^2+|\lambda^{N+1}-\lambda^*|^2\leq|v^0-v^*|^2+|\lambda^0-\lambda^*|^2,$$

а также сходимость рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty}|v^{k+1}-v^k|^2<\infty,\ \sum_{k=0}^{\infty}|\lambda^{k+1}-\bar\lambda^k|^2<\infty,\ \sum_{k=0}^{\infty}|\bar\lambda^k-\lambda^k|^2<\infty$$

и, следовательно, стремление к нулю величин

$$|v^{n+1}-v^n|^2\to 0,\ \ |\lambda^{n+1}-\bar\lambda^n|^2\to 0,\ \ |\bar\lambda^n-\lambda^n|^2\to 0\quad n\to\infty.$$

Так как последовательность v^n, λ^n ограничена, то существует элемент v', λ' такой, что $v^{n_i} \to v'$, $\lambda^{n_i} \to \lambda'$ при $n_i \to \infty$, и при этом

$$|v^{n_i+1} - v^{n_i}|^2 \to 0, \qquad |\lambda^{n_i+1} - \lambda^{n_i}|^2 \to 0.$$

Рассмотрим неравенства (3.6.7) – (3.6.9) для всех $n_i \to \infty$ и, перейдя к пределу, получим

$$\begin{aligned} &\langle (\Phi + B)v' + \varphi + \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda'_i A_i\right) v', w - v'\rangle \geq 0 \qquad && \forall w \geq 0, \\ &\langle \lambda' - \lambda, (\langle v', Av'\rangle - \beta\rangle \geq 0 && \forall \lambda \geq 0. \end{aligned}$$

Поскольку эти соотношения совпадают с (3.6.2), то $v' = v^* \in D^*$, $\lambda' = \lambda^* \geq 0$, т.е. любая предельная точка последовательности v^n, λ^n является решением задачи. Условие монотонности убывания величины $|v^n - v^*| + |\lambda^n - \lambda^*|$ обеспечивает единственность предельной точки, т.е. сходимость $v^n \to v^*$, $\lambda^n \to \lambda^*$ при $n \to \infty$. Теорема доказана. □

3.7. Игровой метод множителей и игровой экстрапроксимальный метод для задач со связанными ограничениями

Рассмотрим относительно простую билинейную игру двух лиц с ненулевой суммой и со связанными ограничениями

$$\begin{aligned} &x_1^* \in \mathrm{Argmin}\{\langle x_1, C_1x_2^* + c_1\rangle + \frac{1}{2}\langle B_1x_1, x_1\rangle \mid \langle x_1, Ax_2^*\rangle \leq \frac{\beta}{2}, \ \ x_1 \geq 0\}, \\ &x_2^* \in \mathrm{Argmin}\{\langle C_2x_1^* + c_2, x_2\rangle + \frac{1}{2}\langle B_2x_2, x_2\rangle \mid \\ &\langle A^\top x_1^*, x_2\rangle \leq \frac{\beta}{2}, \ \ x_2 \geq 0\}. \end{aligned} \tag{3.7.1}$$

В этой игре каждый из участников решает задачу квадратичного программирования по собственным переменным при фиксированных значениях параметров. Однако игроки в этой ситуации связаны не только через целевые функции, но и через функциональные ограничения. Учитывая эту довольно жесткую связь, задаче (3.7.1) поставим в соответствие задачу (2.7.11), в которой игроки выступают как одна команда:

$$\begin{aligned} x_1^*, x_2^* \in \mathrm{Argmin}\{&\langle x_1, C_1x_2^* + c_1\rangle + \langle C_2x_1^* + c_2, x_2\rangle + (1/2)\langle B_1x_1, x_1\rangle + \\ &+ (1/2)\langle B_2x_2, x_2\rangle \mid \langle x_1, A_1x_2^*\rangle + \langle x_2, A_1^\top x_1^*\rangle \leq \beta, \ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0\}. \end{aligned} \tag{3.7.2}$$

