Дифференциальные уравнения, т. 36, No.11, 2000, с. 1443–1451.

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.977

РЕШЕНИЕ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ СО СВЯЗАННЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ С ПОМОЩЬЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ [1]

А.С. Антипин

Пересмотрено 20 ноября 2003 г.

В работе рассматриваются вариационные неравенства со связанными ограничениями. Вводится класс симметричных векторных функций, формирующих связанные ограничения. Предлагается дифференциальный управляемый метод градиентного типа для решения вариационных неравенств со связанными ограничениями. Доказывается сходимость предложенного метода.

1. Постановка проблемы

Рассмотрим вариационное неравенство со связанными ограничениями

$$\langle F(v^*), w - v^* \rangle \geq 0 \quad \forall w \in \Omega_0, \;\; g(v^*, w) \leq 0. \tag{1.1}$$

где $F(v) : R^n \to R^n$, $g(v, w) : R^n \times R^n \to R^m$, $\Omega_0 \in R^n$ — выпуклое замкнутое множество.

Основное отличие этой постановки от стандартной состоит в присутствии функциональных ограничений вида $g(v, w) \leq 0$, которые связывают параметры и переменные задачи. Наличие связанных ограничений делает эти задачи трудными для решения. Однако, многие математические модели содержат связанные ограничения и в значительной степени определяют интерес специалистов к таким задачам. Имеется совсем не много публикаций, посвященных методам решений вариационных неравенств со связанными ограничениями. Среди них наиболее заметная статья Дж.В. Розена (1965) [1]. Напротив, стандартной постановке задачи о вариационном неравенстве, включая и методы решения, посвящена обширная научная литература. Отметим, например, популярный обзор [2].

Отметим, что проблемы со связанными ограничениями возникают во многих областях математики. Прежде всего укажем на модели экономического равновесия, которые, по определению, всегда содержат бюджетные ограничения, согласно которым вектор цен, скалярно умноженный на вектор объемов товара, не превышает

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-00064) и по программе государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта 00-15-96080)

априори заданных расходов. Эти ограничения по своей природе всегда связанные [3]. Обобщенные постановки игр n лиц также приводят к вариационным неравенствам со связанными ограничениями [4]. Естественным образом связанные ограничения появляются в задачах равновесного [5] и иерархического программирования [6]. Развитие этой тематики в приложениях математической физики, где впервые появились вариационные неравенства, приводит к появлению неравенств со связанными ограничениями [7]. Этот небольшой список проблем показывает, что связанные ограничения не являются атрибутом какой-то одной проблемы. Они характерны для очень широкого класса задач. Поэтому разработка методов решения задач со связанными ограничениями представляется актуальной и чрезвычайно важной. В данной работе предлагается и обосновывается сходимость (асимптотическая устойчивость) траектории дифференциальной управляемой с помощью обратных связей градиентной системы к решению вариационного неравенства со связанными ограничениями.

2. Проблемные задачи

В этом параграфе сделаем краткий обзор наиболее известных задач, в которых появление связанных ограничений вытекает из существа ситуации.

1. Игра двух лиц со связанными ограничениями. Для простоты рассуждений рассмотрим игру двух лиц со связанными скалярными ограничениями [8, 4]

$$\begin{array}{l} x_1^* \in \operatorname{Argmin}\{f_1(x_1, x_2^*) \mid g_1(x_1, x_2^*) \le g_1(x_1^*, x_2^*),\ \ x_1 \in Q_1\}, \\ x_2^* \in \operatorname{Argmin}\{f_2(x_1^*, x_2) \mid g_2(x_1^*, x_2) \le g_2(x_1^*, x_2^*),\ \ x_2 \in Q_2\}, \end{array} \tag{2.1}$$

где $f_1, f_2, g_1, g_2 : R^n \times R^n \to R^1$. Все функции выпуклы по собственным переменным при любом значении несобственных переменных, т.е. f_1, g_1 выпуклы по x_1 при любом значении x_2 и, соответственно, наоборот, f_2, g_2 выпуклы по x_2 при любом значении x_1.

Любую игру n лиц всегда можно скаляризовать и свести к задаче вычисления неподвижной точки экстремального отображения. Впервые эта процедура была описана в работе [9] для игры без связанных функциональных ограничений. Однако эта процедура может быть перенесена и на игры со связанными ограничениями. Покажем как это можно сделать. Введем две нормализованные функции вида $\Phi(v, w) = f_1(x_1, y_2) + f_2(y_1, x_2)$, $G(v, w) = g_1(x_1, y_2) + g_2(y_1, x_2)$, где $v = (y_1, y_2)$, $w = (x_1, x_2)$, $v, w \in \Omega_0 = Q_1 \times Q_2$. С помощью введенных функций сформулируем задачу: найти вектор $v^* \in \Omega_0$, удовлетворяющий экстремальному включению

$$v^* \in \operatorname{Argmin}\{\Phi(v^*, w) \mid G(v^*, w) - G(v^*, v^*) \le 0\ \ w \in \Omega_0\}. \tag{2.2}$$

Покажем, что всякое решение (2.2) является решением (2.1).

Действительно, задача (2.2) эквивалентна выполнению неравенства $f_1(x_1^*, x_2^*)+$ $+f_2(x_1^*, x_2^*) \le f_1(x_1, x_2^*) + f_2(x_1^*, x_2)$ для всех x_1, x_2, удовлетворяющих условиям

$$g_1(x_1, x_2^*) + g_2(x_1^*, x_2) - g_1(x_1^*, x_2^*) - g_2(x_1^*, x_2^*) \le 0 \qquad \forall x_1 \in Q_1,\ \ x_2 \in Q_2.$$

В частности, эта система неравенств верна и для всех пар вида $x_1, x_2^* \in Q_1 \times x_2^*$. Последнее означает, что в этом случае система принимает вид $f_1(x_1^*, x_2^*) \le f_1(x_1, x_2^*)$

для всех x_1, x_2, удовлетворяющих неравенству $g_1(x_1, x_2^*) \le g_1(x_1^*, x_2^*)$ $\forall x_1 \in Q_1$. Так как это множество содержит точку x_1^*, то, очевидно, последняя система неравенств эквивалентна первой задаче из (2.1). Аналогичные рассуждения, проведенные относительно точки x_1^*, x_2, приводят нас ко второй задаче (2.1).

