Журнал вычислительной математики и математической физики, т.40, No.9, 2000, с.1291–1307.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ СО СВЯЗАННЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ[1]

©2000 г. А.С. Антипин

(Москва)

Пересмотрено 10.11.2003 г.

В работе рассматриваются вариационные неравенства со связанными ограничениями. Вводится класс симметричных векторных функций, формирующих связанные ограничения. Предлагаются явные и неявные, градиентные и проксимальные методы прогнозного типа для решения вариационных неравенств со связанными ограничениями. Доказывается их сходимость.

1. Постановка проблемы

Решить вариационное неравенство со связанными ограничениями — это значит найти вектор $v^* \in \Omega_0$, удовлетворяющий условиям

$$\langle F(v^*), w - v^* \rangle \geq 0 \quad \forall w \in \Omega_0, \quad g(v^*, w) \leq 0, \tag{1.1}$$

где $F(v) : R^n \to R^n$, $g(v, w) : R^n \times R^n \to R^m$, $\Omega_0 \in R^n$ — выпуклое замкнутое множество.

Основное отличие этой постановки от стандартной состоит в присутствии функциональных ограничений вида $g(v, w) \leq 0$, которые связывают параметры и переменные задачи. Наличие связанных ограничений делает эти задачи сложными для решения. Однако серьезные математические модели всегда содержат связанные ограничения. Этим определяется значительный интерес специалистов к такого сорта задачам. В литературе почти нет публикаций, посвященных методам решений вариационных неравенств со связанными ограничениями. В сущности вся литература базируется на единственной статье Дж.В. Розена (1965) [1]. Напротив, стандартной постановке задачи о вариационном неравенстве, включая и методы решения, посвящена обширная научная литература. Отметим, например, популярный обзор [2].

Отметим, что проблемы со связанными ограничениями возникают во многих областях математики. Прежде всего укажем на модели экономического равновесия,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-00064) и по программе государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта 00-15-96080)

которые, по определению, всегда содержат бюджетные ограничения, согласно которым вектор цен, скалярно умноженный на вектор объемов товара, не превышает априори заданных расходов. Эти ограничения по своей природе всегда связанные [3]. Обобщенные постановки игр n лиц также приводят к вариационным неравенствам со связанными ограничениями [4]. Естественным образом связанные ограничения появляются в задачах равновесного [5] и иерархического программирования [6]. Развитие этой тематики в приложениях математической физики, где впервые появились вариационные неравенства, приводит к появлению неравенств со связанными ограничениями [7]. Этот небольшой список проблем показывает, что связанные ограничения не являются атрибутом какой-то одной проблемы. Они характерны для очень широкого класса задач. Поэтому разработка методов решения задач со связанными ограничениями представляется актуальной и чрезвычайно важной. В данной работе предлагается и обосновывается сходимость трех достаточно различных методов решения вариационных неравенств со связанными ограничениями.

2. Проблемные задачи

В этом параграфе сделаем краткий обзор наиболее известных задач, в которых появление связанных ограничений вытекает из существа ситуации.

1. Игра двух лиц со связанными ограничениями. Для простоты рассуждений рассмотрим игру двух лиц со связанными скалярными ограничениями [8, 4]

$$x_1^* \in \operatorname{Argmin}\{f_1(x_1, x_2^*) \mid g_1(x_1, x_2^*) \le g_1(x_1^*, x_2^*), \quad x_1 \in Q_1\},$$
$$x_2^* \in \operatorname{Argmin}\{f_2(x_1^*, x_2) \mid g_2(x_1^*, x_2) \le g_2(x_1^*, x_2^*), \quad x_2 \in Q_2\}, \tag{2.1}$$

где $f_1, f_2, g_1, g_2 : R^n \times R^n \to R^1$. Все функции выпуклы по собственным переменным при любом значении несобственных переменных, т.е. f_1, g_1 выпуклы по x_1 при любом значении x_2 и, соответственно, наоборот, f_2, g_2 выпуклы по x_2 при любом значении x_1.

Любую игру n лиц всегда можно скаляризовать и свести к задаче вычисления неподвижной точки экстремального отображения. Впервые эта процедура была описана в работе [9] для игры без связанных функциональных ограничений. Однако эта процедура может быть перенесена и на игры со связанными ограничениями. Покажем, как это можно сделать. Введем две нормализованные функции вида

$$\Phi(v, w) = f_1(x_1, y_2) + f_2(y_1, x_2), \quad G(v, w) = g_1(x_1, y_2) + g_2(y_1, x_2),$$

где $v = (y_1, y_2)$, $w = (x_1, x_2)$, $v, w \in \Omega_0 = Q_1 \times Q_2$. С помощью введенных функций сформулируем задачу: найти вектор $v^* \in \Omega_0$, удовлетворяющий экстремальному включению

$$v^* \in \operatorname{Argmin}\{\Phi(v^*, w) \mid G(v^*, w) - G(v^*, v^*) \le 0 \;\; w \in \Omega_0\}. \tag{2.2}$$

Покажем, что всякое решение (2.2) является решением (2.1),

Действительно, задача (2.2) эквивалентна выполнению неравенства

$$f_1(x_1^*, x_2^*) + f_2(x_1^*, x_2^*) \le f_1(x_1, x_2^*) + f_2(x_1^*, x_2)$$

для всех x_1, x_2, удовлетворяющих условиям

$$g_1(x_1, x_2^*) + g_2(x_1^*, x_2) - g_1(x_1^*, x_2^*) - g_2(x_1^*, x_2^*) \leq 0 \quad \forall x_1 \in Q_1, \ x_2 \in Q_2.$$

В частности, эта система неравенств верна и для всех пар вида $x_1, x_2^* \in Q_1 \times x_2^*$. Последнее означает, что в этом случае система принимает вид

$$f_1(x_1^*, x_2^*) \leq f_1(x_1, x_2^*)$$

для всех x_1, x_2, удовлетворяющих неравенству

$$g_1(x_1, x_2^*) \leq g_1(x_1^*, x_2^*) \quad \forall x_1 \in Q_1.$$

Так как это множество содержит точку x_1^*, то, очевидно, последняя система неравенств эквивалентна первой задаче из (2.1). Аналогичные рассуждения, проведенные относительно точки x_1^*, x_2, приводят нас ко второй задаче (2.1).

Нетрудно видеть, что задачу (2.2) в случае дифференцируемости целевой функции всегда можно представить в форме вариационного неравенства

$$\langle \nabla_w \Phi(v^*, v^*), w - v^* \rangle \geq 0 \quad \forall w \in \Omega_0, \quad G(v^*, w) \leq G(v^*, v^*),$$

где $\nabla_w \Phi(v, v) = \nabla_w \Phi(v, w)|_{v=w}$.