Из рассуждений (2.7.11) – (2.7.13) следует, что любое решение задачи (3.7.2) является решением игры (3.7.1). Используя обозначения задачи (2.7.1), перепишем задачу (3.7.2) в векторно-матричном виде

$$\langle \Phi v^* + \varphi, v^*\rangle + \frac{1}{2}\langle Bv^*, v^*\rangle \leq \langle \Phi v^* + \varphi, w\rangle + \frac{1}{2}\langle Bw, w\rangle, \qquad \langle v^*, Aw\rangle \leq \beta, \ w \geq 0. \tag{3.7.3}$$

Для решения этой равновесной задачи можно использовать как метод множителей (3.5.8), так и экстрапроксимальный метод (3.6.4). Метод множителей применительно к рассматриваемой задаче имеет более простую по сравнению с (3.5.8) модифицированную функцию Лагранжа

$$\begin{aligned} \lambda^{n+1} &= \pi_+(\lambda^n + \alpha(\langle v^{n+1}, Av^{n+1}\rangle - \beta)), \\ v^{n+1} &\in \mathrm{Argmin}\{\mathcal{M}(v^{n+1}, w, \lambda^n) \mid w \geq 0\}. \end{aligned} \tag{3.7.4}$$

Здесь функция $\mathcal{M}(v, w, \lambda)$ выпукла по w для любых $v \geq 0$, $\lambda \geq 0$:

$$\mathcal{M}(v, w, \lambda) = \Psi(v, w) + \frac{1}{2\alpha}((\lambda + \alpha(\langle v, Aw\rangle - \beta))_+)^2 - \frac{1}{2\alpha}\lambda^2.$$

Сходимость этого метода следует из теоремы 3.5.1.

Экстрапроксимальный метод применительно к (3.7.1) имеет форму

$$\begin{array}{lcl} \bar{\lambda}^n & = & \pi_+(\lambda^n + (\alpha/2)(\langle v^n, Av^n\rangle - \beta)), \\ v^{n+1} & \in & \mathrm{Argmin}\{(1/2)|w - v^n|^2 + \alpha\mathcal{L}(v^{n+1}, w, \bar{\lambda}^n) \mid w \geq 0\}, \\ \lambda^{n+1} & = & \pi_+(\lambda^n + (\alpha/2)(\langle v^{n+1}, Av^{n+1}\rangle - \beta)), \end{array} \tag{3.7.5}$$

где

$$\mathcal{L}(v^{n+1}, w, \bar{\lambda}^n) = \Psi(v^{n+1}, w) + \bar{\lambda}^n(\langle v^{n+1}, Aw\rangle - \beta) \ \forall w \geq 0.$$

Длина шага α определяется из условия

$$0 < \varepsilon \leq \alpha < (2/L_1), \qquad \varepsilon > 0,$$

где L_1 — константа. Сходимость метода (3.7.5) следует из теоремы 3.6.1.

В исходной задаче игроки были тесно связаны друг с другом как по целевым функциям, так и по ограничениям, в то время как в рассмотренных методах самостоятельность игроков практически отсутствует. Это обстоятельство можно рассматривать как плату за сходимость к игровому решению исходной задачи (3.7.1).

3.8. Другие подходы

Базовая задача, рассмотренная в этой работе, представляет собой задачу вычисления неподвижной точки экстремального отображения

$$v^* \in \mathrm{Argmin}\{\langle \Phi v^* + \varphi, w\rangle + (1/2)\langle Bw, w\rangle \mid w \geq 0\}. \tag{3.8.1}$$

Эта задача эквивалентна решению операторного уравнения вида

$$v^* = \pi_\Omega(v^* - \alpha((\Phi + B)v^* + \varphi)), \tag{3.8.2}$$

где $\pi_\Omega(\ldots)$ — оператор проектирования некоторого вектора на допустимое множество Ω, $\alpha > 0$ — параметр типа длины шага.

Было показано, что экстраградиентный метод

$$\begin{array}{lcl} \bar{v}^n & = & \pi_\Omega(v^n - \alpha((\Phi + B)v^n + \varphi)), \\ v^{n+1} & = & \pi_\Omega(v^n - \alpha((\Phi + B)\bar{v}^n + \varphi)) \end{array} \tag{3.8.3}$$

представляет собой эффективный подход для решения уравнения (3.8.2) и тем самым равновесной задачи (3.8.1).