Нетрудно видеть, что задачу (2.2) в случае дифференцируемости целевой функции всегда можно представить в форме вариационного неравенства $\langle \nabla_w \Phi(v^*, v^*), w - v^* \rangle \ge 0$ $\forall w \in \Omega_0$, $G(v^*, w) \le G(v^*, v^*)$, где $\nabla_w \Phi(v, v) = \nabla_w \Phi(v, w)|_{v=w}$.

2. Простейшая модель ценового равновесия. Рассмотрим простейший рынок, на котором действует один агрегированный потребитель [10]. Пусть $f(x)$ — его функция полезности, β — фиксированное количество денег, имеющихся в наличии у потребителя, а x — вектор ресурсов, которые он хочет купить. Стоимость ресурсов описывается вектором цен p. Ситуация характеризуется тем, что, с одной стороны, потребитель не может купить товары, стоимость которых больше β, а с другой стороны, нельзя купить товаров больше, чем есть в наличие на рынке, а именно больше, чем вектор y_0. Таким образом, предполагая, что потребитель при покупке товаров максимизирует свою функцию полезности, приходим к следующей задаче: найти вектор равновесных цен $p = p^*$ и оптимальных ресурсов $x = x^*$ таких, что

$$x^* \in \mathrm{Argmax}\{f(x) \mid \langle p^*, x \rangle \le \beta,\ \ x \in Q\}, \qquad x^* \le y_0. \tag{2.3}$$

Если материальный баланс $x^* \le y_0$ в этой задаче усилить требованием финансового баланса $\langle p^*, x^* - y_0 \rangle = 0$, то совокупность этих условий будет удовлетворять неравенству вида $\langle p - p^*, x^* - y_0 \rangle \le 0$ $\forall p \ge 0$. Это означает, что неположительный линейный функционал $\langle p - p^*, x^* - y_0 \rangle$ достигает на положительном ортанте своего максимума в точке p^*. Другими словами, приходим к задаче

$$x^* \in \mathrm{Argmax}\{f(x) \mid \langle p^*, x \rangle \le \beta,\ \ x \in Q\}, \qquad p^* \in \mathrm{Argmax}\{\langle p - p^*, x^* - y_0 \rangle \mid p \ge 0\},$$

решение которой является решением (2.3). Полученная задача является задачей типа (2.1).

Агрегированный производитель на обсуждаемом рынке представлен вектором y_0. Однако его присутствие на рынке можно существенно усилить, обеспечив ему возможность минимизировать при заданных ценах производство товаров, которые никогда не будут куплены. Таким образом, получаем модель ситуации

$$\begin{aligned} &x^* \in \mathrm{Argmax}\{f(x) \mid \langle p^*, x \rangle \le \beta,\ \ x \in Q\}, \\ &y^* \in \mathrm{Argmin}\{\langle p^*, y \rangle \mid x^* \le y,\ \ y \in Y\}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

где Y — множество допустимых планов производителя. В общем случае при произвольных ценах p допустимое множество производителя может оказаться пустым, поэтому в задаче требуется выбрать цены $p = p^*$ таким образом, чтобы обеспечить непустоту множества $\{y \mid x^* \le y,\ \ y \in Y\} \ne \emptyset$, а следовательно, и существование решения задачи.

3. Многокритериальная модель принятия решений на подмножестве эффективных точек. Специфика многокритериальной задачи принятия решения [11] состоит в том, что имеется некоторое множество альтернатив $x \in Q$, на котором задан векторный критерий эффективности $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$. Лицо, принимающее решение, старается увеличить на заданном множестве альтернатив каждый из скалярных критериев. В выпуклом случае скаляризация векторного критерия $\langle\lambda, f(x)\rangle = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i(x)$, где $\lambda \geq 0$, позволяет описать множество оптимальных альтернатив (множество Парето) как множество оптимальных решений семейства скалярных задач оптимизации $x_\lambda \in \mathrm{Argmax}\{\langle\lambda, f(x)\rangle \mid x \in Q\}$ [12]. В общем случае в задаче многокритериального принятия решения требуется выбрать значение параметра $\lambda = \lambda^*$ и отвечающее ему оптимальное решение x^* так, чтобы оба вектора принадлежали некоторому априори заданному подмножеству эффективных точек, т.е.

$$x^* \in \mathrm{Argmax}\{\langle\lambda^*, f(x)\rangle \mid x \in Q\}, \qquad g(x^*, \lambda^*) \leq 0. \tag{2.5}$$

Предполагая, что размерность векторов λ и $g(x, \lambda)$ одинаковая и усиливая требование $g(x^*, \lambda^*) \leq 0$ дополнительным условием $\langle\lambda, g(x^*, \lambda^*)\rangle = 0$, придем, как и в (2.3), к задаче, решение которой будет являться и решением (2.5),

$$x^* \in \mathrm{Argmax}\{\langle\lambda^*, f(x)\rangle \mid x \in Q\}, \qquad \lambda^* \in \mathrm{Argmax}\{\langle\lambda - \lambda^*, g(x^*, \lambda^*)\rangle \mid \lambda \geq 0\}.$$

Эта задача типа (2.1).

Если модель (2.5) описывает крупный технический проект, то максимизация векторного критерия обеспечивает эффективность проекта, а условия $g(x, \lambda) \leq 0$ описывают финансовые, экологические и другие ограничения.

4. Квазивариационные неравенства. Рассмотрим билинейную игру двух лиц на связанных ограничениях, которые задаются с помощью выпуклого замкнутого множества $K \in Q_1 \times Q_2 \in R^n \times R^n$ [7]. Через любую фиксированную точку $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in K$ проведем два сечения вида $K_1(\bar{x}) = \{x_1 \in R^n \mid (x_1, \bar{x}_2) \in K\}$, $K_2(\bar{x}) = \{x_2 \in R^n \mid (\bar{x}_1, x_2) \in K\}$ и рассмотрим игру

$$\begin{array}{rcl} x_1^* & \in & \mathrm{Argmin}\{\langle A_1 x_1, x_2^*\rangle + \langle l_1, x_1\rangle \mid x_1 \in K_1(x^*)\}, \\ x_2^* & \in & \mathrm{Argmin}\{\langle x_1^*, A_2 x_2\rangle + \langle l_2, x_2\rangle \mid x_2 \in K_2(x^*)\}, \end{array} \tag{2.6}$$

где $x^* = (x_1^*, x_2^*)$. Если ввести матрицу $A^\top$, где $\top$ — знак транспонирования, с элементами $a_{11} = 0$, $a_{12} = A_1^\top$, $a_{21} = A_2^\top$, $a_{22} = 0$ и вектор $l = (l_1, l_2)$, то задачу (2.6) можно представить в эквивалентной форме как вариационное неравенство

$$\langle A^\top x^*, x - x^*\rangle + \langle l, x - x^*\rangle \geq 0 \quad \forall x \in K(x^*), \tag{2.7}$$

где $K(x^*) = K_1(x^*) \times K_2(x^*)$.

