*ЖУРНАЛ*

*ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 1997, том 37, № 11, с. 1327–1339*

УДК 519.853.6

# РАВНОВЕСНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ: ПРОКСИМАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ[1]

**©1997 г. А.С. АНТИПИН**

(Москва)

Пересмотрена 07.07.2004 г.

Формулируется задача равновесного программирования. Обсуждается ее связь с игровыми постановками. Для решения задачи предлагаются неявные и явные методы проксимальной регуляризации, использующие обычные и модифицированные функции Лагранжа. Доказывается сходимость предложенных методов к равновесным решениям.

## 1. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Задачу равновесного программирования можно сформулировать таким образом: найти неподвижную точку $v^* \in \Omega^*$, которая удовлетворяет экстремальному включению с функциональными ограничениями

$$v^* \in \operatorname{Argmin}\{\Phi(v^*, w) \mid g(w) \leq 0, \;\; w \in \Omega\}. \tag{1.1}$$

Здесь функция $\Phi(v, w)$ определена на произведении пространств $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ и $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое замкнутое множество. Предполагается, что $\Phi(v, w)$ выпуклая по переменной $w \in \Omega$ при каждом $v \in \Omega$. Векторная функция $g(w)$ имеет размерность $m$. Каждая компонента этой функции выпуклая. Переменная $v \in \Omega$ в (1.1) играет роль параметра, а $w \in \Omega$ — переменная оптимизации. Предполагается также, что экстремальное (маргинальное) отображение $w(v) \equiv \operatorname{argmin}\{\Phi(v, w) \mid g(w) \leq 0, \; w \in \in \Omega\}$ определено для всех $v \in \Omega$, а множество решений $\Omega^* \subset \Omega$ исходной задачи непусто. Последнее предположение согласно теореме Какутани всегда выполняется, если $\Omega$ — выпуклый компакт, $\Phi(v, w)$ полунепрерывна снизу по $v$ и выпукла по $w$ (см. [1]). В этом случае экстремальное отображение полунепрерывно сверху и каждую точку из $\Omega$ отображает в замкнутое выпуклое подмножество.

Задачу (1.1) можно рассматривать как свертку, которая включает в себя многие игровые постановки. Действительно, пусть система неравенств

$$L(x^*, y) \leq L(x^*, p^*) \leq L(z, p^*) \qquad \forall z \in Q \subseteq \mathbb{R}^n \quad \forall y \in P \subseteq \mathbb{R}^m \tag{1.2}$$

определяет седловую точку $x^*, p^*$, где $L(x, p)$ — выпукло-вогнутая функция, $Q = = \{z \mid g_1(z) \leq 0, \; z \in Q_1\}$, $P = \{y \mid g_2(y) \leq 0, \; y \in P_1\}$, $g_1(z)$, $g_2(y)$ — выпуклые

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01046)

вектор-функции. Введем обозначения $w = (z, y)$, $v = (x, p)$, $G(w) = (g_1(z), g_2(y))$ и нормализованную функцию $\Phi(v, w) = L(z, p) - L(x, y)$. Введенная система обозначений дает возможность систему (1.2) представить в форме (1.1) (см. [2].) При этом решение седловой системы (1.2) с нормализованной функцией $\Phi(v, w) = L(z, p) - L(x, y)$ эквивалентно решению задачи (1.1).

Более общая ситуация игры $n$ лиц с равновесием по Нэшу также может быть сведена к конструкции (1.1). Действительно, пусть $f_i(x_i, x_{-i})$ — платежная функция $i$-го игрока, $i \in I$. Эта функция зависит как от собственных стратегий $x_i \in X_i$, где $X_i = (x_i)_{i\in I}$, так и от стратегий всех других игроков $x_{-i} = (x_j)_{j\in I\setminus i}$. Равновесием игры $n$ лиц является решение системы экстремальных включений

$$x_i^* \in \operatorname{Argmin}\{f_i(x_i, x_{-i}^*) \mid x_i \in X_i\}. \tag{1.3}$$

Введем нормализованную функцию вида

$$\Phi(v, w) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i, x_{-i}),$$

где $v = (x_{-i})$, $w = (x_i)$, $g(w) = (g_i(x_i))$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и $\Omega = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$, при этом $(v, w) = (x_i, x_{-i}) \in \Omega \times \Omega$. С помощью этой функции задачу (1.3) можно записать в форме (1.1).

Многие обратные задачи оптимизации [3] также можно представить в виде (1.1). Действительно, рассмотрим обратную задачу выпуклого программирования

$$x^* \in \operatorname{Argmin}\{\langle \lambda^*, f(x)\rangle \mid g(x) \le 0,\ \ x \in Q\}, \qquad G(x^*) \le d. \tag{1.4}$$

В этой задаче требуется выбрать неотрицательные коэффициенты линейной свертки $\lambda = \lambda^*$ так, чтобы соответствующее этим весам некоторое оптимальное решение $x = x^*$ принадлежало наперед заданному выпуклому множеству. В частности, это множество может содержать только одну точку. Предполагается, что все функции этой задачи выпуклые.

Систему (1.4) можно представить в виде игры двух лиц с равновесием по Нэшу

$$\begin{aligned} x^* &\in \operatorname{Argmin}\{\langle \lambda^*, f(x)\rangle \mid g(x) \le 0,\ \ x \in Q\}, \\ p^* &\in \operatorname{Argmin}\{\langle p, G(x^*) - d\rangle \mid p \ge 0\}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Действительно, из (1.5) имеем

$$\langle p^* - p, G(x^*) - d\rangle \le 0, \qquad p \ge 0. \tag{1.6}$$

Положим сначала $p = 0$ в (1.6), а затем $p = 2p^*$, тогда получим $\langle p^*, G(x^*) - d\rangle = 0$. Теперь если допустить, что в правой части неравенства

$$0 = \langle p^*, G(x^*) - d\rangle \le \langle p, G(x^*) - d\rangle \tag{1.7}$$

какая-нибудь компонента вектора $G(x^*) - d$ отрицательна, то в силу произвольности $p \ge 0$ легко получить противоречие с (1.7). Следовательно, $G(x^*) - d \le 0$. Таким образом, решение задачи (1.5) является решением задачи (1.4). Верно и обратное утверждение. Задача (1.5), в свою очередь, с помощью нормализованной функции может быть сведена к (1.1). Следовательно, исходную обратную задачу оптимизации (1.4) можно представить в форме задачи вычисления неподвижной точки экстремального отображения (1.1).

## 2. КОСОСИММЕТРИЧНЫЕ ФУНКЦИИ

Из (1.1) следует, что любая неподвижная точка удовлетворяет неравенству

$$\Phi(v^*, v^*) \le \Phi(v^*, w) \qquad \forall w \in D, \tag{2.1}$$

где $D = \{w \mid g(w) \le 0,\ w \in \Omega\}$ —допустимое множество. Это неравенство эквивалентно определению неподвижной точки. Поскольку $\Phi^* = \inf\{\Phi(w, w) \mid w \in D\} \le \le \Phi(v^*, v^*)$, то из (2.1) немедленно следует неравенство Ки Фаня [4]

$$\inf\{\Phi(w, w) \mid w \in D\} \le \Phi(v^*, w). \tag{2.2}$$

Это неравенство эквивалентно теореме Какутани [1] и описывает факт существования неподвижной точки задачи (1.1).