Уравнение (3.8.2) является необходимым и достаточным условием минимума задачи (3.8.1) в равновесном состоянии. Однако необходимые и достаточные условия существуют и в других формах, например в форме проксимального оператора, а именно: если v^* — решение (3.8.1), то эта точка является также и решением проксимального уравнения

$$v^* = \mathrm{argmin}\{\frac{1}{2}|w - v^*|^2 + \alpha\langle \Phi v^* + \varphi, w\rangle + \frac{1}{2}\langle Bw, w\rangle \mid w \in \Omega\}. \tag{3.8.4}$$

Соотношение (3.8.4) представляет собой уравнение относительно неизвестной v^*, где w — внутренняя переменная экстремального оператора из правой части этого уравнения. Чтобы решить (3.8.4), помимо градиентного спуска существуют две разновидности проксимального метода. Одна из них — хорошо известный проксимальный метод [46, 47], а вторую можно назвать экстрапроксимальным методом. Об этом методе мы уже упоминали в параграфе 2.9. Для решения уравнения (3.8.4) он имеет вид

$$\begin{array}{rcl} \bar{v}^n & = & \mathrm{argmin}\{(1/2)|w-v^n|^2+\alpha\Phi(v^n,w)) \mid w\in\Omega\}, \\ v^{n+1} & = & \mathrm{argmin}\{(1/2)|w-v^n|^2+\alpha\Phi(\bar{v}^n,w)) \mid w\in\Omega\}. \end{array} \tag{3.8.5}$$

Мы уже отмечали, что этот подход для седловых задач выпуклого программирования был предложен в работе [35], применимость его к равновесным задачам обоснована в работах [7, 13].

Формулы проксимального метода для решения уравнения (3.8.4) имеют вид

$$v^{n+1}=\mathrm{argmin}\{(1/2)|w-v^n|^2+\alpha\Phi(v^{n+1},w)) \mid w\in\Omega\}. \tag{3.8.6}$$

Он представляет собой неявный процесс, где на каждой итерации надо решать неявное регуляризованное уравнение относительно переменной v^{n+1}, которая входит как в правую, так и в левую части уравнения. Фактически это означает, что одна равновесная задача (3.8.4) заменяется последовательностью регуляризованных равновесных задач (3.8.6) такого же типа.

Сравнивая этот подход с (3.8.5), мы можем видеть их существенное различие. Действительно, на каждой итерации процесса (3.8.5) мы должны решать две совершенно одинаковые вспомогательные задачи оптимизации, в то время как в процессе (3.8.6) мы сталкиваемся с необходимостью решать вспомогательную равновесную задачу, которая для своего решения также требует использования равновесных методов. Различие существенное.

Первоначально свойства проксимального оператора были исследованы в работе [48], его сходимость была доказана в [49], в работах Р.Т. Рокафеллара [46, 47] этому методу было придано методологическое значение универсального подхода, распространенного в том числе и на точечно-множественные отображения. Надо отметить удивительное воздействие двух последних статей на последующее развитие. Можно без преувеличения сказать, что за последние тридцать лет после их публикации были написаны тысячи статей, явно находящихся под воздействием работ Р.Т. Рокафеллара, хотя, кажется, идея проксимального шага интуитивно проста, понятна и явно исходит из идеи метода наименьших квадратов. Отметим статью автора этой работы по проксимальному методу [50].

В условиях неточного задания исходной информации равновесную задачу естественно решать, используя идеи регуляризации:

$$v_\alpha=\mathrm{argmin}\{\Phi(v_\alpha,w))+(\alpha/2)|w-a|^2 \mid w\in\Omega\}. \tag{3.8.7}$$

Здесь при каждом значении параметра $\alpha>0$ существует единственное равновесное решение x_α. Доказано [51, 52], что траектория x_α стремится к решению исходной равновесной задачи, если $\alpha\to 0$.