В случае, когда $A_1^\top$ и $A_2^\top$ — дифференциальные операторы, при этом $K \in Q_1 \times Q_2 \subseteq H^1 \times H^2$, где H^1, H^2 — гильбертовы пространства, то задача (2.7) называется квазивариационным неравенством [7, с.244].

Заметим, что если в задаче (2.1) функции $g_1(x_1, x_2) = g_2(x_1, x_2)$, то эта задача принимает форму (2.6).

5. Двухуровневое программирование. Обычную задачу поиска максимина можно рассматривать как простейшую задачу иерархического программирования [5]. Действительно, рассмотрим задачу отыскания оптимальной стратегии, максимизирующей функцию минимума:

$$\max_x\{\min_y f(x, y) \mid g(x, y) \leq 0,\ \ y \in Y\} = \max_x \min_y\{f(x, y) \mid g(x, y) \leq 0,\ \ y \in Y\}.$$

Здесь $x \in X(y) \subset R^n$ и $y \in Y \subset R^n$. Любая точка многообразия $y(x) = \mathrm{Argmin}\{f(x,y) \mid |g(x,y) \leq 0, \; y \in Y\}$ может быть решением этой задачи. Однако если $f(x,y)$, $g(x,y)$ выпуклы по y для любого x и x^* является неподвижной точкой экстремального включения $x^* \in \mathrm{Argmin}\{f(x^*,y) \mid g(x^*,y) \leq 0, \; y \in Y\}$, то задача на минимакс может быть сведена к вычислению неподвижной точки этого экстремального отображения.

3. Симметричные функции

Задачи со связными ограничениями постоянно привлекали и привлекают внимание исследователей. Сошлемся на работы [1, 13], где обсуждаются градиентные подходы к решению этих задач. В [14] обсуждаются игровые задачи при связанных ограничениях. Публикация [1] считается одной из лучших и до сих пор активно цитируется. Основная посылка этих работ состоит в предположении, что функция $g(v,w)$, формирующая ограничения, выпукла по совокупности переменных v и w. Это очень жесткое требование, оно никогда не выполняется для ограничений моделей экономического равновесия, так как они включают ограничения бюджетного типа: $\langle p, x\rangle \leq m$, где p — цены, x — объемы товаров, m — заданные расходы. Здесь функция $g(p,x) = \langle p, x\rangle$ не является выпуклой по совокупности переменных.

В настоящей работе мы отказываемся от требования выпуклости функции $g(v,w)$ по переменным v и w одновременно, а используем свойство симметрии этой функции относительно диагонали квадрата $\Omega_0 \times \Omega_0$, т.е. многообразия $v = w$.

Введем

О п р е д е л е н и е 1. *Функцию $g(v,w)$ из $I\!R^n \times I\!R^n$ в $I\!R^m$ назовем симметричной на $R^n \times R^n$, если она удовлетворяет условию*

$$g(v,w) = g(w,v) \qquad \forall w \in \Omega_0, \quad \forall v \in \Omega_0. \tag{3.1}$$

Привести примеры симметричных функций не сложно. Это прежде всего функции, порождающие бюджетные ограничения в моделях экономического равновесия вида $g(v,w) = \langle v, w\rangle$ или $g(v,w) = \langle Av, w\rangle$, где A — симметричная матрица. В приложениях широко известны производственные функции Кобба–Дугласа и с постоянной эластичностью замены ресурсов: $g(v,w) = Av^\alpha w^\beta$ и $g(v,w) = A(\alpha v^{-\omega} + \beta w^{-\omega})^{-\gamma/\omega}$, где $A > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\omega > 0$ — параметры. Если α и β равны, то эти функции симметричны в смысле (3.1). Нетрудно проверить, что функция $\Phi(v,w) = f(x_1,y_2) + f(y_1,x_2)$, где $v = (y_1,y_2)$, $w = (x_1,x_2)$, является симметричной.

Выясним характеристические свойства симметричных функций [15]. С этой целью продифференцируем тождество (3.1) по переменной w, тогда получим

$$\nabla_w^\top g(v,w) = \nabla_v^\top g(w,v) \quad \forall w \in \Omega_0, \quad \forall v \in \Omega_0, \tag{3.2}$$

где $\nabla_w^\top g(v,w)$, $\nabla_v^\top g(w,v)$ — $(m \times n)$-матрицы, строками которых служат векторы $\nabla_v g_i(w,v)$, $\nabla_w g_i(v,w)$, $i = 1,2,\ldots,m$.

Положим $w = v$ в (3.2), тогда имеем

$$\nabla_w^\top g(v,v) = \nabla_v^\top g(v,v) \quad \forall v \in \Omega_0. \tag{3.3}$$

Таким образом, мы можем сформулировать следующее

С в о й с т в о 1. *Матрицы градиент-сужений векторной симметричной функции* $g(v,w)$ *по переменным* v *и* w *на диагонали квадрата* $\Omega_0 \times \Omega_0$ *равны между собой.*

По определению дифференцируемости функции $g(v,w)$ имеем [16, с.92]

$$g(v+h, w+k) = g(v,w) + \nabla_v^\top g(v,w)h + \nabla_w^\top g(v,w)k + \omega(v,w,h,k), \qquad (3.4)$$

где $\omega(v,w,h,k)/(|h|^2+|k|^2)^{1/2} \to 0$ при $|h|^2+|k|^2 \to 0$. Пусть $w=v$ и $h=k$, тогда с учетом (3.3) из (3.4) получим

$$g(v+h, v+h) = g(v,v) + 2\nabla_w^\top g(v,v)h + \omega(v,h), \qquad (3.5)$$

где $\omega(v,h)/|h| \to 0$ при $|h| \to 0$. Поскольку формула (3.5) есть частный случай (3.4), то она означает, что сужение градиента $\nabla_w^\top g(v,w)$ на диагональ квадрата $\Omega_0 \times \Omega_0$ является градиентом $\nabla^\top g(v,v)$ функции $g(v,v)$, т.е.

$$2\nabla_w^\top g(v,w)|_{v=w} = \nabla^\top g(v,v) \quad \forall v \in \Omega_0. \qquad (3.6)$$

Таким образом, доказано

С в о й с т в о 2 ([17]). *Оператор* $2\nabla_w g(v,w)|_{v=w}$ *является потенциальным и совпадает с градиентом сужения симметричной функции* $g(v,w)$ *на диагонали квадрата, т.е.* $2\nabla_w^\top g(v,v) = \nabla^\top g(v,v)$.