В [5, 6] было рассмотрено неравенство, которое отражает некоторое седловое свойство неподвижной точки и позволяет сколь угодно точно аппроксимировать равновесное решение задачи (1.1) с помощью некоторых непрерывных или итеративных вычислительных процессов. Это неравенство имеет вид

$$\Phi(w, v^*) \le \Phi(w, w) \qquad \forall w \in D. \tag{2.3}$$

Если переписать (2.3) в несколько более общей форме

$$\Phi(w, v^*) \le \sup\{\Phi(w, w) \mid w \in D\}$$

и сопоставить его с неравенством Ки Фаня (2.2), то можно видеть, что оба неравенства связаны взаимной симметрией. В случае если $\sup\{\ldots\} = \inf\{\ldots\} = \Phi(v^*, v^*)$, то оба эти неравенства образуют седловую систему и, следовательно, их можно рассматривать как обобщение последней.

Неравенство (2.3) носит неконструктивный характер, так как содержит неизвестный вектор $v^*$, поэтому введем класс функций, для которых условие (2.3) выполняется всегда.

**Определение 1.** *Функцию $\Phi(v, w)$ из $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^1$ назовем кососимметричной на $\Theta \times \Theta$, если она удовлетворяет неравенству*

$$\Phi(w, w) - \Phi(w, v) - \Phi(v, w) + \Phi(v, v) \ge 0 \tag{2.4}$$

*для всех $w \in \Theta$ и всех $v \in \Theta$. Если выполняется неравенство вида*

$$\Phi(w, w) - \Phi(w, v^*) - \Phi(v^*, w) + \Phi(v^*, v^*) \ge 0 \tag{2.5}$$

*для всех $w$ из некоторой окрестности решения $v^* \in \Omega^*$, то функцию $\Phi(v, w)$ будем называть кососимметричной относительно равновесия.*

Далее предполагается, что множество $\Theta$ будет совпадать либо с множеством $\Omega$, либо с $D$. Введенный класс кососимметричных функций не пуст. Нетрудно убедиться [2], что нормализованная функция $\Phi(v, w) = L(z, p) - L(x, y)$, $w = (z, y)$, $v = (x, p)$ седловой задачи (1.2) является кососимметричной.

Для кососимметричных функций условие (2.3) выполняется всегда. Действительно, если в (2.4) положить $v = v^* \in \Omega^*$ и учесть (2.1), то получим (2.3).

Кососимметричные функции имеют свойства, которые можно рассматривать как аналоги условий монотонности градиента и неотрицательности второй производной для выпуклых функций.

**Свойство 1.** *Если функция $\Phi(v, w)$ кососимметрична и выпукла по второй переменной, то ее частный градиент $\nabla\Phi_w(v, v)$ монотонен на диагонали квадрата $\Theta \times \Theta$:*

$$\langle \nabla\Phi_w(w, w) - \nabla\Phi_w(v, v), w - v \rangle \geq 0 \qquad \forall w \in \Theta, \quad v \in \Theta.$$

Это неравенство следует из (2.4), если воспользоваться условием выпуклости $\Phi(v, w)$ по переменной $w$:

$$\langle \nabla f(x), y - x \rangle \leq f(y) - f(x) \leq \langle \nabla f(y), y - x \rangle \tag{2.6}$$

для всех $x$ и $y$ из некоторого множества.

Если в (2.6) положить $v = v^*$ и учесть (2.1) в форме

$$\langle \nabla\Phi_w(v^*, v^*), w - v^* \rangle \geq 0 \qquad \forall w \in \Theta,$$

то получим

$$\langle \nabla\Phi_w(w, w), w - v^* \rangle \geq 0 \qquad \forall w \in \Theta. \tag{2.7}$$

Неравенство (2.7) эквивалентно (2.3) для дифференцируемой и выпуклой по $w$ функции $\Phi(v, w)$. Для выпуклых задач оптимизации существует аналог этого неравенства. Он имеет вид $\langle \nabla\Phi(w), w - v^* \rangle \geq 0 \ \ \forall w \in \Theta$ (см. [7]).

**Свойство 2.** *Смешанная производная $\nabla^2\Phi_{wv}(v, v)$ кососимметричной функции $\Phi(v, w)$ на диагонали квадрата $\Theta \times \Theta$ неотрицательна:*

$$\langle \nabla^2\Phi_{wv}(v, v)h, h \rangle \geq 0 \qquad \forall h \in \mathbb{R}^n. \tag{2.8}$$

Условие (2.3) накладывает определенное ограничение на поведение целевой функции в окрестности равновесия. Однако существуют задачи (примеры приведем ниже), когда выполняются условия более жесткие, чем (2.3). Пусть $v^*$ — изолированное равновесие; тогда для некоторых классов задач может выполняться следующее неравенство:

$$\Phi(w, w) - \Phi(w, v^*) \geq \gamma |w - v^*|^{1+\nu} \qquad \forall w \in \Theta. \tag{2.9}$$

Здесь параметр $\nu \in [0, \infty)$, а $\gamma > 0$ — константа. При $\nu = 0$ имеем случай острого равновесия, а при $\nu = 1$ — квадратичного.

## 3. ПРИМЕРЫ

Приведенные ниже примеры равновесных задач иллюстрируют разнообразие задач, для которых условие (2.3) выполняется.

1. К в а д р а т и ч н о е  р а в н о в е с и е. Рассмотрим задачу отыскания неподвижной точки квадратичного экстремального включения

$$v^* \in \text{Argmin}\left\{ \frac{1}{2}\langle Nw, w \rangle + \langle Mv^* + m, w \rangle \mid w \in \Omega \right\}, \tag{3.1}$$

где $N$ и $M$ — неотрицательные матрицы, т.е. $\langle Nv, v\rangle \geq 0$ и $\langle Mv, v\rangle \geq 0$ для всех $v \in \mathbb{R}^n$. Кроме того, будем предполагать, что $N$ — симметричная матрица. Рассмотрим

$$\begin{aligned}
& \Phi(w,w) - \Phi(w,v) - \Phi(v,w) + \Phi(v,v) \\
= \; & \frac{1}{2}\langle Nw, w\rangle + \langle Mw, w\rangle + \langle m, w\rangle - \frac{1}{2}\langle Nv, v\rangle - \langle Mv, v\rangle - \langle m, v\rangle - \\
- \; & \frac{1}{2}\langle Nw, w\rangle - \langle Mv, w\rangle - \langle m, w\rangle + \frac{1}{2}\langle Nv, v\rangle + \langle Mv, v\rangle + \langle m, v\rangle = \\
= \; & \langle M(w-v), w-v\rangle \geq 0 \quad \forall w \in \Omega \quad \forall v \in \Omega.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что если матрица $M$ неотрицательна, то для $\Phi(w, v)$ из (3.1) выполняется (2.4). Если $M$ сильно положительна, то выполняется (2.9) с $\nu = 1$.

2. Дуополия Курно. Это фундаментальный пример модели поведения двух монополистов, производящих один и тот же товар и конкурирующих на одном и том же рынке. Упростив ситуацию до предела (детали см. в [8]), рассмотрим дуополию как игру двух лиц, функции потерь которых определены по формулам:

$$f_1(z, y) = z(z + y - u), \quad f_2(z, y) = y(z + y - u), \tag{3.2}$$

где $z \in [0, u]$, $y \in [0, u]$, $u > 0$, $z$ и $y$ — количество товара, производимое первым и вторым участником соответственно. Если второй участник производит $y^*$ единиц продукции, то первый участник в этом случае выбросит на рынок $z^* = (u - y^*)/2$ единиц товара, которые минимизируют его функциональные издержки: $f_1(z, y^*) = z(z + y^* - u)$. Аналогичной стратегии поведения $y^* = (u - z^*)/2$ придерживается второй участник, если ему известно, что первый игрок выбросил на рынок $z^*$ единиц продукции. Неподвижной точкой равновесия дуополии является пара $z^* = u/3$, $y^* = u/3$. При этом издержки игроков равны $-u^2/9$.