2. Простейшая модель ценового равновесия. Рассмотрим простейший рынок, на котором действует один агрегированный потребитель [10]. Пусть $f(x)$ — его функция полезности, β — фиксированное количество денег, имеющихся в наличии у потребителя, а x — вектор ресурсов, которые он хочет купить. Стоимость ресурсов описывается вектором цен p. Ситуация характеризуется тем, что с одной стороны потребитель не может купить товары, стоимость которых больше β, а с другой стороны нельзя купить товаров больше, чем есть в наличие на рынке, а именно — больше, чем вектор y_0. Таким образом, предполагая, что потребитель при покупке товаров максимизирует свою функцию полезности, мы приходим к следующей задаче: найти вектор равновесных цен $p = p^*$ и оптимальных ресурсов $x = x^*$ таких, что

$$\begin{gathered} x^* \in \operatorname{Argmax}\{f(x) \mid \langle p^*, x \rangle \leq \beta, \quad x \in Q\}, \\ x^* \leq y_0. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Если материальный баланс $x^* \leq y_0$ в этой задаче усилить требованием финансового баланса $\langle p^*, x^* - y_0 \rangle = 0$, то совокупность этих условий будет удовлетворять неравенству вида $\langle p - p^*, x^* - y_0 \rangle \leq 0 \ \ \forall p \geq 0$. Это означает, что неположительный линейный функционал $\langle p - p^*, x^* - y_0 \rangle$ достигает на положительном ортанте своего максимума в точке p^*. Другими словами, мы приходим к задаче

$$\begin{aligned} x^* &\in \operatorname{Argmax}\{f(x) \mid \langle p^*, x \rangle \leq \beta, \quad x \in Q\}, \\ p^* &\in \operatorname{Argmax}\{\langle p - p^*, x^* - y_0 \rangle \mid p \geq 0\}, \end{aligned}$$

решение которой является решением (2.3). Полученная задача является задачей типа (2.1).

Агрегированный производитель на обсуждаемом рынке представлен вектором y_0. Однако его присутствие на рынке можно существенно усилить, обеспечив ему возможность минимизировать при заданных ценах производство товаров, которые никогда не будут куплены. Таким образом, мы получаем модель ситуации

$$\begin{array}{rcl} x^* & \in & \text{Argmax}\{f(x) \mid \langle p^*, x\rangle \le \beta, \quad x \in Q\}, \\ y^* & \in & \text{Argmin}\{\langle p^*, y\rangle \mid x^* \le y, \quad y \in Y\}, \end{array} \tag{2.4}$$

где Y — множество допустимых планов производителя. В общем случае при произвольных ценах p допустимое множество производителя может оказаться пустым, поэтому в задаче требуется выбрать цены $p = p^*$ таким образом, чтобы обеспечить непустоту множества

$$\{y \mid x^* \le y, \quad y \in Y\} \ne \emptyset,$$

а следовательно и существование решения задачи.

3. Многокритериальная модель принятия решений на подмножестве эффективных точек. Специфика многокритериальной задачи принятия решения [11] состоит в том, что имеется некоторое множество альтернатив $x \in Q$, на котором задан векторный критерий эффективности $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$. Лицо, принимающее решение, старается увеличить на заданном множестве альтернатив каждый из скалярных критериев. В выпуклом случае скаляризация векторного критерия $\langle \lambda, f(x)\rangle = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)$, где $\lambda \ge 0$, позволяет описать множество оптимальных альтернатив (множество Парето) как множество оптимальных решений семейства скалярных задач оптимизации $x_\lambda \in \text{Argmax}\{\langle \lambda, f(x)\rangle \mid x \in Q\}$ [12]. В общем случае в задаче многокритериального принятия решения требуется выбрать значение параметра $\lambda = \lambda^*$ и отвечающее ему оптимальное решение x^* так, чтобы оба вектора принадлежали некоторому априори заданному подмножеству эффективных точек, т.е.

$$x^* \in \text{Argmax}\{\langle \lambda^*, f(x)\rangle \mid x \in Q\},$$
$$g(x^*, \lambda^*) \le 0. \tag{2.5}$$

Предполагая, что размерность векторов λ и $g(x, \lambda)$ одинакова и усиливая требование $g(x^*, \lambda^*) \le 0$ дополнительным условием $\langle \lambda, g(x^*, \lambda^*)\rangle = 0$ мы придем, как и в (2.3), к задаче, решение которой будет являться и решением (2.5):

$$\begin{array}{rcl} x^* & \in & \text{Argmax}\{\langle \lambda^*, f(x)\rangle \mid x \in Q\}, \\ \lambda^* & \in & \text{Argmax}\{\langle \lambda - \lambda^*, g(x^*, \lambda^*)\rangle \mid \lambda \ge 0\}. \end{array}$$

Эта задача типа (2.1).

Если модель (2.5) описывает крупный технический проект, то максимизация векторного критерия обеспечивает эффективность проекта, а условия $g(x, \lambda) \le 0$ описывают финансовые, экологические и другие ограничения.

4. Квазивариационные неравенства. Рассмотрим билинейную игру двух лиц на связанных ограничениях, которые задаются с помощью выпуклого замкнутого множества $K \in Q_1 \times Q_2 \in R^n \times R^n$ [7]. Через любую фиксированную точку $\bar{x} =$

$= (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in K$ проведем два сечения вида $K_1(\bar{x}) = \{x_1 \in R^n | (x_1, \bar{x}_2) \in K\}$, $K_2(\bar{x}) =$ $= \{x_2 \in R^n | (\bar{x}_1, x_2) \in K\}$ и рассмотрим игру

$$\begin{array}{lll} x_1^* & \in & \mathrm{Argmin}\{\langle A_1 x_1, x_2^* \rangle + \langle l_1, x_1 \rangle \mid \ \ x_1 \in K_1(x^*)\}, \\ x_2^* & \in & \mathrm{Argmin}\{\langle x_1^*, A_2 x_2) \rangle + \langle l_2, x_2 \rangle \mid \ \ x_2 \in K_2(x^*)\}, \end{array} \tag{2.6}$$

где $x^* = (x_1^*, x_2^*)$. Если ввести матрицу $A^\top$, где $\top$ — знак транспонирования, с элементами $a_{11} = 0$, $a_{12} = A_1^\top$, $a_{21} = A_2^\top$, $a_{22} = 0$ и вектор $l = (l_1, l_2)$, то задачу (2.6) можно представить в эквивалентной форме как вариационное неравенство

$$\langle A^\top x^*, x - x^* \rangle + \langle l, x - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in K(x^*), \tag{2.7}$$

где $K(x^*) = K_1(x^*) \times K_2(x^*)$.

В случае, когда $A_1^\top$ и $A_2^\top$ — дифференциальные операторы, при этом $K \in Q_1 \times$ $\times Q_2 \subseteq H^1 \times H^2$, где H^1, H^2 — гильбертовы пространства, то задача (2.7) называется квазивариационным неравенством [7].