Это ключевое свойство симметричных функций будет играть решающую роль в дальнейшем изложении.

Мы уже отмечали, что если в задаче (2.1) функции $g_1(x_1,x_2)$ и $g_2(x_1,x_2)$ равны, то задача (2.1) приводится к виду (2.6). Убедимся, что в этом случае нормализованная функция $G(v,w)$ из (2.2) удовлетворяет свойству симметрии (3.1). Действительно $G(v,w) = g_1(x_1,y_2) + g_2(y_1,x_2)$ и $G(w,v) = g_1(y_1,x_2) + g_2(x_1,y_2)$, но так как $g_1(x_1,x_2) = g_1(x_1,x_2)$, то, очевидно, $G(v,w) = G(w,v)$. Таким образом, задача (2.1) в обсуждаемом случае имеет связные симметричные ограничения.

4. Симметризация

Однако связанные ограничения в задаче (1.1) могут не обладать свойствами симметрии, например, они могут быть антисимметричными, т.е. удовлетворять условию $g(v,w) = -g(w,v) \quad \forall v,w \in \Omega_0$. Покажем, что в этом случае связанные ограничения не влияют на решение задачи (1.1) и, следовательно, эти ограничения можно совсем отбросить. Действительно, рассмотрим пару задач $\langle F(v^*), w-v^*\rangle \geq 0$, $\forall w \in \Omega_0$, и $\langle F(v^*), w-v^*\rangle \geq 0$, $g(v^*,w) \leq 0$, $\forall w \in \Omega_0$, где $g(v,w)$ — антисимметричная функция. Такая функция на диагонали квадрата $\Omega_0 \times \Omega_0$ всегда равна нулю. Так как при $v=w$ из $g(v,v) = -g(v,v)$ следует, что $g(v,v)=0$, рассмотрим пересечение двух множеств $\Omega_0 \bigcap \{w \mid g(v^*,w) \leq 0\}$. Это пересечение всегда непусто (содержит точку v^*) и является подмножеством Ω_0. Так как v^* является точкой минимума функции $\langle F(v^*), w-v^*\rangle$ на Ω_0, т.е. решением первой задачи, то она тем более будет минимумом этой функции на любом его подмножестве, т.е. решением второй задачи. Таким образом, антисимметричные связанные ограничения в равновесных задачах всегда можно отбросить.

В общем случае, если функция $g(v,w)$ не является ни симметричной, ни антисимметричной, то ограничения задачи (1.1) можно симметризовать. Действительно, введем два подкласса векторных симметричных и антисимметричных функций

$$\begin{aligned} g(v,w) - g(w,v) &= 0 \quad \forall w \in \Omega_0, \quad \forall v \in \Omega_0, & (4.1)\\ g(v,w) + g(w,v) &= 0 \quad \forall w \in \Omega_0, \quad \forall v \in \Omega_0. & (4.2)\end{aligned}$$

Эти условия обобщают понятия симметричных и антисимметричных матриц [17]. Транспонированную функцию определим как $g^\top(v,w) = g(w,v)$ [15]. В терминах этой функции условия симметричности (4.1) и антисимметричности (4.2) имеют вид $\Phi(v,w) = \Phi^\top(v,w)$, $\Phi(v,w) = -\Phi^\top(v,w)$. Используя очевидные соотношения

$$\Phi(v,w) = (\Phi^\top(v,w))^\top, \qquad (\Phi_1(v,w) + \Phi_2(v,w))^\top = \Phi_1^\top(v,w) + \Phi_2^\top(v,w),$$

нетрудно проверить, что любая вещественная функция $\Phi(v,w)$ имеет разложение $g(v,w) = s(v,w) + k(v,w)$, где $s(v,w)$ — симметричная, а $k(v,w)$ — антисимметричная функции. Это разложение единственно, причем $s(v,w) = 0.5(g(v,w) + g^\top(v,w))$, $k(v,w) = 0.5(g(v,w) - g^\top(v,w))$.

Используя полученное разложение, представим функциональные ограничения задачи (1.1) в форме $\{w \mid g(v^*,w) = s(v^*,w) + k(v^*,w) \le 0,\ \ w \in \Omega_0\}$. Из рассуждений, проведенных в начале этого раздела, по-видимому, должно следовать, что и здесь антисимметричную часть ограничений можно отбросить. Действительно, пусть v^* — — решение задачи

$$\langle F(v^*), w - v^*\rangle \ge 0, \quad s(v^*,w) \le 0, \quad w \in \Omega_0. \tag{4.3}$$

Введем обозначения для множеств $D = \{w \mid g(v^*,w) \le 0,\ \ w \in \Omega_0\}$ и $K_1 = \{w \mid$ $\mid k(v^*,w) \le 0,\ \ w \in \Omega_0\}$, $K_2 = \{w \mid k(v^*,w) > 0,\ \ w \in \Omega_0\}$. Разобьем допустимое множество исходной задачи D на две части $D_1 = D \bigcap K_1$ и $D_2 = D \bigcap K_2$, причем $D = D_1 \cup D_2$. Для всех $w \in D_2$ величину $k(v^*,w)$ в неравенстве $s(v^*,w)+k(v^*,w) \le 0$, $w \in \Omega_0$, можно опустить и тогда можно утверждать, что $D_2 \subset \{w \mid s(v^*,w) \le 0,\ \ w \in$ $\in \Omega_0\}$. С другой стороны, рассмотрим пересечение $D_1 \bigcap \{w \mid s(v^*,w) \le 0,\ \ w \in \Omega_0\}$, которому принадлежит решение v^* и на котором функция $\langle F(v^*), w - v^*\rangle$ достигает минимума. Любая точка этого пересечения, как нетрудно видеть, удовлетворяет условию $s(v^*,w) + k(v^*,w) \le 0$, $w \in \Omega_0$. Следовательно, если решение задачи (1.1) имеет внутреннюю окрестность, например, когда выполняется условие $g(v^*,v^*) < 0$, $w \in \Omega_0$, то решение (4.3) является решением (1.1).