Дуополия Курно является квадратичной игрой и поэтому ее можно представить в форме (3.1). При этом для матрицы $M$ не будет выполняться условие: $\langle Mh, h\rangle \geq 0$ для всех $h \in \mathbb{R}^n$. Тем не менее условие (2.3) для этой задачи выполнено. Проверим это. Выпишем нормализованную функцию $\Phi(v, w)$ для задачи (3.2). С этой целью переменную $y$ в первой формуле (3.2) обозначим через $p$. Это можно сделать, так как минимизация $f_1(z, y)$ осуществляется по переменной $z$. Из этих же соображений переменную $z$ в формуле $f_2(z, y)$ обозначим через $x$. Введем новые переменные $w = (z, y)$, $v = (x, p)$ и выпишем нормализованную функцию для игры (3.2)

$$\Phi(v, w) = (z, y)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} + (x, p)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} - (u, u)\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix}.$$

Пусть $w = v^* = (x^*, p^*)$, $v = w = (z, y)$, тогда (2.3) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
& (x^*, p^*)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^* \\ p^* \end{pmatrix} + (z, y)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^* \\ p^* \end{pmatrix} - (u, u)\begin{pmatrix} x^* \\ p^* \end{pmatrix} \leq \\
\leq \quad & (z, y)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} + (z, y)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} - (u, u)\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

Отсюда $(x^*)^2 + (p^*)^2 + zp^* + yx^* - ux^* - up^* \leq z^2 + y^2 + 2zy - uz - uy$. Так как $x^* = u/3$

и $p^* = u/3$, то $-4u^2/9 + u(z+y)/3 \leq (z+y)^2 - u(z+y)$. Окончательно: $0 \leq [(z+y)-$ $-2u/3]^2$.

Таким образом, условие (2.3) для игры "Дуополия Курно" выполнено.

3. Дилемма заключенного. Рассмотрим пример конечной игры, когда два участника имеют свои множества стратегий, каждое из которых состоит из двух элементов: $\{I, II\}$ и $\{1, 2\}$. Пусть оба участника заключены в тюрьму за совершенное преступление и каждый из них имеет две возможности: чистосердечное признание (стратегии $II$ и 2) и запирательство (стратегии $I$ и 1). Платежные функции для каждого из них будут принимать следующие значения: $0, a, b, c$, где $0 < a < b < c$. Каждое из этих чисел трактуется, например, как "$a$ лет тюрьмы". Матрица игры имеет вид

| | 1 | 2 |
|---|---|---|
| $I$ | $a, a$ | $c, 0$ |
| $II$ | $0, c$ | $b, b$ |

Из этой матрицы следует, что если оба участника одновременно запираются или признаются в совершенном преступлении, то получают $a$ или $b$ лет тюрьмы каждый. Если один из них признается, а другой запирается, то первый освобождается, а второй получает $c$ лет тюрьмы.

Пара стратегий $(II, 2)$ является равновесным (некооперативным) решением этой игры. Действительно, проверим соотношения (2.1)

$$f_1(II, 2) = b < f_1(I, 2) = c, \qquad f_2(II, 2) = b < f_2(II, 1) = c.$$

Неисчислимое количество исследователей проверяло свои идеи и методы на этой игре. Проверим и мы свои. Убедимся, что для этой задачи выполняется условие (2.3). Пусть $\Phi(v, w) = f_1(z, p) + f_2(x, y)$, где $v = (x, p)$, $w = (z, y)$; тогда соотношение (2.3) можно записать в виде

$$f_1(x^*, y) + f_2(z, p^*) \leq f_1(z, y) + f_2(z, y),$$

где $x^*, p^* = (II, 2)$. Тогда $f_1(II, y) + f_2(z, 2) \leq f_1(z, y) + f_2(z, y)$. Здесь переменная $z$ принимает значения из множества $\{I, II\}$, а переменная $y$ — из множества $\{1, 2\}$. Вычислив неравенство (2.3) последовательно в точках $z = I,\ y = 1$; $z = II,\ y = 1$; $z = I,\ y = 2$; $z = II,\ y = 2$, получим систему равенств и неравенств: $0 \leq 2a$; $b = b$; $b \leq c$; $2b = 2b$. Поскольку полученные соотношения верны, то это убеждает нас, что условие (2.3) для игры "Дилемма заключенного" выполнено.

## 4. МЕТОДЫ ПРОКСИМАЛЬНОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

Прежде чем переходить к обсуждению методов решения задачи (1.1), сделаем следующее замечание. Представим неравенства (2.1) и (2.3) в форме

$$\Phi(w, v^*) - \Phi(w, w) \leq \Phi(v^*, v^*) - \Phi(v^*, v^*) \leq \Phi(v^*, w) - \Phi(v^*, v^*) \qquad \forall w \in D. \quad (4.1)$$

Введем функцию $\Psi(v, w) = \Phi(v, w) - \Phi(v, v)$ и с помощью этой функции систему неравенств (4.1) запишем в виде

$$\Psi(w, v^*) \leq \Psi(v^*, v^*) \leq \Psi(v^*, w) \ \ \forall w \in D.$$

Из этой системы неравенств следует, что точка $v^*, v^*$ является седловой для функции $\Psi(v,w)$. Однако последнее обстоятельство приносит мало пользы, так как функция $\Psi(v,w)$ не может быть использована для вычисления седловых точек, поскольку седловые методы [2] требуют выпуклости по одной и вогнутости по другой переменной. Функция $\Psi(v,w)$ не является вогнутой по $v$, хотя и выпукла по $w$. Если все же попытаться построить методы для вычисления седла для $\Psi(v,w)$, то эти методы должны содержать процедуру сдвига, как по $v$, так и по $w$; в силу этого обстоятельства свойства сходимости метода будут плохие, так как по переменной $v$ функция не вогнута. В подходах, развиваемых автором этой работы, движение к равновесию (в частности, к седлу) происходит в результате пересчета итераций только по одной переменной $w$ и при этом процесс монотонно (по норме пространства) сходится к равновесию в общем случае.

Следуя привычной схеме выпуклого программирования, введем функцию Лагранжа для задачи (1.1)

$$L(v^*,w,p) = \Phi(v^*,w) + \langle p, g(w)\rangle, \qquad w\in\Omega, \quad p\geq 0.$$

В случае регулярности функциональных ограничений (например, выполнение условия Слейтера) эту задачу можно преобразовать в задачу вычисления седловой точки функции Лагранжа $L(v^*,w,p)$:

$$\begin{array}{rcl} \Phi(v^*,v^*) + \langle p, g(v^*)\rangle & \leq & \Phi(v^*,v^*) + \langle p^*, g(v^*)\rangle \leq \\ & \leq & \Phi(v^*,w) + \langle p^*, g(w)\rangle \qquad \forall w\in\Omega, \quad p\geq 0. \end{array} \tag{4.2}$$

Запишем эту систему в другой, но эквивалентной форме, удобной для дальнейших рассуждений:

$$\begin{array}{l} v^* \in \mathrm{Argmin}\{\Phi(v^*,w) + \langle p^*, g(w)\rangle \mid w\in\Omega\}, \\ p^* = \pi_+(p^* + \alpha g(v^*)), \end{array} \tag{4.3}$$

где $\pi_+(\ldots)$ — оператор проектирования некоторого вектора на положительный ортант $\mathbb{R}^n_+$.

Для решения равновесной задачи (4.3) будем рассматривать методы двух видов: явные и неявные. Неявные методы представляют собой итеративные процессы, на каждой итерации которых решается вспомогательная регуляризованная равновесная задача. В этом подходе исходная задача, как правило вырожденная, заменяется последовательностью регуляризованных равновесных задач. Для решения последних предлагается использовать методы, развитые автором для вычисления неподвижных точек экстремальных отображений [5], [6]. При некоторых ограничениях на исходные данные задачи доказывается, что последовательность регуляризованных равновесных решений сходится к решению исходной задачи.