Заметим, что если в задаче (2.1) функции $g_1(x_1, x_2) = g_2(x_1, x_2)$, то эта задача принимает форму (2.6).

5. Двухуровневое программирование. Обычную задачу поиска максимина можно рассматривать как простейшую задачу иерархического программирования [5]. Действительно, рассмотрим задачу отыскания оптимальной стратегии, максимизирующей функцию минимума:

$$\max_{\mathrm{x}} \{\min_y f(x, y) \mid g(x, y) \leq 0,\ y \in Y\} = \max_{\mathrm{x}} \min_{\mathrm{y}} \{f(x, y) \mid g(x, y) \leq 0,\ y \in Y\}.$$

Здесь $x \in X(y) \subset R^n$ и $y \in Y \subset R^n$. Любая точка многообразия

$$y(x) = \mathrm{Argmin}\{f(x, y) \mid g(x, y) \leq 0,\ y \in Y\}$$

может быть решением этой задачи. Однако если $f(x, y)$, $g(x, y)$ выпуклы по y для любого x и x^* является неподвижной точкой экстремального включения

$$x^* \in \mathrm{Argmin}\{f(x^*, y) \mid g(x^*, y) \leq 0,\ y \in Y\},$$

то задача на минимакс может быть сведена к вычислению неподвижной точки этого экстремального отображения.

3. Симметричные функции

Задачи со связными ограничениями постоянно привлекали и привлекают внимание исследователей. Сошлемся на работы [1], [13], где обсуждается градиентные подходы к решению этих задач. В [14] обсуждаются игровые задачи при связанных ограничениях. Публикация [1] считается одной из лучших и до сих пор активно цитируется. Основная посылка этих работ состоит в предположении, что функция $g(v, w)$, формирующая ограничения, выпукла по совокупности переменных v и w.

Это очень жесткое требование, поскольку оно никогда не выполняется для ограничений моделей экономического равновесия, так как они включают ограничения бюджетного типа: $\langle p, x\rangle \le m$, где p — цены, x — объемы товаров, m — заданные расходы. Здесь функция $g(p,x) = \langle p, x\rangle$ не является выпуклой по совокупности переменных.

В настоящей работе мы отказываемся от требования выпуклости функции $g(v,w)$ по переменным v и w одновременно, а вместо этого используем свойство симметрии этой функции относительно диагонали квадрата $\Omega_0 \times \Omega_0$, т.е. многообразия $v = w$.

Введем следующее

Определение 1. *Функцию $g(v,w)$ из $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ назовем симметричной на $R^n \times R^n$, если она удовлетворяет условию*

$$g(v,w) = g(w,v) \;\; \forall w \in \Omega_0, \;\; \forall v \in \Omega_0. \tag{3.1}$$

Привести примеры симметричных функций несложно. Это прежде всего функции, порождающие бюджетные ограничения в моделях экономического равновесия вида: $g(v,w) = \langle v, w\rangle$ или $g(v,w) = \langle Av, w\rangle$, где A — симметричная матрица. В приложениях широко известны производственные функции Кобба–Дугласа и с постоянной эластичностью замены ресурсов: $g(v,w) = Av^{\alpha}w^{\beta}$ и $g(v,w) = A(\alpha v^{-\omega} + \beta w^{-\omega})^{-\gamma/\omega}$, где $A > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\omega > 0$ — параметры. Если α и β равны, то эти функции симметричны в смысле (3.1). Нетрудно проверить, что функция $\Phi(v,w) = f(x_1,y_2) + f(y_1,x_2)$, где $v = (y_1,y_2)$, $w = (x_1,x_2)$, является симметричной.

Выясним характеристические свойства симметричных функций [15]. С этой целью продифференцируем тождество (3.1) по переменной w, тогда получим

$$\nabla_w^{\top} g(v,w) = \nabla_v^{\top} g(w,v) \;\; \forall w \in \Omega_0, \;\; \forall v \in \Omega_0, \tag{3.2}$$

где $\nabla_w^{\top} g(v,w)$, $\nabla_v^{\top} g(w,v)$ — матрицы $m \times n$, строками которых служат векторы $\nabla_v g_i(w,v)$, $\nabla_w g_i(v,w)$, $i = 1,2,\dots,m$.

Положим $w = v$ в (3.2); тогда имеем

$$\nabla_w^{\top} g(v,v) = \nabla_v^{\top} g(v,v) \;\; \forall v \in \Omega_0. \tag{3.3}$$

Таким образом, мы можем сформулировать следующее

Свойство 1. *Матрицы градиент-сужений векторной симметричной функции $g(v,w)$ по переменным v и w на диагонали квадрата $\Omega_0 \times \Omega_0$ равны между собой.*

По определению дифференцируемости функции $g(v,w)$ имеем [16]

$$g(v+h, w+k) = g(v,w) + \nabla_v^{\top} g(v,w)h + \nabla_w^{\top} g(v,w)k + \omega(v,w,h,k), \tag{3.4}$$

где $\omega(v,w,h,k)/(|h|^2 + |k|^2)^{1/2} \to 0$ при $|h|^2 + |k|^2 \to 0$. Пусть $w = v$ и $h = k$, тогда с учетом (3.3) из (3.4) получим

$$g(v+h, v+h) = g(v,v) + 2\nabla_w^{\top} g(v,v)h + \omega(v,h), \tag{3.5}$$

где $\omega(v,h)/|h| \to 0$ при $|h| \to 0$. Поскольку формула (3.5) есть частный случай (3.4), то она означает, что сужение градиента $\nabla_w^\top g(v,w)$ на диагональ квадрата $\Omega_0 \times \Omega_0$ является градиентом $\nabla^\top g(v,v)$ функции $g(v,v)$, т.е.

$$2\nabla_w^\top g(v,w)|_{v=w} = \nabla^\top g(v,v) \ \ \forall v \in \Omega_0. \tag{3.6}$$

Таким образом, доказано следующее [17]

Свойство 2. *Оператор $2\nabla_w g(v,w)|_{v=w}$ является потенциальным и совпадает с градиентом сужения симметричной функции $g(v,w)$ на диагонали квадрата, т.е. $2\nabla_w^\top g(v,v) = \nabla^\top g(v,v)$.*

Это ключевое свойство симметричных функций будет играть решающую в дальнейшем изложении.

Мы уже отмечали, что если в задаче (2.1) функции $g_1(x_1,x_2)$ и $g_2(x_1,x_2)$ равны, то задача (2.1) приводится к виду (2.6). Убедимся, что в этом случае нормализованная функция $G(v,w)$ из (2.2) удовлетворяет свойству симметрии (3.1). Действительно, $G(v,w) = g_1(x_1,y_2)+g_2(y_1,x_2)$ и $G(w,v) = g_1(y_1,x_2)+g_2(x_1,y_2)$, но так как $g_1(x_1,x_2) = g_2(x_1,x_2)$, то, очевидно, $G(v,w) = G(w,v)$. Таким образом, задача (2.1) в обсуждаемом случае имеет связные симметричные ограничения.