Мы уже знаем, что равновесные задачи включают в себя игры n лиц с равновесием по Нэшу. Действительно, если исходная информация задачи (3.8.1) имеет декомпозиционную структуру задачи (2.9.1), то она расщепляется на систему двух задач, т.е. игру двух лиц с равновесием по Нэшу:

$$\begin{array}{l} x_1^*\in\mathrm{Argmin}\{\langle x_1,C_1x_2^*+c_1\rangle+\dfrac{1}{2}\langle B_1x_1,x_1\rangle \mid \ x_1\in X_1\}, \\ x_2^*\in\mathrm{Argmin}\{\langle C_2x_1^*+c_2,x_2\rangle+\dfrac{1}{2}\langle B_2x_2,x_2\rangle \mid \ x_2\in X_2\}. \end{array} \tag{3.8.8}$$

Экстрапроксимальный и проксимальный методы для игры двух лиц принимают соответственно форму:

первый полушаг

$$\begin{aligned}
\bar{x}_1^n &= \text{argmin}\{\frac{1}{2}|x_1 - x_1^n|^2 + \alpha\langle x_1, C_1 x_2^n + c_1\rangle + \frac{1}{2}\langle B_1 x_1, x_1\rangle \mid x_1 \in X_1\},\\
\bar{x}_2^n &= \text{argmin}\{\frac{1}{2}|x_2 - x_2^n|^2 + \alpha\langle x_2, C_2 x_1^n + c_1\rangle + \frac{1}{2}\langle B_2 x_2, x_2\rangle \mid x_2 \in X_2\},
\end{aligned}$$

второй полушаг

$$\begin{aligned}
x_1^{n+1} &= \text{argmin}\{\frac{1}{2}|x_1 - x_1^n|^2 + \alpha\langle x_1, C_1 \bar{x}_2^n + c_1\rangle + \frac{1}{2}\langle B_1 x_1, x_1\rangle \mid x_1 \in X_1\},\\
x_2^{n+1} &= \text{argmin}\{\frac{1}{2}|x_2 - x_2^n|^2 + \alpha\langle x_2, C_2 \bar{x}_1^n + c_1\rangle + \frac{1}{2}\langle B_2 x_2, x_2\rangle \mid x_2 \in X_2\}
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
x_1^{n+1} &= \text{argmin}\{\frac{1}{2}|x_1 - x_1^n|^2 + \alpha\langle x_1, C_1 x_2^{n+1} + c_1\rangle + \frac{1}{2}\langle B_1 x_1, x_1\rangle \mid x_1 \in X_1\},\\
x_2^{n+1} &= \text{argmin}\{\frac{1}{2}|x_2 - x_2^n|^2 + \alpha\langle x_2, C_2 x_1^{n+1} + c_1\rangle + \frac{1}{2}\langle B_2 x_2, x_2\rangle \mid x_2 \in X_2\}.
\end{aligned}$$

В первом процессе на каждой итерации решается вспомогательная задача оптимизации, во втором — равновесная задача.

Игровой метод регуляризации по своей структуре близок к проксимальному методу

$$\begin{aligned}
x_1^{\alpha} &= \text{argmin}\{\frac{1}{2}|x_1 - a_1|^2 + \alpha\langle x_1, C_1 x_2^{\alpha} + c_1\rangle + \frac{1}{2}\langle B_1 x_1, x_1\rangle \mid x_1 \in X_1\},\\
x_2^{\alpha} &= \text{argmin}\{\frac{1}{2}|x_2 - a_2|^2 + \alpha\langle x_2, C_2 x_1^{\alpha} + c_1\rangle + \frac{1}{2}\langle B_2 x_2, x_2\rangle \mid x_2 \in X_2\}.
\end{aligned}$$

Доказано, что при некоторых условиях $x_1^{\alpha}, x_2^{\alpha} \to x_1^*, x_2^*$ при $\alpha \to 0$.

В конце второй главы мы отметили, что равновесная ситуация может быть сведена к седловой и для решения равновесной задачи можно использовать седловые методы. В этой главе мы рассмотрели методы, которые равновесную задачу позволяют свести к оптимизационной и для ее решения использовать градиентный подход. Однако для доказательства сходимости градиентного метода седловой фактор все равно используется.

Литература.