Явные методы имеют более сложные итеративные формулы, но зато на каждой итерации таких методов решается относительно простая задача оптимизации сильно выпуклой функции на простом множестве. Доказывается сходимость этих методов, если длина шага ограничена некоторой константой.

Одним из первых методов, который рассмотрим для решения равновесной задачи (1.1), является метод проксимальной регуляризации, в основе которого лежит модифицированная функция Лагранжа. Его итеративные формулы имеют вид

$$v^{n+1} = \mathrm{argmin}\left\{\frac{1}{2}|w-v^n|^2 + \alpha M(v^{n+1},w,p^n) \mid w\in\Omega\right\}, \tag{4.4}$$

$$p^{n+1} = \pi_+(p^n + \alpha g(v^{n+1})), \tag{4.5}$$

где

$$M(v, w, p) = \Phi(v, w) + \frac{1}{2\alpha}|\pi_+(p + \alpha g(w))|^2 - \frac{1}{2\alpha}|p|^2$$

определена для всех $v, w \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $p \geq 0$. Здесь $v^n$, $p^n$ — найденное приближение, а $v^{n+1}$, $p^{n+1}$ — искомое решение. Выражение (4.4) представляет собой уравнение относительно переменных $v^{n+1}$, которые входят как в левую, так и в правую часть выражения (неявная схема). Введем обозначение $R(v, w, v^n, p^n) = |w - v^n|^2/2 + \alpha M(v, w, p^n)$; тогда уравнение (4.4) можно записать как задачу вычисления неподвижной точки экстремального отображения

$$v^{n+1} = \text{argmin}\{R(v^{n+1}, w, v^n, p^n) \mid w \in \Omega\}.$$

Методы решения этой задачи исследовались в [5, 6].

Процесс (4.4), (4.5) естественно рассматривать как метод проксимальной регуляризации, в котором регуляризация (вырожденной) функции $\Phi(v, w)$ осуществляется с помощью квадратичного члена $|w - v^n|^2/2$, при этом функциональные ограничения задачи учитываются с помощью модифицированной функции Лагранжа.

Перейдем к обсуждению вопросов сходимости этого метода. Напомним, что функции $\Phi(v, w)$ и $g(w)$ предполагаются выпуклыми по переменной $w$, но необязательно дифференцируемыми. В последнем случае эти функции в области определения имеют субдифференциалы. Известно, что в точках минимума субдифференциал минимизируемой функции всегда содержит такой субградиент, что линейная функция, отвечающая этому субградиенту, неотрицательна на допустимом выпуклом множестве. Проектируя эту ситуацию на метод (4.4), (4.5), в котором точки $v^{n+1}$, $p^{n+1}$ являются точками минимума своих функций, представим этот процесс в форме вариационных неравенств

$$\langle v^{n+1} - v^n + \alpha \nabla \Phi_w(v^{n+1}, v^{n+1}) + \alpha \nabla g^\top(v^{n+1})\pi_+(p^n + \alpha g(v^{n+1})), w - v^{n+1}\rangle \geq 0, \tag{4.6}$$

$$\langle p^{n+1} - p^n - \alpha g(v^{n+1}), p - p^{n+1}\rangle \geq 0. \tag{4.7}$$

Неравенства верны для всех $w \in \Omega$ и всех $p \geq 0$. Здесь $\nabla \Phi_w(v, w)$ — вектор-субградиент функции $\Phi(v, w)$ относительно переменной $w$, $\nabla g^\top(v)$ — транспонированная матрица, в которой каждый столбец есть вектор-субградиент соответствующей скалярной функции вектора $g(v)$.

Покажем, что метод (4.4), (4.5) сходится монотонно по норме к одному из равновесных решений задачи; при этом предполагается, что множество $\Theta$ из неравенства (2.5) совпадает с $\Omega$.

**Теорема 1.** *Если множество решений задачи* (1.1) *не пусто и удовлетворяет условию* (2.5), *которое справедливо для всех* $w \in \Omega$, *целевая функция* $\Phi(v, w)$ *непрерывна по* $v$ *и выпукла по* $w$ *при каждом* $v \in \Omega$, $g(w)$ *— выпуклая вектор-функция,* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *— выпуклое замкнутое множество, то последовательность* $v^n$, *порожденная методом* (4.4), (4.5), *сходится монотонно по норме к одному из равновесных решений, т.е.* $v^n \to v^* \in \Omega^*$ *при* $n \to \infty$.

**Доказательство**. Положим в (4.6) $w = v^*$; тогда с учетом (4.5) имеем

$$\langle v^{n+1} - v^n + \alpha \nabla \Phi_w(v^{n+1}, v^{n+1}) + \alpha \nabla g^\top(v^{n+1})p^{n+1}, v^* - v^{n+1}\rangle \geq 0. \tag{4.8}$$

Используя неравенства выпуклости (2.6), преобразуем (4.8)

$$\begin{aligned}\langle v^{n+1}-v^n, v^*-v^{n+1}\rangle &+ \alpha[\Phi(v^{n+1},v^*)-\Phi(v^{n+1},v^{n+1})]+\\ &+ \alpha\langle p^{n+1}, g(v^*)-g(v^{n+1})\rangle \geq 0.\end{aligned} \tag{4.9}$$

Положим $w=v^{n+1}$ в неравенстве (4.2) и выпишем его в виде

$$\Phi(v^*,v^{n+1})-\Phi(v^*,v^*)+\langle p^*, g(v^{n+1})-g(v^*)\rangle \geq 0. \tag{4.10}$$

Сложим неравенства (4.9) и (4.10); тогда

$$\begin{aligned}\langle v^{n+1}-v^n, v^*-v^{n+1}\rangle &- \alpha[\Phi(v^{n+1},v^{n+1})-\Phi(v^{n+1},v^*)]-\Phi(v^*,v^{n+1})+\\ &+ \Phi(v^*,v^*))+\alpha\langle p^{n+1}-p^*, g(v^*)-g(v^{n+1})\rangle \geq 0.\end{aligned} \tag{4.11}$$

Далее, положив $p=p^*$ в неравенстве (4.7), получим

$$\langle p^{n+1}-p^n, p^*-p^{n+1}\rangle - \alpha\langle g(v^{n+1}), p^*-p^{n+1}\rangle \geq 0. \tag{4.12}$$

Сложим (4.11) и (4.12). Учитывая (2.5), а также $\langle p^{n+1}, g(v^*)\rangle \leq 0$, $\langle p^*, g(v^*)\rangle = 0$, получаем

$$\langle v^{n+1}-v^n, v^*-v^{n+1}\rangle + \langle p^{n+1}-p^n, p^*-p^{n+1}\rangle \geq 0.$$

Используя тождество

$$|x_1-x_3|^2 = |x_1-x_2|^2 + 2\langle x_1-x_2, x_2-x_3\rangle + |x_2-x_3|^2, \tag{4.13}$$

разложим скалярные произведения в левой части полученного неравенства на сумму квадратов

$$\begin{aligned}|v^{n+1}-v^*|^2 &+ |p^{n+1}-p^*|^2+|v^{n+1}-v^n|^2+|p^{n+1}-p^n|^2 \leq\\ &\leq |v^n-v^*|^2+|p^n-p^*|^2.\end{aligned} \tag{4.14}$$

Просуммируем неравенство (4.14) от $n=0$ до $n=N$:

$$\begin{aligned}|v^{N+1}-v^*|^2 &+ |p^{N+1}-p^*|^2+\sum_{k=0}^{k=N}|v^{k+1}-v^k|^2+\sum_{k=0}^{k=N}|p^{k+1}-p^k|^2 \leq\\ &\leq |v^0-v^*|^2+|p^0-p^*|^2.\end{aligned}$$