4. Симметризация

Связанные ограничения в задаче (1.1) могут не обладать свойствами симметрии, например, они могут быть антисимметричными, т.е. удовлетворять условию $g(v,w) = -g(w,v) \ \ \forall v,w \in \Omega_0$. Покажем, что в этом случае связанные ограничения не влияют на решение задачи (1.1) и, следовательно, эти ограничения можно совсем отбросить. Действительно, рассмотрим пару задач

$$\langle F(v^*), w - v^* \rangle \geq 0, \quad \forall w \in \Omega_0,$$

и

$$\langle F(v^*), w - v^* \rangle \geq 0, \quad g(v^*,w) \leq 0, \quad \forall w \in \Omega_0,$$

где $g(v,w)$ — антисимметричная функция. Такая функция на диагонали квадрата $\Omega_0 \times \Omega_0$ всегда равна нулю, так как при $v = w$ из $g(v,v) = -g(v,v)$ следует, что $g(v,v) = 0$. Рассмотрим пересечение двух множеств $\Omega_0 \bigcap \{w \mid g(v^*,w) \leq 0\}$. Это пересечение всегда непусто (содержит точку v^*) и является подмножеством Ω_0. Так как v^* является точкой минимума функции $\langle F(v^*), w - v^* \rangle$ на Ω_0, т.е. решением первой задачи, то она тем более будет минимумом этой функции на любом его подмножестве, т.е. решение второй задачи. Таким образом, антисимметричные связанные ограничения в равновесных задачах всегда можно отбросить.

В общем случае, если функция $g(v,w)$ не является ни симметричной, ни антисимметричной, то ограничения задачи (1.1) можно симметризовать. Действительно, введем два подкласса векторных симметричных и антисимметричных функций:

$$g(v,w) - g(w,v) = 0 \ \ \forall w \in \Omega_0, \quad \forall v \in \Omega_0, \tag{4.1}$$

$$g(v,w)+g(w,v)=0 \quad \forall w\in\Omega_0, \quad \forall v\in\Omega_0. \tag{4.2}$$

Эти условия обобщают понятия симметричных и антисимметричных матриц [17]. Транспонированную функцию определим как $g^\top(v,w)=g(w,v)$ [15]. В терминах этой функции условия симметричности (4.1) и антисимметричности (4.2) имеют вид

$$\Phi(v,w)=\Phi^\top(v,w), \quad \Phi(v,w)=-\Phi^\top(v,w).$$

Используя очевидные соотношения $\Phi(v,w)=(\Phi^\top(v,w))^\top$, $(\Phi_1(v,w)+\Phi_2(v,w))^\top = \Phi_1^\top(v,w)+\Phi_2^\top(v,w)$, нетрудно проверить, что любая вещественная функция $\Phi(v,w)$ имеет разложение

$$g(v,w)=s(v,w)+k(v,w), \tag{4.3}$$

где $s(v,w)$ — симметричная, а $k(v,w)$ — антисимметричная функции. Это разложение единственно, причем

$$s(v,w)=\frac{1}{2}(g(v,w)+g^\top(v,w)), \quad k(v,w)=\frac{1}{2}(g(v,w)-g^\top(v,w)). \tag{4.4}$$

Используя полученное разложение, представим функциональные ограничения задачи (1.1) в форме $\{w \mid g(v^*,w)=s(v^*,w)+k(v^*,w)\le 0,\ w\in\Omega_0\}$. Из рассуждений, проведенных в начале этого параграфа, по-видимому, должно следовать, что и здесь антисимметричную часть ограничений можно отбросить. Действительно, пусть v^* — решение задачи

$$\langle F(v^*), w-v^*\rangle \ge 0, \quad s(v^*,w)\le 0, \quad w\in\Omega_0. \tag{4.5}$$

Введем обозначения для множеств $D=\{w \mid g(v^*,w)\le 0,\ w\in\Omega_0\}$ и $K_1=\{w \mid k(v^*,w)\le 0,\ w\in\Omega_0\}$, $K_2=\{w \mid k(v^*,w)>0,\ w\in\Omega_0\}$. Разобьем допустимое множество исходной задачи D на две части $D_1=D\bigcap K_1$ и $D_2=D\bigcap K_2$, причем $D=D_1\cup D_2$. Для всех $w\in D_2$ величину $k(v^*,w)$ в неравенстве $s(v^*,w)+k(v^*,w)\le 0$, $w\in\Omega_0$ можно опустить и тогда можно утверждать, что $D_2\subset\{w \mid s(v^*,w)\le 0,\ w\in\Omega_0\}$. С другой стороны, рассмотрим пересечение $D_1\bigcap\{w \mid s(v^*,w)\le 0,\ w\in\Omega_0\}$, которому принадлежит решение v^* и на котором функция $\langle F(v^*), w-v^*\rangle$ достигает минимума. Любая точка этого пересечения, как нетрудно видеть, удовлетворяет условию $s(v^*,w)+k(v^*,w)\le 0$, $w\in\Omega_0$. Следовательно, если решение задачи (1.1) имеет внутреннюю окрестность, например, когда выполняется условие $g(v^*,v^*) < 0$, $w\in\Omega_0$, то решение (4.5) является решением (1.1).

Таким образом, чтобы найти решение задачи (1.1), необходимо решить симметризованную задачу

$$\langle F(v^*), w-v^*\rangle, \quad g(v^*,w)+g^\top(v^*,w)\le 0, \quad \forall w\in\Omega_0.$$

Идея симметризации ограничений открывает принципиальную возможность решать равновесные задачи со связанными ограничениями. Некоторые соображения о симметризации множеств можно найти также в [18].

5. Приведение к седловой задаче

Задачу (1.1) всегда можно рассматривать как задачу минимизации линейной функции $f(w) = \langle F(v^*), w - v^* \rangle$ на множестве $\Omega = \{w \in \Omega_0 \mid g(v^*, w) \le 0\}$. Введем функцию Лагранжа $\mathcal{L}(v^*, w, p) = \langle F(v^*), w - v^* \rangle + \langle p, g(v^*, w) \rangle \;\; \forall w \in \Omega_0, \;\; \forall p \ge 0$, где v^* — решение задачи, а w и p — прямые и двойственные переменные. Так как v^* — минимум $f(w)$ на Ω, то пара v^*, p^* (при выполнении некоторых условий регулярности) является седловой точкой $\mathcal{L}(v^*, w, p)$, т.е. удовлетворяет системе неравенств

$$
\begin{aligned}
&\langle F(v^*), v^* - v^* \rangle + \langle p, g(v^*, v^*) \rangle \le \\
&\le \langle F(v^*), v^* - v^* \rangle + \langle p^*, g(v^*, v^*) \rangle \le \\
&\le \langle F(v^*), w - v^* \rangle + \langle p^*, g(v^*, w) \rangle
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

для всех $w \in \Omega_0$ и $p \ge 0$.