1. *Антипин А.С.* Равновесное программирование: проксимальные методы. // ЖВМ и МФ, 1997. Т. 37. N° 11. С. 1327–1339.

2. *Aubin J.-P., Frankowska H.* Set Valued Analysis. Boston etc.: Birkhauser, 1990.

3. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1972.

4. *Васильев Ф.П., Иваницкий А.Ю.* Линейное программирование. М.: Факториал, 1998.

5. *Антипин А.С.* Методы решения вариационных неравенств со связанными ограничениями. // ЖВМ и МФ, 2000. Т. 40. N° 9. С. 1291–1307.

6. *Antipin A.* A gradient-type method for the equilibrium programming problem with coupled constraints. // Yugoslav Journal of Operations Research, 2000. 10. Pp. 163–184.

7. *Antipin A.* Gradient approach of computing fixed points of equilibrium problems. // Journal of Global Optimization, 2001. Pp. 1–25.

8. *Bianchi M., Schaible S.* Generalized monotone bifunctions and equilibrium problems. // J. Optimiz. Theory and Appl., 1996. V.90. N° 1. Pp. 31–43.

9. *Коннов И.В.* Методы решения конечномерных вариационных неравенств. Казань: Изд-во ДАС, 1998.

10. *Антипин А.С.* Расщепление градиентного подхода для решения экстремальных включений. // ЖВМ и МФ, 1998. Т. 38. N° 7. С. 1118–1132.

11. *Евтушенко Ю.Г.* Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982.

12. *Демьянов В.Ф.* Введение в минимакс. М.: Наука, 1972.

13. *Антипин А.С.* О сходимости и оценках скорости сходимости проксимальных методов к неподвижным точкам экстремальных отображений. // ЖВМ и МФ, 1995. Т. 35. N° 5. С. 688–704.

14. *Антипин А.С.* Метод внутренней линеаризации для задач равновесного программирования. // ЖВМ и МФ, 2000. Т. 40. N° 8. С. 1142–1162.

15. *Antipin A.S.* Linearization method for solving equilibrium programming problems. Optimization. // Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. 481. Berlin: Springer, 2000. Pp. 1–24.

16. *Nash J.F.* Equilibrium points in n-person games. // Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1950. 36. Pp. 48–49.

17. *Еремин И.И.* Теория линейной оптимизации. Екатеринбург: УрО РАН, 1998.

18. *Смольяков Э.Р.* Теория антагонизмов и дифференциальные игры. М.: Эдиториал УРСС, 2000.

19. *Антипин А.С.* Методы нелинейного программирования, основанные на прямой и двойственной модификации функции Лагранжа. М.: ВНИИ системных исследований, 1979.

20. *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.

21. *Гольштейн Е.Г., Третьяков Н.В.* Модифицированные функции Лагранжа. М.: Наука, 1989.

22. *Еремин И.И.* Двойственность в линейной оптимизации. Екатеринбург: УрО РАН, 2001.

23. *Нестеров Ю.Е.* Эффективные методы в нелинейном программировании. М.: Радио и связь, 1989.

24. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988.

25. *Антипин А.С.* Непрерывные и итеративные процессы с операторами проектирования и типа проектирования. // Вопросы кибернетики. Вычислительные вопросы анализа больших систем. М.: АН СССР, 1989. С. 5–43.

26. *Антипин А.С.* Минимизация выпуклых функций на выпуклых множествах с помощью дифференциальных уравнений. // Дифференциальные уравнения, 1994. Т. 30. N° 9. С. 1475–1486.

27. *Антипин А.С.* Управляемые проксимальные дифференциальные системы для решения седловых задач. // Дифференциальные уравнения, 1992. Т. 28. N° 11. С. 1846–1861.

28. *Антипин А.С.* Седловые градиентные процессы, управляемые с помощью обратных связей. // Автоматика и телемеханика, 1994. N° 3. С. 12–23.

29. *Емельянов С.В., Коровин С.К.* Новые типы обратной связи. М., 1997.

30. *Антипин А.С.* О дифференциальных градиентных методах прогнозного типа для вычисления неподвижных точек экстремальных отображений. // Дифференциальные уравнения, 1995. Т. 31. N° 11. С. 1786–1795.