Из полученного неравенства следует ограниченность траектории

$$|v^{N+1}-v^*|^2+|p^{N+1}-p^*|^2 \leq |v^0-v^*|^2+|p^0-p^*|^2, \tag{4.15}$$

а также сходимость рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty}|v^{k+1}-v^k|^2<\infty, \qquad \sum_{k=0}^{\infty}|p^{k+1}-p^k|^2<\infty,$$

и, следовательно, стремление к нулю величин

$$|v^{n+1}-v^n|^2\to 0, \qquad |p^{n+1}-p^n|^2\to 0, \qquad n\to\infty. \tag{4.16}$$

Так как последовательность $v^n$, $p^n$ ограничена, то существует элемент $v'$, $p'$ такой, что $v^{n_i} \to v'$, $p^{n_i} \to p'$ при $n_i \to \infty$, и при этом

$$|v^{n_i+1} - v^{n_i}|^2 \to 0, \qquad |p^{n_i+1} - p^{n_i}|^2 \to 0.$$

Рассмотрим неравенства (4.6), (4.7) для всех $n_i \to \infty$ и, перейдя к пределу, получим:

$$\langle \nabla\Phi_w(v', v') + \nabla g^\top(v')p', w - v'\rangle \geq 0, \qquad p' = \pi_+(p' + \alpha g(v')).$$

Поскольку эти соотношения эквивалентны (4.2), то $v' = v^* \in \Omega^*$, $p' = p^* \geq 0$, т.е. любая предельная точка последовательности $v^n$, $p^n$ является решением задачи. Условие монотонности убывания величины $|v^n - v^*| + |p^n - p^*|$ обеспечивает единственность предельной точки, т.е. сходимость $v^n \to v^*$, $p^n \to p^*$ при $n \to \infty$. Теорема доказана. □

Приведенное доказательство представляет собой принципиальную логическую схему, которую при желании можно обобщить, если появляется необходимость оперировать с приближенными решениями регуляризованной задачи и в условиях, когда функции $\Phi(v, w)$ и $g(w)$ заданы приближенно.

## 5. ПРОГНОЗНЫЙ МЕТОД ПРОКСИМАЛЬНОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

В основе метода (4.4), (4.5) лежит модифицированная функция Лагранжа. Благодаря этому обстоятельству метод сходится. Однако во многих случаях за это приходится расплачиваться потерей свойств декомпозиции, т.е. если исходная задача имеет блочно-сепарабельную структуру (а нормализованная форма игры $n$ лиц всегда имеет такую структуру), которая позволяет исходную задачу декомпозировать на независимые подзадачи, то использование модифицированной функции Лагранжа приводит к потере этой структуры. С другой стороны, если вместо модифицированной функции Лагранжа использовать обычную функцию Лагранжа, то блочно-сепарабельная структура задачи сохраняется, так как обычная функция Лагранжа представляет собой всего-навсего линейную свертку целевой функции и функциональных ограничений. Последнее означает, что если в итеративных методах используется функция Лагранжа (вместо модифицированной), то вспомогательная оптимизационная задача на каждой итерации этих методов распадается (декомпозируется) на ряд независимых подзадач меньшей размерности. Это обстоятельство имеет большое значение для игровых задач, поскольку они, как правило, имеют большую размерность.

В этом разделе рассмотрим аналог метода (4.4), (4.5), в основе которого лежит обычная функция Лагранжа. Пусть $v^n$, $p^n$ — найденное приближение; тогда следующее приближение $v^{n+1}$, $p^{n+1}$ найдем по формулам

$$\begin{aligned} &\bar{p}^n = \pi_+(p^n + \alpha g(v^n)),\\ &v^{n+1} = \operatorname{argmin}\left\{\frac{1}{2}|w - v^n|^2 + \alpha L(v^{n+1}, w, \bar{p}^n) \mid w \in \Omega\right\},\\ &p^{n+1} = \pi_+(p^n + \alpha g(v^{n+1})), \end{aligned} \tag{5.1}$$

где

$$L(v, w, p) = \Phi(v, w) + \langle p, g(w)\rangle.$$

В дальнейших рассуждениях используем следующее неравенство:

$$\frac{1}{2}|z^* - x|^2 + \alpha f(z^*) \leq \frac{1}{2}|z - x|^2 + \alpha f(z) - \frac{1}{2}|z - x^*|^2, \tag{5.2}$$

где $z \in Q$, а $z^*$ — точка минимума функции $|z-x|^2/2 + \alpha f(z)$ на множестве $Q$ при фиксированном векторе $x$. Неравенство верно для любых выпуклых, не обязательно дифференцируемых функций [2].

Представим процесс (5.1) в виде вариационных неравенств. Второе уравнение из (5.1) запишем в форме (5.2)

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}|v^{n+1} - v^n|^2 + \alpha\Phi(v^{n+1}, v^{n+1}) + \alpha\langle \bar{p}^n, g(v^{n+1})\rangle \leq \\ \leq\ &\frac{1}{2}|w - v^n|^2 + \alpha\Phi(v^{n+1}, w) + \alpha\langle \bar{p}^n, g(w)\rangle - \frac{1}{2}|v^{n+1} - w|^2 \quad \forall w \in \Omega, \end{aligned} \tag{5.3}$$

а первое и третье уравнения — в виде

$$\langle \bar{p}^n - p^n - \alpha g(v^n), p - \bar{p}^n\rangle \geq 0 \qquad \forall p \geq 0, \tag{5.4}$$

$$\langle p^{n+1} - p^n - \alpha g(v^{n+1}), p - p^{n+1}\rangle \geq 0 \qquad \forall p \geq 0. \tag{5.5}$$

Будем предполагать, что векторная функция $g(w)$ удовлетворяет условию Липшица в форме

$$|g(w+h) - g(w)| \leq |g|\,|h| \tag{5.6}$$

для всех $w, w+h \in \Omega$, где $|g|$ — константа. Оценим величину отклонения двух векторов $\bar{p}^n$ и $p^{n+1}$. Из (5.1) с учетом (5.6) имеем

$$|\bar{p}^n - p^{n+1}| \leq \alpha|g(v^n) - g(v^{n+1})| \leq \alpha|g|\,|v^n - v^{n+1}|. \tag{5.7}$$

Докажем монотонную (по норме) сходимость метода (5.1) к одному из равновесных решений задачи.

**Теорема 2.** *Если множество решений задачи* (1.1) *не пусто и удовлетворяет условию* (2.5), *которое справедливо для всех* $w \in \Omega$, *целевая функция* $\Phi(v, w)$ *непрерывна по* $v$ *и выпукла по* $w$ *при каждом* $v \in \Omega$, *выпуклая векторная функция* $g(w)$ *удовлетворяет условию* (5.6), $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ — *выпуклое замкнутое множество, то последовательность* $v^n$, *порожденная методом* (5.1) *с параметром* $0 < \alpha < (\sqrt{2}|g|)^{-1}$, *сходится монотонно по норме к одному из равновесных решений, т.е.* $v^n \to v^* \in \Omega^*$ *при* $n \to \infty$.