Таким образом, чтобы найти решение задачи (1.1), необходимо решить симметризованную задачу $\langle F(v^*), w - v^*\rangle$, $g(v^*,w) + g^\top(v^*,w) \le 0$, $w \in \Omega_0$.

Идея симметризации ограничений открывает принципиальную возможность решать равновесные задачи со связанными ограничениями. Некоторые соображения о симметризации множеств можно найти также в [18].

5. Приведение к седловой задаче

Задачу (1.1) всегда можно рассматривать как задачу минимизации линейной функции $f(w) = \langle F(v^*), w - v^*\rangle$ на множестве $\Omega = \{w \in \Omega_0 \mid g(v^*,w) \le 0\}$. Введем функцию Лагранжа $\mathcal{L}(v^*, w, p) = \langle F(v^*), w - v^*\rangle + \langle p, g(v^*, w)\rangle \ \forall w \in \Omega_0, \ \forall p \geq 0$, где v^* — решение задачи, а w и p — прямые и двойственные переменные. Так как v^* — минимум $f(w)$ на Ω, то пара v^*, p^* (при выполнении некоторых условий регулярности) является седловой точкой $\mathcal{L}(v^*, w, p)$, т.е. удовлетворяет системе неравенств

$$\begin{aligned} \langle F(v^*), v^* - v^*\rangle + \langle p, g(v^*, v^*)\rangle &\leq \langle F(v^*), v^* - v^*\rangle + \langle p^*, g(v^*, v^*)\rangle \leq \\ &\leq \langle F(v^*), w - v^*\rangle + \langle p^*, g(v^*, w)\rangle \end{aligned} \tag{5.1}$$

для всех $w \in \Omega_0$ и $p \geq 0$. Эту систему неравенств можно представить в виде

$$\begin{array}{l} v^* \in \mathrm{Argmin}\{\langle F(v^*), w - v^*\rangle + \langle p^*, g(v^*, w)\rangle \mid w \in \Omega_0\}, \\ p^* \in \mathrm{Argmax}\{\langle p, g(v^*, v^*)\rangle \mid p \geq 0\}. \end{array} \tag{5.2}$$

Существуют и другие эквивалентные формы представлений системы (5.1). Предполагая дифференцируемость $g(v, w)$ по w для любого v, перепишем систему (5.2) как

$$\begin{array}{l} \langle F(v^*) + \nabla_w^\top g(v^*, v^*)p^*, w - v^*\rangle \geq 0 \quad \forall w \in \Omega_0, \\ \langle -g(v^*, v^*), p - p^*\rangle \geq 0 \quad \forall p \geq 0. \end{array} \tag{5.3}$$

Полученную систему вариационных неравенств с использованием оператора проектирования представим в форме операторных уравнений

$$v^* = \pi_{\Omega_0}(v^* - \alpha(F(v^*) + \nabla_w^\top g(v^*, v^*)p^*)), \qquad p^* = \pi_+(p^* + \alpha g(v^*, v^*)), \tag{5.4}$$

где $\pi_+(\ldots)$, $\pi_{\Omega_0}(\ldots)$ — операторы проектирования некоторого вектора на положительный ортант R^n_+ и множество Ω_0, $\alpha > 0$ — параметр типа длины шага.

Преобразуем систему неравенств (5.3). Первое неравенство из этой системы представим как $\langle F(v^*), w - v^*\rangle + \langle p^*, \nabla_w g(v^*, v^*)(w - v^*)\rangle \geq 0 \ \forall w \in \Omega_0$. Затем, учитывая ключевое свойство симметричных функций (3.6) и выпуклость функции $g(v, w)_{v=w}$ на диагонали квадрата $\Omega_0 \times \Omega_0$, отдельно преобразуем член

$$\langle p^*, \nabla_w g(v^*, v^*)(w - v^*)\rangle = \frac{1}{2}\langle p^*, \nabla g(v^*, v^*)(w - v^*)\rangle \leq \frac{1}{2}\langle p^*, g(w, w) - g(v^*, v^*)\rangle.$$

Тогда окончательно (5.3) можно представить как

$$\begin{array}{ll} \langle F(v^*), w - v^*\rangle + 0.5\langle p^*, g(w, w) - g(v^*, v^*)\rangle \geq 0 & \quad \forall w \in \Omega_0, \\ \langle -g(v^*, v^*), p - p^*\rangle \geq 0 & \quad \forall p \geq 0. \end{array} \tag{5.5}$$

Таким образом, решение вариационного неравенства со связанными ограничениями сведено к седловой задаче (5.5). Для решения этой задачи имеются методы [19]. Однако развитие методов в терминах исходной задачи представляет значительный интерес по крайней мере по двум причинам: во-первых, эти методы интерпретируются как динамические модели согласования конфликта факторов или интересов и, во-вторых, эти методы станут базовыми для различных процедур симметризации для задач с несимметричными связанными ограничениями.

6. Метод градиентного типа по прямым и двойственным переменным

Перепишем еще раз систему уравнений (5.4) в терминах функции Лагранжа $\mathcal{L}(v,w,p) = \langle F(v), w-v\rangle + \langle p, g(v,w)\rangle \ \forall w \in \Omega_0$, $\forall p \geq 0$, и $v \in \Omega_0$, т.е.

$$v^* = \pi_{\Omega_0}(v^* - \alpha\nabla_w \mathcal{L}(v^*,v^*,p^*)), \qquad p^* = \pi_+(p^* + \alpha g(v^*,v^*)). \tag{6.1}$$

Невязка, т.е. разность между левой и правой частью уравнения (6.1), равная нулю в точке v^*, p^* и соответственно не равная нулю в произвольной точке v, p, задает преобразование пространства $R^n \times R^n$ в себя. Образ этого преобразования можно рассматривать как векторное поле [20], неподвижная точка которого v^*, p^*. Поставим задачу о проведении траектории так, чтобы вектор скорости совпал с заданным направлением поля в этой точке. Формально эта задача описывается системой дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dv}{dt} + v = \pi_{\Omega_0}\{v - \alpha\nabla_w \mathcal{L}(v,v,p)\}, \quad \frac{dp}{dt} + p = \pi_+\{p + \alpha g(v,v)\}, \qquad v(t_0) = v^0,\ p(t_0) = p^0,$$

где $\alpha > 0$ — параметр типа длины шага. Чтобы обеспечить сходимость этой траектории к седловой точке функции Лагранжа $\mathcal{L}(v^*,w,p)$ при фиксированном значении $v = v^*$ задачи (1.1), введем аддитивное управление в форме обратных связей. Выбор различных типов обратных связей приводит к различным управляемым дифференциальным системам. Эта техника достаточно подробно описана в работах [21, 22]. Общая методология обратных связей представлена в монографии [23].