Эту систему неравенств можно представить несколько иначе

$$
\begin{array}{lcl}
v^* & \in & \operatorname{Argmin}\{\langle F(v^*), w - v^* \rangle + \langle p^*, g(v^*, w) \rangle \mid w \in \Omega_0\}, \\
p^* & \in & \operatorname{Argmax}\{\langle p, g(v^*, v^*) \rangle \mid p \ge 0\}.
\end{array}
\tag{5.2}
$$

Существуют и другие эквивалентные формы представлений системы (5.1). Предполагая дифференцируемость $g(v, w)$ по w для любого v, перепишем систему (5.2) как

$$
\begin{array}{l}
\langle F(v^*) + \nabla_w^\top g(v^*, v^*) p^*, w - v^* \rangle \ge 0 \;\; \forall w \in \Omega_0, \\
\langle -g(v^*, v^*), p - p^* \rangle \ge 0 \quad \forall p \ge 0.
\end{array}
\tag{5.3}
$$

Полученную систему вариационных неравенств с использованием оператора проектирования представим в форме операторных уравнений

$$
\begin{array}{lcl}
v^* & = & \pi_{\Omega_0}(v^* - \alpha(F(v^*) + \nabla_w^\top g(v^*, v^*) p^*), \\
p^* & = & \pi_+(p^* + \alpha g(v^*, v^*)),
\end{array}
\tag{5.4}
$$

где $\pi_+(\ldots)$, $\pi_{\Omega_0}(\ldots)$ — операторы проектирования некоторого вектора на положительный ортант R^n_+ и множество Ω_0, $\alpha > 0$ — параметр типа длины шага.

Преобразуем систему неравенств (5.3). Первое неравенство из этой системы представим как

$$\langle F(v^*), w - v^* \rangle + \langle p^*, \nabla_w g(v^*, v^*)(w - v^*) \rangle \ge 0 \;\; \forall w \in \Omega_0.$$

Затем, учитывая ключевое свойство симметричных функций (3.6) и выпуклость функции $g(v, w)_{v=w}$ на диагонали квадрата $\Omega_0 \times \Omega_0$, отдельно преобразуем член

$$\langle p^*, \nabla_w g(v^*, v^*)(w - v^*) \rangle = \frac{1}{2} \langle p^*, \nabla g(v^*, v^*)(w - v^*) \rangle \le \frac{1}{2} \langle p^*, g(w, w) - g(v^*, v^*) \rangle.$$

Отсюда окончательно (5.3) можно представить как

$$
\begin{array}{l}
\langle F(v^*), w - v^* \rangle + \dfrac{1}{2} \langle p^*, g(w, w) - g(v^*, v^*) \rangle \ge 0 \;\; \forall w \in \Omega_0, \\
\langle -g(v^*, v^*), p - p^* \rangle \ge 0 \quad \forall p \ge 0.
\end{array}
\tag{5.5}
$$

Таким образом, решение вариационного неравенства со связанными ограничениями сведено к седловой задаче (5.5). Для решения этой задачи имеются методы [19]. Однако развитие методов в терминах исходной задачи представляет значительный интерес по крайней мере по двум причинам: во-первых, эти методы интерпретируются как динамические модели согласования конфликта факторов или интересов и, во-вторых, эти методы станут базовыми для различных процедур симметризации для задач с несимметричными связанными ограничениями.

6. Метод модифицированной функции Лагранжа

Чтобы решить систему уравнений (5.2), рассмотрим метод типа простой итерации

$$\begin{array}{rcl} v^{n+1} & \in & \operatorname{argmin}\{\frac{1}{2}|w-v^n|^2+\alpha(\langle F(v^n),w-v^n\rangle+\langle p^n,g(v^n,w)\rangle)\mid w\in\Omega_0\}, \\ p^{n+1} & = & \pi_+(p^n+\alpha g(v^{n+1},v^{n+1})). \end{array} \tag{6.1}$$

Однако известно, что этот метод не сходится к решениям даже в случае задач оптимизации, тем более трудно рассчитывать на его сходимость в равновесной ситуации. В оптимизации выход был найден за счет использования модифицированной функции Лагранжа. Убедимся, что эта идея, поддержанная симметрией функции $g(v,w)$, эффективна и в нашем случае [20, 21]. Рассмотрим метод модифицированной функции Лагранжа для вариационных неравенств со связанными ограничениями

$$\begin{array}{rcl} v^{n+1} & \in & \operatorname{argmin}\{\frac{1}{2}|w-v^n|^2+\alpha\mathcal{M}(v^{n+1},w,p^n)\mid w\in\Omega_0\}, \\ p^{n+1} & = & \pi_+(p^n+\alpha g(v^{n+1},v^{n+1})), \quad \alpha>0, \end{array} \tag{6.2}$$

где

$$\mathcal{M}(v,w,p)=\langle F(v),w-v\rangle+\frac{1}{2\alpha}\,|\pi_+(p+\alpha g(v,w))|^2-\frac{1}{2\alpha}|p|^2$$

определена для всех $v,w\in I\!\!R^n\times I\!\!R^n$, $p\ge 0$. Здесь v^n, p^n — найденное приближение, а v^{n+1}, p^{n+1} — искомое решение. Соотношения (6.2) представляют собой уравнения относительно переменных v^{n+1}, которые входят как в левую, так и в правую часть выражения (неявная схема).

Представим процесс (6.2) в форме вариационных неравенств

$$\langle v^{n+1}-v^n+\alpha(F(v^{n+1})+\nabla_w^\top g(v^{n+1},v^{n+1})\pi_+(p^n+\alpha g(v^{n+1},v^{n+1})),w-v^{n+1}\rangle\ge 0, \tag{6.3}$$

$$\langle p^{n+1}-p^n-\alpha g(v^{n+1},v^{n+1}),p-p^{n+1}\rangle\ge 0. \tag{6.4}$$

для всех $w\in\Omega_0$ и $p\ge 0$. Итеративные формулы процесса (6.2) и вариационные неравенства (6.3) и (6.4) эквивалентны.

Сопоставляя эти вариационные неравенства с исходной задачей (1.1), важно отметить, что исходная задача со связанными ограничениями заменена последовательностью задач, состоящих из системы двух обычных (без связанных ограничений) вариационных неравенств, для решения которых развита достаточно богатая техника различных методов [2].

Прежде чем доказывать сходимость метода (6.2) (монотонную по норме) к одному из равновесных решений задачи, сделаем одно важное замечание. В условиях теоремы требуется выпуклость функции $g(v,w)$ только на диагонали квадрата $\Omega_0\times\Omega_0$ и не требуется ее выпуклость по переменной w для любого v. Однако в методе (6.2) предполагается минимизация регуляризованной функции $\mathcal{M}(v^{n+1}, w, p^n)$ по w для любого v, которая содержит $g(v, w)$. Функцию $\frac{1}{2}|w - v^n|^2 + \mathcal{M}(v^{n+1}, w, p^n)$ всегда можно считать выпуклой, если параметр α достаточно мал. Согласно условиям теоремы этот параметр может принимать любые значения, в том числе и достаточно малые.