**Доказательство**. Положим $w = v^*$ в (5.3)

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}|v^{n+1} - v^n|^2 + \alpha\Phi(v^{n+1}, v^{n+1}) + \alpha\langle \bar{p}^n, g(v^{n+1})\rangle \leq \\ \leq\ &\frac{1}{2}|v^* - v^n|^2 + \alpha\Phi(v^{n+1}, v^*) + \alpha\langle \bar{p}^n, g(v^*)\rangle - \frac{1}{2}|v^{n+1} - v^*|^2 \end{aligned}$$

и $w = v^{n+1}$ в (4.2)

$$\Phi(v^*, v^*) + \langle p^*, g(v^*)\rangle \leq \Phi(v^*, v^{n+1}) + \langle p^*, g(v^{n+1})\rangle.$$

Сложим оба неравенства

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}|v^{n+1}-v^*|^2+\frac{1}{2}|v^{n+1}-v^n|^2+\\
+\ &\alpha[\Phi(v^{n+1},v^{n+1})-\Phi(v^{n+1},v^*)-\Phi(v^*,v^{n+1})+\Phi(v^*,v^*)]+\\
+\ &\alpha\langle\bar{p}^n-p^*,g(v^{n+1})-g(v^*)\rangle\le\frac{1}{2}|v^*-v^n|^2.
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

Рассмотрим неравенства (5.4), (5.5). Положим $p=p^*$ в (5.5):

$$
\langle p^{n+1}-p^n,p^*-p^{n+1}\rangle-\alpha\langle g(v^{n+1}),p^*-p^{n+1}\rangle\ge 0 \tag{5.9}
$$

и $p=p^{n+1}$ в (5.4)

$$
\begin{aligned}
\langle\bar{p}^n-p^n,p^{n+1}-\bar{p}^n\rangle\ &+\ \alpha\langle g(v^{n+1})-g(v^n),p^{n+1}-\bar{p}^n\rangle-\\
&-\ \alpha\langle g(^{n+1}),p^{n+1}-\bar{p}^n\rangle\ge 0,
\end{aligned}
\tag{5.10}
$$

Второе слагаемое в этом неравенстве оценим с помощью (5.6), (5.7), а затем неравенства (5.9) и (5.10) сложим

$$
\begin{aligned}
&\langle p^{n+1}-p^n,p^*-p^{n+1}\rangle+\langle\bar{p}^n-p^n,p^{n+1}-\bar{p}^n\rangle+\\
+\ &\alpha^2|g|^2\,|v^{n+1}-v^n|^2-\alpha\langle g(v^{n+1}),p^*-\bar{p}^n\rangle\ge 0.
\end{aligned}
$$

С помощью тождества (4.13) разложим два первых скалярных произведения в сумму квадратов

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}|p^{n+1}-p^*|^2+\frac{1}{2}|p^{n+1}-\bar{p}^n|^2+\frac{1}{2}|\bar{p}^n-p^n|^2-\\
-\ &\alpha^2|g|^2\,|v^{n+1}-v^n|^2+\alpha\langle g(v^{n+1}),p^*-\bar{p}^n\rangle\le\frac{1}{2}|p^n-p^*|^2.
\end{aligned}
\tag{5.11}
$$

Далее сложим неравенства (5.8) и (5.11). Учитывая (2.5), а также $\langle\bar{p}^n,g(v^*)\rangle\le 0$, $\langle p^*,g(v^*)\rangle=0$, получаем

$$
\begin{aligned}
&|v^{n+1}-v^*|^2+(1-2\alpha^2|g|^2)|v^{n+1}-v^*|^2+|p^{n+1}-p^*|^2+\\
+\ &|p^{n+1}-\bar{p}^n|^2+|\bar{p}^n-p^n|^2\le|v^n-v^*|^2+|p^n-p^*|^2.
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

Неравенство (5.12) является полным аналогом (4.14), поэтому если $0<\alpha<$ $<(\sqrt{2}|g|)^{-1}$, то доказательство теоремы может быть завершено по схеме теоремы 2. Теорема доказана. $\square$

Приведенное доказательство можно обобщить, если рассмотреть случай, когда вспомогательное регуляризованное решение вычисляется приближенно, а исходные данные задачи заданы неточно.

## 6. ПРОКСИМАЛЬНЫЙ ПРОГНОЗНЫЙ МЕТОД

В предыдущих разделах рассматривались неявные итеративные схемы, т.е. схемы, когда переменные, относительно которых решаются вспомогательные уравнения на каждой итерации процесса, входят как в правую, так и в левую части этого уравнения. Как следствие этого факта на каждой итерации метода приходится решать регуляризованную равновесную вспомогательную задачу, которая сама по себе не из легких. Поэтому возникает вопрос, можно ли организовать вычислительный процесс таким образом, чтобы на каждой итерации метода в качестве вспомогательной задачи мы имели одну или несколько обычных задач минимизации сильно выпуклой функции на простом множестве. Ответ на этот вопрос положительный. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим одну из возможных проксимальных итеративных схем. Действительно, пусть $v^0$, $p^0$ — начальное приближение; тогда следующие можно вычислить по рекуррентным формулам

$$\begin{array}{rcl} \bar{p}^n & = & \pi_+(p^n + \alpha g(v^n)), \\ \bar{u}^n & = & \operatorname{argmin}\left\{ \frac{1}{2}|w - v^n|^2 + \alpha L(v^n, w, \bar{p}^n) \mid w \in \Omega \right\}, \\ v^{n+1} & = & \operatorname{argmin}\left\{ \frac{1}{2}1|w - v^n|^2 + \alpha L(\bar{u}^n, w, \bar{p}^n) \mid w \in \Omega \right\}, \\ p^{n+1} & = & \pi_+(p^n + \alpha g(\bar{u}^n)), \end{array} \tag{6.1}$$

где

$$L(v, w, p) = \Phi(v, w) + \langle p, g(w) \rangle.$$

Представим этот процесс в форме вариационных неравенств. Первое и четвертое уравнения из (6.1) в соответствии с определением оператора проектирования запишем в виде

$$\langle \bar{p}^n - p^n - \alpha g(v^n), p - \bar{p}^n \rangle \geq 0 \quad \forall p \geq 0 \tag{6.2}$$

и

$$\langle p^{n+1} - p^n - \alpha g(\bar{u}^n), p - p^{n+1} \rangle \geq 0 \quad \forall p \geq 0. \tag{6.3}$$

Второе и третье уравнение представим в форме (5.2)

$$\begin{array}{rl} & \frac{1}{2}|\bar{u}^n - v^n|^2 + \alpha\Phi(v^n, \bar{u}^n) + \alpha\langle \bar{p}^n, g(\bar{u}^n) \rangle \leq \\ \leq & \frac{1}{2}|w - v^n|^2 + \alpha\Phi(v^n, w) + \alpha\langle \bar{p}^n, g(w) \rangle - \frac{1}{2}|w - \bar{u}^n|^2 \qquad \forall w \in \Omega \end{array} \tag{6.4}$$

и

$$\begin{array}{rl} & \frac{1}{2}|v^{n+1} - v^n|^2 + \alpha\Phi(\bar{u}^n, v^{n+1}) + \alpha\langle \bar{p}^n, g(v^{n+1}) \rangle \leq \\ \leq & \frac{1}{2}|w - v^n|^2 + \alpha\Phi(\bar{u}^n, w) + \alpha\langle \bar{p}^n, g(w) \rangle - \frac{1}{2}|v^{n+1} - w|^2 \quad \forall w \in \Omega. \end{array} \tag{6.5}$$

Будем предполагать в дальнейшем, что функция $\Phi(v, w)$ удовлетворяет условию типа Липшица в форме

$$|[\Phi(w + h, v + k) - \Phi(w + h, v)] - [\Phi(w, v + k) - \Phi(w, v)]| \leq |\Phi|\ |h|\ |k| \tag{6.6}$$

для всех $w, w{+}h \in \Omega$, $v, v{+}k \in \Omega$, где $|\Phi|$ — константа. Класс функций, удовлетворяющий этому условию, не пуст [2]. Кроме того, векторная функция $g(w)$ удовлетворяет условию

$$|g(w + h) - g(w)| \leq |g|\,|h| \tag{6.7}$$

для всех $w, w+h \in \Omega$, где $|g|$ — константа.