В данной работе мы рассмотрим управляемые процессы вида

$$\frac{dv}{dt} + v = \pi_{\Omega_0}\{v - \alpha\nabla_w \mathcal{L}(\bar v,\bar v,\bar p)\}, \qquad \frac{dp}{dt} + p = \pi_+\{p + \alpha g(\bar v,\bar v)\}, \tag{6.2}$$

где управления имеют вид $\bar v = \pi_{\Omega_0}\{v - \alpha\nabla_w \mathcal{L}(v,v,\bar p)\}$, $\bar p = \pi_+\{p + \alpha g(v,v)\}$. Итеративный аналог этой системы принимает форму

$$\begin{array}{lllll} \bar p^n &=& \pi_+(p^n + \alpha g(v^n,v^n)), & \bar v^n &=& \pi_{\Omega_0}(v^n - \alpha\nabla_w \mathcal{L}(v^n,v^n,\bar p^n)), \\ p^{n+1} &=& \pi_+(p^n + \alpha g(\bar v^n,\bar v^n)), & v^{n+1} &=& \pi_{\Omega_0}(v^n - \alpha\nabla_w \mathcal{L}(\bar v^n,\bar v^n,\bar p^n)). \end{array}$$

Длина шага $\alpha > 0$ в процессе (6.2) определяется из условия $0 < \alpha < \alpha_0$, где константа α_0 будет определена ниже. Предполагается также, что выполняются необходимые условия Липшица

$$|g(v+h,v+h) - g(v,v)| \leq |g|\,|h| \tag{6.3}$$

для всех $v \in \Omega$ и $h \in R^n$, где $|g|$ — константа и $|F(v+h) - F(v)| \leq |F|\,|h|$, $|\nabla_w^\top g(v+h,v+h) - \nabla_w^\top g(v,v))| \leq |\nabla|\,|h|$ для всех $v \in \Omega$ и $h \in R^n$, где $|F|$, $|\nabla|$ — константы, кроме того, также предполагается, что $|\bar p^n| \leq C_0$ для всех $n \to \infty$.

С учетом введенных условий из (6.2) имеем оценки

$$|\dot p + p - \bar p| \leq \alpha|g(\bar v,\bar v) - g(v,v)| \leq \alpha|g|\,|\bar v - v|, \tag{6.4}$$

$$\begin{array}{rcl} |\dot v + v - \bar v| &\leq& \alpha|\nabla_w \mathcal{L}(\bar v,\bar v,\bar p) - \nabla_w \mathcal{L}(v,v,\bar p)| \leq \\ &\leq& \alpha|F(\bar v) + \nabla_w^\top g(\bar v,\bar v)\bar p - F(v) - \nabla_w^\top g(v,v)\bar p)| \leq \\ &\leq& \alpha(|F| + C_0|\nabla|)|\bar v - v| = \alpha C|\bar v - v|, \end{array} \tag{6.5}$$

где $C = |F| + C_0|\nabla|$.

Представим систему уравнений (6.2) в виде вариационных неравенств

$$\langle \dot{v} + \alpha\nabla_w\mathcal{L}(\bar{v},\bar{v},\bar{p}), w - v - \dot{v}\rangle \geq 0, \qquad \forall w \in \Omega_0, \tag{6.6}$$

$$\langle \dot{p} - \alpha g(\bar{v},\bar{v}), y - p - \dot{p}\rangle \geq 0, \qquad \forall y \geq 0, \tag{6.7}$$

$$\langle \bar{v} - v + \alpha\nabla_w\mathcal{L}(v,v,\bar{p}), w - \bar{v}\rangle \geq 0, \qquad \forall w \in \Omega_0, \tag{6.8}$$

$$\langle \bar{p} - p - \alpha g(v,v), y - \bar{p}\rangle \geq 0, \qquad \forall y \geq 0. \tag{6.9}$$

Покажем, что траектория процесса (6.2) сходится монотонно по норме к одному из равновесных решений.

Т е о р е м а 1. *Если множество решений задачи (1.1) не пусто, оператор $F(v)$ монотонный, вектор-функция $g(v,w)$ симметричная, дифференцируемая и выпуклая по w для любого v, $|p(t)| \leq C$ для всех $t \to \infty$, кроме того ее сужение $g(v,w)|_{v=w}$ на диагонали квадрата — выпуклая функция, $\Omega \subseteq I\!R^n$ — выпуклое замкнутое множество, то траектория $v(t), p(t)$ процесса (6.2) при $0 < \alpha < \alpha_0$ сходится монотонно по норме к одному из равновесных решений, т.е. $v(t), p(t) \to v^*, p^*$ при $t \to \infty$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Полагая $w = v^* \in \Omega^*$ в (6.6), имеем

$$\langle \dot{v} + \alpha(F(\bar{v}) + \nabla_w^\top g(\bar{v},\bar{v})\bar{p}), v^* - v - \dot{v}\rangle \geq 0. \tag{6.10}$$

Положим $w = v + \dot{v}$ в (6.8), тогда $\langle \bar{v} - v + \alpha(F(v) + \nabla_w^\top g(v,v)\bar{p}), v + \dot{v} - \bar{v}\rangle \geq 0$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} &\langle \bar{v} - v, v + \dot{v} - \bar{v}\rangle + \alpha\langle F(\bar{v}), v + \dot{v} - \bar{v}\rangle - \alpha\langle F(\bar{v}) - F(v), v + \dot{v} - \bar{v}\rangle + \\ + \ &\alpha\langle \nabla_w^\top g(\bar{v},\bar{v})\bar{p}, v + \dot{v} - \bar{v}\rangle - \alpha\langle(\nabla_w^\top g(\bar{v},\bar{v}) - \nabla_w^\top g(v,v))\bar{p}, v + \dot{v} - \bar{v}\rangle \geq 0 \end{aligned}$$

или с учетом (6.5)

$$\langle \bar{v} - v, v + \dot{v} - \bar{v}\rangle + \alpha\langle F(\bar{v}), v + \dot{v} - \bar{v}\rangle + \alpha\langle \nabla_w^\top g(\bar{v},\bar{v})\bar{p}, v + \dot{v} - \bar{v}\rangle + (\alpha C)^2|\bar{v} - v|^2 \geq 0. \tag{6.11}$$