Убедимся, что любую функцию, градиент которой удовлетворяет условию Липшица, всегда можно овыпуклить (вверх или вниз). Действительно, пусть градиент функции $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица, т.е. $\langle \nabla f(x+h) - \nabla f(x), h\rangle \leq L|h|^2$ на некотором множестве, или

$$-L|h|^2 \leq \langle \nabla f(x+h) - \nabla f(x), h\rangle \leq L|h|^2.$$

Из левого неравенства этой системы имеем

$$\langle (\nabla f(x+h) + LI(x+h)) - (\nabla f(x) + LI(x), h\rangle \geq 0.$$

Последнее означает, что функция $f_\alpha(x) = f(x) + (1/2)\alpha|x|^2$ для всех $\alpha \geq L$ выпуклая (или даже сильно выпуклая, если $\alpha > L$) на некотором множестве переменой x. Аналогичные рассуждения относительно правого неравенства системы приводят нас к утверждению, что функция $f_\alpha(x) = f(x) - (1/2)\alpha|x|^2$ для всех $\alpha \geq L$ — вогнутая на том же множестве. Другими словами, регуляризация невыпуклой функции приводит к ее овыпуклению для достаточно больших значениях параметра регуляризации.

Т е о р е м а 1 . *Если множество решений задачи (1.1) непусто, оператор $F(v)$ монотонный, вектор-функция $g(v, w)$ симметричная и дифференцируемая по w для любого v, а ее сужение $g(v, w)|_{v=w}$ на диагональ квадрата —- выпуклая функция, $\Omega \subseteq$ $\subseteq \mathbb{R}^n$ — выпуклое замкнутое множество, параметр $\alpha > 0$, то последовательность v^n, порожденная методом (6.2), сходится монотонно по норме к одному из равновесных решений, т.е. $v^n \to v^* \in \Omega^*$ при $n \to \infty$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Положим в (6.3) $w = v^*$; тогда с учетом второго уравнения из (6.2) имеем

$$\langle v^{n+1} - v^n + \alpha F(v^{n+1}) + \alpha \nabla_w^\top g(v^{n+1}, v^{n+1}) p^{n+1}, v^* - v^{n+1}\rangle \geq 0.$$

Преобразуем полученное неравенство

$$\begin{gathered} \langle v^{n+1} - v^n, v^* - v^{n+1}\rangle + \alpha\langle F(v^{n+1}), v^* - v^{n+1}\rangle + \\ +\alpha\langle \nabla_w^\top g(v^{n+1}, v^{n+1}) p^{n+1}, v^* - v^{n+1}\rangle \geq 0. \end{gathered} \tag{6.5}$$

Учитывая (3.6) и выпуклость функции $g(v, v)$, преобразуем отдельно последнее слагаемое из (6.5)

$$\begin{aligned} \langle p^{n+1}, \nabla_w g(v^{n+1}, v^{n+1})(v^* - v^{n+1})\rangle &= \frac{1}{2}\langle p^{n+1}, \nabla g(v^{n+1}, v^{n+1})(v^* - v^{n+1})\rangle \leq \\ &\leq \frac{1}{2}\langle p^{n+1}, g(v^*, v^*) - g(v^{n+1}, v^{n+1})\rangle, \end{aligned} \tag{6.6}$$

тогда получим

$$\begin{gathered}\langle v^{n+1}-v^n, v^*-v^{n+1}\rangle+\alpha\langle F(v^{n+1}), v^*-v^{n+1}\rangle+\\ +\frac{\alpha}{2}\langle p^{n+1}, g(v^*,v^*)-g(v^{n+1},v^{n+1})\rangle\geq 0.\end{gathered}\tag{6.7}$$

Положим $w=v^{n+1}$ в первом неравенстве (5.5); тогда

$$\langle F(v^*), v^{n+1}-v^*\rangle+\frac{1}{2}\langle p^*, g(v^{n+1},v^{n+1})-g(v^*,v^*)\rangle\geq 0.\tag{6.8}$$

Сложим (6.7) и (6.8)

$$\begin{gathered}\langle v^{n+1}-v^n, v^*-v^{n+1}\rangle+\alpha\langle F(v^{n+1})-F(v^*), v^*-v^{n+1}\rangle+\\ +\frac{\alpha}{2}\langle p^{n+1}-p^*, g(v^*,v^*)-g(v^{n+1},v^{n+1})\rangle\geq 0.\end{gathered}\tag{6.9}$$

Далее положим $p=p^*$ в неравенстве (6.4), а также, учитывая соотношения $\langle p^{n+1}, g(v^*,v^*)\rangle\leq 0,\quad \langle p^*, g(v^*,v^*)\rangle=0$, можем написать

$$\frac{1}{2}\langle p^{n+1}-p^n, p^*-p^{n+1}\rangle-\frac{\alpha}{2}\langle g(v^{n+1},v^{n+1})-g(v^*,v^*), p^*-p^{n+1}\rangle\geq 0.\tag{6.10}$$

С учетом монотонности оператора $F(v)$ сложим (6.9) и (6.10); тогда

$$\langle v^{n+1}-v^n, v^*-v^{n+1}\rangle+\frac{1}{2}\langle p^{n+1}-p^n, p^*-p^{n+1}\rangle\geq 0.$$

Используя тождество

$$|x_1-x_3|^2=|x_1-x_2|^2+2\langle x_1-x_2, x_2-x_3\rangle+|x_2-x_3|^2,\tag{6.11}$$

разложим скалярные произведения в левой части полученного неравенства на сумму квадратов

$$|v^{n+1}-v^*|^2+\frac{1}{2}|p^{n+1}-p^*|^2+|v^{n+1}-v^n|^2+\frac{1}{2}|p^{n+1}-p^n|^2\leq|v^n-v^*|^2+\frac{1}{2}|p^n-p^*|^2.\tag{6.12}$$

Просуммируем неравенство (6.12) от $n=0$ до $n=N$:

$$\begin{aligned}&|v^{N+1}-v^*|^2+\frac{1}{2}|p^{N+1}-p^*|^2+\sum_{k=0}^{k=N}|v^{k+1}-v^k|^2+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{k=N}|p^{k+1}-p^k|^2\leq\\ \leq\ &|v^0-v^*|^2+\frac{1}{2}|p^0-p^*|^2.\end{aligned}$$

Из полученного неравенства следует ограниченность траектории:

$$|v^{N+1}-v^*|^2+\frac{1}{2}|p^{N+1}-p^*|^2\leq|v^0-v^*|^2+\frac{1}{2}|p^0-p^*|^2,\tag{6.13}$$