Получим оценку отклонения векторов $v^{n+1}$ и $\bar{u}^n$ друг от друга. С этой целью в неравенстве (6.4) положим $w = v^{n+1}$, а в неравенстве (6.5) предположим $w = \bar{u}^n$:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}|\bar{u}^n - v^n|^2 + \alpha\Phi(v^n, \bar{u}^n) + \alpha\langle\bar{p}^n, g(\bar{u}^n)\rangle \le \\ \le\ &\frac{1}{2}|v^{n+1} - v^n|^2 + \alpha\Phi(v^n, v^{n+1}) + \alpha\langle\bar{p}^n, g(v^{n+1})\rangle - \frac{1}{2}|v^{n+1} - \bar{u}^n|^2, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}|v^{n+1} - v^n|^2 + \alpha\Phi(\bar{u}^n, v^{n+1}) + \alpha\langle\bar{p}^n, g(v^{n+1})\rangle \le \\ \le\ &\frac{1}{2}|\bar{u}^n - v^n|^2 + \alpha\Phi(\bar{u}^n, \bar{u}^n) + \alpha\langle\bar{p}^n, g(\bar{u}^n)\rangle - \frac{1}{2}|\bar{u}^n - v^{n+1}|^2. \end{aligned}$$

Затем сложим оба неравенства:

$$|\bar{u}^n - v^{n+1}|^2 + \alpha[\Phi(v^n, \bar{u}^n) - \Phi(v^n, v^{n+1}) - \Phi(\bar{u}^n, \bar{u}^n) + \Phi(\bar{u}^n, v^{n+1})] \le 0.$$

Отсюда с учетом (6.6) имеем

$$|\bar{u}^n - v^{n+1}| \le \alpha|\Phi|\,|v^n - \bar{u}^n|. \tag{6.8}$$

Покажем, что процесс (6.1) сходится монотонно по норме к одному из равновесных решений.

**Теорема 3.** *Если множество решений задачи* (1.1) *не пусто и удовлетворяет условию* (2.5), *которое справедливо для всех* $w \in \Omega$, *целевая функция* $\Phi(v, w)$ *непрерывна по* $v$ *и выпукла по* $w$ *при каждом* $v \in \Omega$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *— выпуклое замкнутое множество, кроме того, функции* $\Phi(v, w)$ *и* $g(w)$ *выпуклы по* $w$ *и удовлетворяют условиям* (6.6), (6.7), *то последовательность* $v^n$, *порожденная методом* (6.1) *с параметром* $0 < \alpha < (\sqrt{2(|\Phi|^2 + |g|^2)})^{-1}$, *сходится монотонно по норме к одному из равновесных решений, т.е.* $v^n \to v^* \in \Omega^*$ *при* $n \to \infty$.

**Доказательство**. Положим $w = v^*$ в (6.5); тогда

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}|v^{n+1} - v^n|^2 + \alpha\Phi(\bar{u}^n, v^{n+1}) + \alpha\langle\bar{p}^n, g(v^{n+1})\rangle \le \\ \le\ &\frac{1}{2}|v^* - v^n|^2 + \alpha\Phi(\bar{u}^n, v^*) + \alpha\langle\bar{p}^n, g(v^*)\rangle - \frac{1}{2}|v^{n+1} - v^*|^2. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}|v^{n+1} - v^*|^2 + \frac{1}{2}|v^{n+1} - v^n|^2 + \alpha[\Phi(\bar{u}^n, v^{n+1}) - \Phi(\bar{u}^n, v^*)] + \\ +\ &\alpha\langle\bar{p}^n, g(v^{n+1}) - g(v^*)\rangle \le \frac{1}{2}|v^n - v^*|^2. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Положим $w = v^{n+1}$ в (6.4)

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}|\bar{u}^n - v^n|^2 + \alpha\Phi(v^n, \bar{u}^n) + \alpha\langle\bar{p}^n, g(\bar{u}^n)\rangle \le \\ \le\ &\frac{1}{2}|v^{n+1} - v^n|^2 + \alpha\Phi(v^n, v^{n+1}) + \alpha\langle\bar{p}^n, g(v^{n+1})\rangle - \frac{1}{2}|v^{n+1} - \bar{u}^n|^2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}|v^{n+1}-\bar{u}^n|^2 &+ \frac{1}{2}|\bar{u}^n-v^n|^2+\alpha[\Phi(v^n,\bar{u}^n)-\Phi(v^n,v^{n+1})]+ \\
&+ \alpha\langle\bar{p}^n,g(\bar{u}^n)-g(v^{n+1})\rangle \le \frac{1}{2}|v^{n+1}-v^n|^2.
\end{aligned}
\tag{6.10}
$$

Сложим неравенства (6.9) и (6.10)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}|v^{n+1}-v^*|^2 &+ \frac{1}{2}|v^{n+1}-\bar{u}^n|^2+\frac{1}{2}|\bar{u}^n-v^n|^2+\alpha[\Phi(\bar{u}^n,\bar{u}^n)-\Phi(\bar{u}^n,v^*)]- \\
&- \alpha[\Phi(\bar{u}^n,\bar{u}^n)-\Phi(\bar{u}^n,v^{n+1})-\Phi(v^n,\bar{u}^n)+\Phi(v^n,v^{n+1})]+ \\
&+ \alpha\langle\bar{p}^n,g(\bar{u}^n)-g(v^*)\rangle \le \frac{1}{2}|v^n-v^*|^2.
\end{aligned}
\tag{6.11}
$$

Положим $w=\bar{u}^n$ в неравенстве (4.2) и выпишем его в виде

$$
\Phi(v^*,v^*)+\langle p^*,g(v^*)\rangle \le \Phi(v^*,\bar{u}^n)+\langle p^*,g(\bar{u}^n)\rangle.
$$

Сложим это неравенство с (6.11). С учетом (6.6) – (6.8) имеем

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}|v^{n+1}-v^*|^2 &+ \frac{1}{2}|v^{n+1}-\bar{u}^n|^2+\left(\frac{1}{2}-\alpha^2|\Phi|^2\right)|\bar{u}^n-v^n|^2+ \\
&+ \alpha[\Phi(\bar{u}^n,\bar{u}^n)-\Phi(\bar{u}^n,v^*)-\Phi(v^*,\bar{u}^n)+\Phi(v^*,v^*)]+ \\
&+ \alpha\langle\bar{p}^n-p^*,g(\bar{u}^n)-g(v^*)\rangle \le |v^n-v^*|^2.
\end{aligned}
\tag{6.12}
$$

Рассмотрим неравенства (6.2) и (6.3). Положим $p=p^*$ в (6.3):

$$
\langle p^{n+1}-p^n,p^*-p^{n+1}\rangle-\alpha\langle g(\bar{u}^n),p^*-p^{n+1}\rangle \ge 0,
\tag{6.13}
$$

и $p=p^{n+1}$ в (6.2):

$$
\begin{aligned}
\langle\bar{p}^n-p^n,p^{n+1}-\bar{p}^n\rangle &+ \alpha\langle g(\bar{u}^n)-g(v^n),p^{n+1}-\bar{p}^n\rangle- \\
&- \alpha\langle g(\bar{u}^n),p^{n+1}-\bar{p}^n\rangle \ge 0.
\end{aligned}
\tag{6.14}
$$

Второе слагаемое в этом неравенстве оценим с помощью (6.7), а затем неравенства (6.13) и (6.14) сложим:

$$
\begin{aligned}
&\langle p^{n+1}-p^n,p^*-p^{n+1}\rangle+\langle\bar{p}^n-p^n,p^{n+1}-\bar{p}^n\rangle+ \\
+ \;&\alpha^2|g|^2\,|\bar{u}^n-v^n|^2-\alpha\langle g(\bar{u}^n),p^*-\bar{p}^n\rangle \ge 0,
\end{aligned}
$$