Сложив неравенства (6.10) и (6.11), получим

$$\begin{aligned} \langle \dot{v}, v^* - v - \dot{v}\rangle \ &+ \ \langle \bar{v} - v, v + \dot{v} - \bar{v}\rangle + \alpha\langle F(\bar{v}), v^* - \bar{v}\rangle + \\ &+ \ \alpha\langle \bar{p}, \nabla_w g(\bar{v},\bar{v})(v^* - \bar{v})\rangle + (\alpha C)^2|\bar{v} - v|^2 \geq 0. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Учитывая (3.6) и покомпонентную выпуклость функции $g(v,v)$, преобразуем отдельно четвертый член из (6.12):

$$\langle \bar{p}, \nabla_w g(\bar{v},\bar{v})(v^* - \bar{v})\rangle \leq 0.5\langle \bar{p}, g(v^*,v^*) - g(\bar{v},\bar{v})\rangle,$$

тогда неравенство (6.12) примет вид

$$\begin{aligned} \langle \dot{v}, v^* - v - \dot{v}\rangle \ &+ \ \langle \bar{v} - v, v + \dot{v} - \bar{v}\rangle + \alpha\langle F(\bar{v}), v^* - \bar{v}\rangle + \\ &+ \ (\alpha/2)\langle \bar{p}, g(v^*,v^*) - g(\bar{v},\bar{v})\rangle + (\alpha \mathrm{C})^2|\bar{v} - v|^2 \geq 0. \end{aligned} \tag{6.13}$$

Положив $w = \bar{v}$ в первом неравенстве (5.5) и сложив полученное неравенство с (6.13), получим

$$\begin{aligned} \langle \dot{v}, v^* - v - \dot{v}\rangle \ &+ \ \langle \bar{v} - v, v + \dot{v} - \bar{v}\rangle + \alpha\langle F(\bar{v}) - F(v^*), v^* - \bar{v}\rangle + \\ &+ \ (\alpha/2)\langle \bar{p} - p^*, g(v^*,v^*) - g(\bar{v},\bar{v})\rangle + (\alpha C)^2|\bar{v} - v|^2 \geq 0. \end{aligned} \tag{6.14}$$

Рассмотрим неравенства (6.7) и (6.9). Положив $p = p^*$ в (6.7) и $y = p + \dot{p}$ в (6.9), получим соответственно

$$\langle \dot{p}, p^* - p - \dot{p}\rangle - \alpha\langle g(\bar{v},\bar{v}), p^* - p - \dot{v}\rangle \geq 0, \tag{6.15}$$

$$\langle \bar{p} - p, p + \dot{p} - \bar{p}\rangle + \alpha\langle g(\bar{v},\bar{v}) - g(v,v), p + \dot{p} - \bar{p}\rangle - \alpha\langle g(\bar{v},\bar{v}), p + \dot{p} - \bar{p}\rangle \geq 0, \tag{6.16}$$

Второе слагаемое в неравенстве (6.16) оценим с помощью (6.3) и (6.4), а затем сложим неравенства (6.15) и (6.16): $\langle \dot{p}, p^* - p - \dot{p}\rangle + \langle \bar{p} - p, p + \dot{p} - \bar{p}\rangle + (\alpha|g|)^2|\bar{v} - v|^2 - \alpha\langle g(\bar{v},\bar{v}), p^* - -\bar{p}\rangle \geq 0$.

Используя соотношения $\langle \bar{p}, g(v^*, v^*)\rangle \leq 0$, $\langle p^*, g(v^*, v^*)\rangle = 0$, перепишем последнее неравенство в виде

$$\begin{array}{rcl} 0.5\langle \dot{p}, p^* - p - \dot{p}\rangle & + & 0.5\langle \bar{p} - p, p + \dot{p} - \bar{p}\rangle + 0.5(\alpha^2/2)|g|^2|\bar{v} - v|^2 + \\ & + & (\alpha/2)\langle g(v^*, v^*) - g(\bar{v},\bar{v}), p^* - \bar{p}\rangle \geq 0. \end{array} \tag{6.17}$$

Сложим неравенства (6.14) и (6.17), учитывая монотонность оператора $F(v)$: $\langle \dot{v}, v^* - v - \dot{v}\rangle + \langle \bar{v} - v, v + \dot{v} - \bar{v}\rangle + 0.5\langle \dot{p}, p^* - p - \dot{p}\rangle + 0.5\langle \bar{p} - p, p + \dot{p} - \bar{p}\rangle + \alpha^2(C^2 + +0.5|g|^2)|\bar{v} - v|^2 \geq 0$. Представим полученное неравенство в форме

$$\begin{array}{rcl} \langle \dot{v}, v^* - v\rangle & + & 0.5\langle \dot{p}, p^* - p\rangle - |\dot{v}|^2 - 0.5|\dot{p}|^2 + \alpha^2(\mathrm{C}^2 + 0.5|g|^2)|\bar{v} - v|^2 + \\ & + & \langle \bar{u} - v, v + \dot{v} - \bar{u}\rangle + \langle \bar{p} - p, p + \dot{p} - \bar{p}\rangle \geq 0. \end{array} \tag{6.18}$$

Два последних скалярных произведения в левой части (6.18) преобразуем с помощью тождеств

$$\begin{array}{rcl} 2\langle \bar{u} - v, v + \dot{v} - \bar{u}\rangle & = & |\dot{v}|^2 - |\bar{u} - v|^2 - |\bar{u} - v - \dot{v}|^2, \\ 2\langle \bar{p} - p, p + \dot{p} - \bar{p}\rangle & = & |\dot{p}|^2 - |\bar{p} - p|^2 - |\bar{p} - p - \dot{p}|^2. \end{array}$$

Тогда рассматриваемое неравенство принимает вид

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v - v^*|^2 & + & \frac{1}{2}|\dot{v}|^2 + \frac{1}{4}\frac{d}{dt}|p - p^*|^2 + \left(\frac{1}{2} - \alpha^2\left(C^2 + \frac{1}{2}|g|^2\right)\right)|\bar{v} - v|^2 + \\ & + & \frac{1}{2}|\bar{p} - p|^2 + \frac{1}{2}|\bar{p} - p - \dot{p}|^2 \leq 0. \end{array}$$