а также сходимость рядов:

$$\sum_{k=0}^{\infty}|v^{k+1}-v^k|^2<\infty,\quad \sum_{k=0}^{\infty}|p^{k+1}-p^k|^2<\infty$$

и, следовательно, стремление к нулю величин

$$|v^{n+1} - v^n|^2 \to 0, \quad |p^{n+1} - p^n|^2 \to 0, \quad n \to \infty. \tag{6.14}$$

Так как последовательность v^n, p^n ограничена, то существует элемент v', p' такой, что $v^{n_i} \to v'$, $p^{n_i} \to p'$ при $n_i \to \infty$ и при этом

$$|v^{n_i+1} - v^{n_i}|^2 \to 0, \quad |p^{n_i+1} - p^{n_i}|^2 \to 0.$$

Рассмотрим неравенства (6.3), (6.4) для всех $n_i \to \infty$ и, перейдя к пределу, получим:

$$\begin{array}{l} \langle F(v') + \nabla_w^\top g(v', v')p', w - v' \rangle \geq 0, \quad p' = \pi_+(p' + \alpha g(v', v')), \\ \langle -g(v', v'), p - p' \rangle \geq 0 \quad \forall p \geq 0. \end{array}$$

Поскольку эти соотношения совпадают с (5.3), то $v' = v^* \in \Omega^*$, $p' = p^* \geq 0$, т.е. любая предельная точка последовательности v^n, p^n является решением задачи. Условие монотонности убывания величины $|v^n - v^*| + |p^n - p^*|$ обеспечивает единственность предельной точки, т.е. сходимость $v^n \to v^*$, $p^n \to p^*$ при $n \to \infty$. Теорема доказана.

Приведенное доказательство представляет собой базовую схему, которую при желании можно обобщить, если появляется необходимость оперировать с приближенными решениями регуляризованной задачи и в условиях, когда функции $\Phi(v, w)$ и $g(w)$ заданы приближенно.

7. Проксимальный метод прогнозного типа по двойственным переменным

Метод (6.2) сходится благодаря модифицированной функции Лагранжа. Однако во многих случаях модифицированная функция Лагранжа нарушает декомпозиционную структуру задачи, если такая имеется. Например, задача может иметь блочно-сепарабельную структуру, которая позволяет исходную задачу декомпозировать на независимые подзадачи; однако использование модифицированной функции Лагранжа приводит к ее потере. С другой стороны, если вместо модифицированной функции Лагранжа использовать обычную функцию Лагранжа, то блочно-сепарабельная структура задачи сохраняется, так как обычная функция Лагранжа представляет собой линейную свертку целевой функции и функциональных ограничений. Последнее означает, что если в итеративных методах используется функция Лагранжа (вместо модифицированной), то вспомогательная оптимизационная задача на каждой итерации этих методов также распадается (декомпозируется) на ряд независимых подзадач меньшей размерности. Это обстоятельство имеет большое значение для игровых задач, поскольку они, как правило, имеют большую размерность.

В этом разделе рассмотрим аналог метода (6.2), в основе которого лежит обычная функция Лагранжа. Пусть v^n, p^n — найденное приближение, тогда следующее приближение v^{n+1}, p^{n+1}, найдем по формулам [20, 21]

$$\begin{array}{lcl} \bar{p}^n & = & \pi_+(p^n + \alpha_n g(v^n, v^n)), \\ v^{n+1} & = & \text{argmin}\{\frac{1}{2}\,|w - v^n|^2 + \alpha_n L(v^{n+1}, w, \bar{p}^n) \mid w \in \Omega\}, \\ p^{n+1} & = & \pi_+(p^n + \alpha_n g(v^{n+1}, v^{n+1})), \end{array} \tag{7.1}$$

где

$$L(v,w,p) = \langle F(v), w-v\rangle + \langle p, g(v,w)\rangle.$$

Длина шага α_n в процессе (7.1) определяется либо из условия

$$0 < \varepsilon \le \alpha_n < \sqrt{2}/|g|, \quad \varepsilon > 0, \tag{7.2}$$

где константа $|g|$ определена в (7.4), либо из условия

$$\alpha_n |g(v^{n+1}, v^{n+1}) - g(v^n, v^n)| \le \sqrt{2(1-\varepsilon)}|v^{n+1} - v^n|. \tag{7.3}$$

Для проверки выполнения условия (7.3) сначала выберем произвольное число α_0 (одно и тоже для всех итераций, например $\alpha_0 = 1$), затем вычислим две первых итерации (7.1), т.е. векторы $\bar{p}^n$, v^{n+1}, и проверим условие. Если оно выполнено, то в качестве длины шага возьмем найденное значение, если нет — произведем дробление параметра (путем умножения на число, меньшее единицы) до тех пор, пока не выполнится условие (7.3).

На первый взгляд может показаться, что обсуждаемый способ выбора длины шага является слишком трудоемким. И действительно, для определения параметра α_n, вообще говоря, придется несколько раз решать задачу минимизации сильно выпуклой функции на простом множестве. Но такой способ действий не предполагает знания априорных констант типа Липшица или типа верхней оценки множителей Лагранжа. К тому же совсем не обязательно на каждой итерации определять новые значения параметров. Может оказаться достаточным использовать старые параметры, время от времени корректируя их.

Для обоснования корректности способа выбора параметра α_n из условий (7.2) и (7.3) будем предполагать, что оператор $g(v,v)$ подчинен условию Липшица

$$|g(v+h, v+h) - g(v,v)| \le |g|\,|h| \tag{7.4}$$

для всех $w, w+h \in \Omega$, где $|g|$ — константа. Условие (7.4) позволяет оценить величину отклонения двух векторов $\bar{p}^n$ и p^{n+1}. Из (7.1) с учетом (7.4) имеем

$$\left|\bar{p}^n - p^{n+1}\right| \le \alpha_n \left|g(v^n, v^n) - g(v^{n+1}, v^{n+1})\right|. \tag{7.5}$$

Любая пара точек v^{n+1} и v^n процесса (7.1) согласно (7.4) подчинена условию

$$\left|g(v^{n+1}, v^{n+1}) - g(v^n, v^n)\right| \le |g| \left|v^{n+1} - v^n\right|.$$

Это неравенство тем более всегда будет выполнено, если параметр α_n в (8.1) выбрать из условия $\sqrt{2(1-\varepsilon)}/\alpha_n \ge |g|$ или, что тоже самое, из условия $\alpha_n \le \sqrt{2(1-\varepsilon)}/|g|$, т.е.

$$|g(v^{n+1}, v^{n+1}) - g(v^n, v^n)| \le \frac{\sqrt{2(1-\varepsilon)}}{\alpha_n}|v^{n+1} - v^n|.$$

Последнее означает, что всегда существует α_n, удовлетворяющее условию (7.3). Фактически это условие представляет собой способ оценки неизвестной константы Липшица $|g|$ по ходу реализации метода.