С помощью тождества (4.13) разложим два первых скалярных произведения в сумму квадратов:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}|p^{n+1}-p^*|^2 &+ \frac{1}{2}|p^{n+1}-\bar{p}^n|^2+\frac{1}{2}|\bar{p}^n-p^n|^2-\alpha^2|g|^2\,|\bar{u}^n-v^n|^2+ \\
&+ \alpha\langle g(\bar{u}^n),p^*-\bar{p}^n\rangle \le \frac{1}{2}|p^n-p^*|^2.
\end{aligned}
\tag{6.15}
$$

Далее сложим (6.12) и (6.15). Учитывая, что $\langle p^{n+1},g(v^*)\rangle \le 0$, $\langle p^*,g(v^*)\rangle = 0$, а также оценку (2.5), имеем

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}|v^{n+1}-v^*|^2+\frac{1}{2}|p^{n+1}-p^*|^2+\frac{1}{2}|v^{n+1}-\bar{u}^n|^2+ \\
+ \;&\left[\left(\frac{1}{2}-\alpha^2(|\Phi|^2+|g|^2)\right)\right]|\bar{u}^n-v^n|^2+\frac{1}{2}|p^{n+1}-\bar{p}^n|^2+\frac{1}{2}|\bar{p}^n-p^n|^2 \le \\
\le \;&\frac{1}{2}|v^n-v^*|^2+\frac{1}{2}|p^n-p^*|^2.
\end{aligned}
\tag{6.16}
$$

Просуммируем неравенство (6.16) от $n=0$ до $n=N$

$$\begin{aligned}|v^{N+1}-v^*|^2 &+ |p^{N+1}-p^*|^2+2d\sum_{k=0}^{k=N}|\bar{u}^k-v^k|^2+\sum_{k=0}^{k=N}|v^{k+1}-\bar{u}^k|^2+\\ &+\sum_{k=0}^{k=N}|p^{k+1}-\bar{p}^k|^2+\sum_{k=0}^{k=N}|\bar{p}^k-p^k|^2\le|v^0-v^*|^2+|p^0-p^*|^2,\end{aligned}$$

где $d=1/2-\alpha^2(|\Phi|^2+|g|^2)>0$. Из полученного неравенства следует ограниченность траектории

$$|v^{N+1}-v^*|^2+|p^{N+1}-p^*|^2\le|v^0-v^*|^2+|p^0-p^*|^2,$$

а также сходимость рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty}|\bar{u}^k-v^k|^2<\infty,\quad \sum_{k=0}^{\infty}|v^{k+1}-\bar{u}^k|^2<\infty,\quad \sum_{k=0}^{\infty}|p^{k+1}-\bar{p}^k|^2<\infty,\quad \sum_{k=0}^{\infty}|\bar{p}^k-p^k|^2<\infty,$$

и, следовательно, стремление к нулю величин

$$|\bar{u}^n-v^n|^2\to0,\quad |v^{n+1}-\bar{u}^n|^2\to0,\quad |p^{n+1}-\bar{p}^n|^2\to0,\quad |\bar{p}^n-p^n|^2\to0,\qquad n\to\infty.$$

Так как последовательность $v^n$, $p^n$ ограничена, то существует элемент $v'$, $p'$ такой, что $v^{n_i}\to v'$, $p^{n_i}\to p'$ при $n_i\to\infty$ и при этом

$$|v^{n_i+1}-\bar{u}^{n_i}|^2\to0,\quad |\bar{u}^{n_i}-v^{n_i}|^2\to0,\quad |p^{n_i+1}-\bar{p}^{n_i}|^2\to0,\quad |\bar{p}^{n_i}-p^{n_i}|^2\to0.$$

Рассмотрим неравенства (6.3), (6.5) для всех $n_i\to\infty$ и, перейдя к пределу, получим:

$$p'=\pi_+(p'+\alpha g(v')),\qquad \Phi(v',v')+\langle p',g(v')\rangle\le\Phi(v',w)+\langle p',g(w)\rangle$$

для всех $w\in\Omega$.

Поскольку эти соотношения эквивалентны (4.3), то $v'=v^*\in\Omega^*$, $p'=p^*\ge0$, т.е. любая предельная точка последовательности $v^n$, $p^n$ является решением задачи. Условие монотонности убывания величины $|v^n-v^*|+|p^n-p^*|$ обеспечивает единственность предельной точки, т.е. сходимость $v^n\to v^*$, $p^n\to p^*$ при $n\to\infty$. Теорема доказана. $\square$

В доказательстве сходимости методов (4.4), (5.1) и (6.1) важную роль играет условие (2.5). Это условие более ограничительно, чем (2.3). Вполне возможно, что условие (2.3) для некоторой задачи выполнено (например, Дуополия Курно), а (2.5) — нет. В этом случае рассмотренные методы все равно могут быть использованы, если основываться на следующих соображениях. Действительно, при доказательствах теорем 2, 3 слагаемые левых частей неравенств (4.9), (5.8) и (6.11) имеют два члена, с которыми возникают некоторые проблемы. Первый из них, а именно слагаемое вида $\Phi(\bar{u}^n,v^*)-\Phi(\bar{u}^n,\bar{u}^n)$, не доставляет особых хлопот, так как его можно оценить с помощью (2.3). Со вторым слагаемым, а именно слагаемым вида $\langle p^{n+1},g(v^*)-g(\bar{u}^n)\rangle$, ситуация несколько сложнее, так как нам необходимо, чтобы этот член был неположительным. Поэтому используем оценку $\langle p^{n+1},g(v^*)-g(\bar{u}^n)\rangle\le0$, исходя из того факта, что $\langle p^{n+1},g(v^*)\rangle\le0$, а величину $g(\bar{u}^n)$ (или, еще лучше, $\langle p^{n+1},g(\bar{u}^n)\rangle$) будем считать неотрицательной, так как любой из рассмотренных методов является внешним по отношению к допустимой области $D=\{w\mid g(w)\le0\}$. Это значит, что если начальное приближение $v^0$ удовлетворяло условию $g(v^0) \geq 0$, то и все последующие приближения с большой вероятностью ему будут удовлетворять, т.е. $g(v^n) \geq 0$. Кроме того, последнее условие всегда можно проверить по ходу реализации метода.

С учетом высказанных соображений аналоги неравенства (4.15) из теорем 2, 3 можно записать в следующей форме:

$$|v^{n+1} - v^*|^2 + d_1|\bar{u}^n - v^n|^2 + d_2|v^{n+1} - \bar{u}^n|^2 \leq |v^n - v^*|^2.$$

Из этого неравенства следует сходимость последовательности $v^n$ к равновесному решению $v^* \in \Omega^*$. Чтобы в этом убедиться, достаточно провести рассуждения теорем, начиная с формул (4.9), (5.8), (6.11) и далее.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Aubin J.-P., Frankowska H.* Set Valued Analysis. Boston etc.: Birkhauser, 1990.

2. *Антипин А.С.* Управляемые проксимальные дифференциальные системы для решения седловых задач // Дифференц. ур-ния. 1992. Т. 28. N° 11. С. 1846–1861.

3. *Антипин А.С.* Обратная задача оптимизации: постановка задачи и подходы к ее решению // Обратные задачи матем. программирования. М.: ВЦ РАН, 1992. С. 4–58.

4. *Fan Ky.* A minimax Inequality and Applications // Inequalities III. New York: Acad. Press, 1972. P. 103–113.

5. *Антипин А.С.* О сходимости и оценках скорости сходимости проксимальных методов к неподвижным точкам экстремальных отображений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1995. Т. 35. N° 5. С. 688–704.

6. *Антипин А.С.* Вычисление неподвижных точек экстремальных отображений с помощью методов градиентного типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1997. Т. 37. N° 1. С. 42–53.

7. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988.

8. *Aubin J.-P., Ekeland I.* Applied nonlinear analysis. New York: John Wiley & Sons, 1984.