Пусть $\alpha_0 = 0.5 - \alpha^2(C^2 + 0.5|g|^2)$, тогда проинтегрируем полученное неравенство от t_0 до t:

$$\begin{array}{rcl} |v - v^*|^2 + \frac{1}{2}|p - p^*|^2 & + & \int\limits_{t_0}^{t} |\dot{v}|^2 d\tau + + 2\alpha_0 \int\limits_{t_0}^{t} |\bar{v} - v|^2 d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} |\bar{p} - p|^2 d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} |\bar{p} - p - \dot{p}|^2 d\tau \leq \\ & \leq & |v_0 - v^*|^2 + 0.5|p_0 - p^*|^2. \end{array}$$

Отсюда следует монотонное убывание величины $|v(t) - v^*| + 0.5|p(t) - p^*|$, а также ограниченность траектории $v(t), p(t)$ и, кроме того, сходимость интегралов

$$\int\limits_{t_0}^{t} |\dot{v}|^2 d\tau < \infty, \quad \int\limits_{t_0}^{t} |\bar{v} - v|^2 d\tau < \infty, \quad \int\limits_{t_0}^{t} |\bar{p} - p|^2 d\tau < \infty, \quad \int\limits_{t_0}^{t} |\bar{p} - p - \dot{p}|^2 d\tau < \infty$$

при $t \to \infty$. Докажем сходимость траектории $v(t), p(t)$ к равновесному решению задачи. Допустив существование $\varepsilon > 0$ такого, что $|\dot{v}(t)| \geq \varepsilon$, $|\dot{p}(t)| \geq \varepsilon$, $|v - \bar{v}|^2 \geq \varepsilon$,

$|p-\bar{p}|^2 \geq \varepsilon$ для всех $t \geq t_0$, получим противоречие со сходимостью интегралов. Следовательно, существует подпоследовательность моментов времен $t_i \to \infty$ такая, что $|\dot{v}(t_i)| \to 0$, $|\dot{p}(t_i)| \to 0$, $|v(t_i)-\bar{v}(t_i)| \to 0$. Так как $v(t), p(t)$ ограничена, выберем еще раз подпоследовательность времен, которую также обозначим t_i, такую, что $|v(t_i)| \to v'$, $|p(t_i)| \to p'$, $|v(t_i)-\bar{v}(t_i)| \to 0$, $|\dot{v}(t_i)| \to 0$, $|\dot{p}(t_i)| \to 0$. Рассмотрим уравнения (6.2) для всех моментов времен $t_i \to \infty$ и, переходя к пределу, выпишем предельные соотношения $v' = \pi_{\Omega_0}(v' - \alpha\nabla_w\mathcal{L}(v', v', p'))$, $p' = \pi_+(p' - \alpha g(v', v'))$. Эти уравнения совпадают с (6.1), следовательно, имеем $v' = v^* \in \Omega^*$, $p' = p^* \geq 0$. Таким образом, любая предельная точка траектории $v(t)$ является решением задачи (1.1). В силу монотонности убывания величины $|v(t)-v^*| + 0.5|p(t)-p^*|$ траектория $v(t), p(t)$ имеет единственную предельную точку. $\square$

Приведенное доказательство может быть обобщено, если метод рассматривается в условиях помех.

Литература

1. *Rosen J.B.* Existence and uniqueness of equilibrium points for concave n-person games. // Econometrica. 1965. V.33. No.3. P. 520–534.

2. *Harker P.T., Pang J.S.* Finite Dimensional Variational Inequality and Nonlinear Complementarity Problems: A Survey of Theory, Algorithms and Applications. // Mathematical Programming. 1990. V. 48. P. 161–220.

3. *Левин М.И., Макаров В.Л., Рубинов А.М.* Математические модели экономического взаимодействия. Москва: Физматлит, 1993.

4. *Garcia C.B., Zangwill W.I.* Pathways to Solutions, Fixed Points, and Equilibria. Prentice-Hall, Inc., N.J. 1981.

5. *Антипин А.С.* О сходимости и оценках скорости сходимости проксимальных методов к неподвижным точкам экстремальных отображений. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1995. Т. 35. No. 5. С. 688–704.

6. *Migdalas A., Pardalos P.M.* Editorial: Hierarchical and Bilevel Programming. // J. of Global Optimization. 1996. No.8. P. 209–215.

7. *Байокки К., Капело А.* Вариационные и квазивариационные неравенства. Москва. Наука, 1988.

8. *Nash J.F Jr.* Equilibrium points in n-person games, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 36 (1950), P. 48–49.

9. *Nikaido H., Isoda K.* Note on noncooperative convex games, Pacific J. Math. 1955. V.5. Suppl.1. P. 807–815.

10. *Полтерович В.М.* Экономическое равновесие и хозяйственный механизм. Москва: Наука, 1990.

11. *Карманов В.Г., Федоров В.В.* Моделирование в исследовании операций. Москва, Твема, 1996.

12. *Моисеев Н.Н.* Математические задачи системного анализа. Москва, Наука, 1981.

13. *Cavazzuti E., Flam S.D.* Evolution to selected Nash equilibria. // Nonsmooth Optimization Method and Application. 1992. P. 30–41.

14. *Крутов Б.П., Новикова Н.М.* Специфика игровых задач со связанными ограничениями. // Кибернетика и вычислительная техника. Выпуск 3. Москва. Наука, 1987. С. 122–139.

15. *Антипин А.С.* Вычисление неподвижных точек симметричных экстремальных отображений. // Известия ВУЗов. Математика. 1997. No.12. С. 3–15.

16. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. Москва. Наука. 1988.

17. *Антипин А.С.* Расщепление градиентного подхода для решения экстремальных включений. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т.38. No.7. С. 1118–1132.

18. *Шикин Е.В.* Линейные пространства и отображения. Москва. МГУ. 1987.

19. *Антипин А.С.* Седловые градиентные процессы, управляемые с помощью обратных связей. // Автоматика и телемеханика. 1994. No.3. С. 12–23.

20. *Бобылев Н.А., Емельянов С.В., Коровин С.К.* Геометрические методы в вариационных задачах. Москва. Изд-во Магистр. 1998.

21. *Антипин А.С.* Равновесное программирование: проксимальные методы. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1997. Т.37. No.11. С. 1327–1339.

22. *Антипин А.С.* Равновесное программирование: методы градиентного типа. // Автоматика и телемехан. 1997. No.8. С. 166–178.

23. *Емельянов С.В., Коровин С.К.* Новые типы обратной связи. Москва. Наука. 1997.