31. *Корпелевич Г.М.* Экстра-градиентный метод для отыскания седловых точек и других задач. // Экономика и математические методы, 1976. Т. 12. N° 4. С. 747–756.

32. *Антипин А.С.* Об одном методе отыскания седловой точки модифицированной функции Лагранжа. // Экономика и математические методы, 1977. Т. XIII. Вып. 3. С. 560–565.

33. *Antipin A.S.* From optima to Equilibria. // Dynamics of non-homogeneous system. Proceedings of ISA RAS. M.: 2000. Pp. 35–64.

34. *Antipin A.S.* Iterative gradient prediction-type methods for computing fixed points of extremal mapping. / In book: Parametric optimization and Related Topics IV. Verlag Peter Lang, 1997. Pp. 11–24.

35. *Антипин А.С.* Экстраполяционные методы вычисления седловой точки функции Лагранжа и их применение к задачам с блочно-сепарабельной структурой. // ЖВМ и МФ, 1986. Т. 1. N° 1. С. 150–151.

36. *Антипин А.С.* Итеративные методы прогнозного типа для вычисления неподвижных точек экстремальных отображений. // Известия высших учебных заведений. Математика, 1995. N° 11 (402). С. 17–27.

37. *Жуковский В.И., Молоствов В.С.* Многокритериальная оптимизация систем в условиях неполной информации. М.: Международный НИИ проблем управления, 1990.

38. *Карлин С.* Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир, 1964.

39. *Беленький В.З., Волконский В.А., Иванков С.А. и др.* Итеративные методы в теории игр и программировании. М.: Наука, 1974.

40. *Бакушинский А.Б.* Некоторые математические проблемы композиционного планирования. / Проблемы оптимизации в системных исследованиях. Сборник трудов. Вып. 8. М.: ВНИИ системных исследований, 1978. С. 37–47.

41. *Antipin A.* Differential equations for equilibrium problems with coupled constraints. // Nonlinear Analysis, 2001. Vol.47. Pp. 1833–1844.

42. *Антипин А.С.* Равновесное программирование: методы градиентного типа. // Автоматика и телемеханика, 1997. No.8. 125-137.

43. *Третьяков Н.В.* Метод штрафных оценок для задач выпуклого программирования. // Экономика и математические методы, 1973. Т. 9, N° 3. С. 526–540.

44. *Гольштейн Е.Г.* Метод модификации монотонных отображений. // Экономика и математические методы, 1975. Т. 11. N° 6. С. 1144–1159.

45. *Antipin A.S.* Equilibrium programming problems: prox-regularization and prox-methods. // Recent Advances in Optimization. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Berlin: Springer, 1997. Pp. 1–18.

46. *Rockafellar R.T.* Monotone operators and the proximal point algorithm. // SIAM J. control and optimization, 1976. V. 14. N° 5. Pp. 877–898.

47. *Rockafellar R.T.* Augmented Lagrangians and applications of the proximal point algorithm in convex programming. // Mathematics of Operatins Research, 1976. Vol. 1. N° 2. Pp. 97–116.

48. *Moreau J.J.* Proximite et dualite dans un espace Hilbertien // Bull. Soc. Math. France, 1965. 93. Pp. 273–299.

49. *Martinet B.* Determination approchee d'un point fixe d'une application pseudo-contractante. // C.R. Acad.Sci. Paris, 1972. 274. Pp. 163-165.

50. *Антипин А.С.* О методе выпуклого программирования, использующем симметрическую модификацию функции Лагранжа. // Экономика и матем. методы, 1976. Т. XII. Вып. 6. С. 1164–1173

51. *Antipin A., Vasil'ev F.* Regularization method for equilibrium programming problem with inaccurate initial data. // Ill-Posed Variational Problems and Regularization Techniues. Lecture Notes in Econ. and Math. Syst. Berlin: Springer-Verlag, 1999. Pp. 1–23.

52. *Антипин А.С., Васильев Ф.П.* Метод невязки для решения равновесных задач с неточно заданным множеством. // ЖВМ и МФ, 2001. Т. 41. N° 1. С. 3–8.