Представим процесс (7.1) в виде вариационных неравенств

$$\langle v^{n+1} - v^n + \alpha_n(F(v^{n+1}) + \nabla_w^\top g(v^{n+1}, v^{n+1})\bar{p}^n), w - v^{n+1}\rangle \geq 0 \quad \forall w \in \Omega_0, \tag{7.6}$$

$$\langle \bar{p}^n - p^n - \alpha_n g(v^n, v^n), p - \bar{p}^n\rangle \geq 0 \quad \forall p \geq 0, \tag{7.7}$$

$$\langle p^{n+1} - p^n - \alpha_n g(v^{n+1}, v^{n+1}), p - p^{n+1}\rangle \geq 0 \quad \forall p \geq 0. \tag{7.8}$$

Конечно, итеративные формулы процесса (7.1) и вариационные неравенства (7.6)–(7.8) эквивалентны.

Докажем монотонную (по норме) сходимость метода (7.1) к одному из равновесных решений задачи.

Теорема 2. *Если множество решений задачи (1.1) непусто, оператор $F(v)$ монотонный, вектор-функция $g(v,w)$ симметричная и дифференцируемая по w для любого v, а ее сужение $g(v,w)|_{v=w}$ на диагонали квадрата — выпуклая функция, $\Omega \subseteq$ $\subseteq \mathbb{R}^n$ — выпуклое замкнутое множество, то последовательность v^n, порожденная методом (7.1) с выбором параметра α_n способом (7.2) или (7.3), сходится монотонно по норме к одному из равновесных решений, т.е. $v^n \to v^* \in \Omega^*$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Положим $w = v^*$ в (7.6)

$$\langle v^{n+1} - v^n + \alpha_n(F(v^{n+1}) + \nabla_w^\top g(v^{n+1}, v^{n+1})\bar{p}^n, v^* - v^{n+1}\rangle \geq 0. \tag{7.9}$$

По схеме (6.6) преобразуем последнее слагаемое из (7.9)

$$\begin{gathered}\langle v^{n+1} - v^n, v^* - v^{n+1}\rangle + \alpha_n\langle F(v^{n+1}), v^* - v^{n+1}\rangle + \\ + \frac{\alpha_n}{2}\langle \bar{p}^n, g(v^*, v^*) - g(v^{n+1}, v^{n+1}\rangle \geq 0.\end{gathered} \tag{7.10}$$

Сложим неравенства (6.8) и (7.10)

$$\begin{gathered}\langle v^{n+1} - v^n, v^* - v^{n+1}\rangle + \alpha_n\langle F(v^{n+1}) - F(v^*), v^* -^{n+1}\rangle + \\ + \frac{\alpha_n}{2}\langle \bar{p}^n - p^*, g(v^*, v^*) - g(v^{n+1}, v^{n+1})\rangle \geq 0.\end{gathered} \tag{7.11}$$

Рассмотрим неравенства (7.7) и (7.8). Положим $p = p^*$ в (7.8)

$$\langle p^{n+1} - p^n, p^* - p^{n+1}\rangle - \alpha_n\langle g(v^{n+1}, v^{n+1}), p^* - p^{n+1}\rangle \geq 0 \tag{7.12}$$

и $p = p^{n+1}$ в (7.7)

$$\begin{gathered}\langle \bar{p}^n - p^n, p^{n+1} - \bar{p}^n\rangle + \alpha_n\langle g(v^{n+1}, v^{n+1}) - g(v^n, v^n), p^{n+1} - \bar{p}^n\rangle - \\ -\alpha_n\langle g(^{n+1}, v^{n+1}), p^{n+1} - \bar{p}^n\rangle \geq 0,\end{gathered} \tag{7.13}$$

Второе слагаемое в этом неравенстве оценим с помощью (7.5), а затем оба неравенства сложим

$$\begin{gathered}\langle p^{n+1} - p^n, p^* - p^{n+1}\rangle + \langle \bar{p}^n - p^n, p^{n+1} - \bar{p}^n\rangle + \\ + \alpha_n^2|g(v^{n+1}, v^{n+1}) - g(v^n, v^n)|^2 - \alpha_n\langle g(v^{n+1}, v^{n+1}), p^* - \bar{p}^n\rangle \geq 0.\end{gathered}$$

С учетом очевидных соотношений $\langle \bar{p}^n, g(v^*, v^*)\rangle \leq 0$, $\langle p^*, g(v^*, v^*)\rangle = 0$, представим полученное неравенство в виде

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\langle \quad p^{n+1} - p^n, p^* - p^{n+1}\rangle + \frac{1}{2}\langle \bar{p}^n - p^n, p^{n+1} - \bar{p}^n\rangle + \\ + \frac{\alpha_n^2}{2}|g(v^{n+1}, v^{n+1} - g(v^n, v^n)|^2 + \frac{\alpha_n}{2}\langle g(v^*, v^*) - g(v^{n+1}, v^{n+1}), p^* - \bar{p}^n\rangle \geq 0.\end{gathered} \tag{7.14}$$

С учетом монотонности оператора $F(v)$ сложим (7.11) и (7.14)

$$\begin{gathered}\langle v^{n+1} - v^n, v^* - v^{n+1}\rangle + \frac{1}{2}\langle p^{n+1} - p^n, p^* - p^{n+1}\rangle + \\ + \frac{1}{2}\langle \bar{p}^n - p^n, p^{n+1} - \bar{p}^n\rangle + \frac{\alpha_n^2}{2}|g(v^{n+1}, v^{n+1} - g(v^n, v^n)|^2 \geq 0.\end{gathered} \tag{7.15}$$

С помощью тождества (6.11) разложим три первых скалярных произведения в сумму квадратов

$$\begin{gathered}|v^{n+1} - v^*|^2 + \frac{1}{2}|p^{n+1} - p^*|^2 + |v^{n+1} - v^n|^2 - \frac{\alpha_n^2}{2}|g(v^{n+1}, v^{n+1}) - g(v^n, v^n)|^2 + \\ + \frac{1}{2}\left|p^{n+1} - \bar{p}^n\right|^2 + \frac{1}{2}\left|\bar{p}^n - p^n\right|^2 \leq |v^n - v^*|^2 + \frac{1}{2}\left|p^n - p^*\right|^2.\end{gathered} \tag{7.16}$$

Так как

$$\frac{1}{2}|p^{n+1} - p^n|^2 \leq |p^{n+1} - \bar{p}^n|^2 + |\bar{p}^n - p^n|^2, \tag{7.17}$$

то с учетом (7.3) последнее неравенство можно представить в виде

$$\begin{gathered}|v^{n+1} - v^*|^2 + \frac{1}{2}\left|p^{n+1} - p^*\right|^2 + \varepsilon\left|v^{n+1} - v^n\right|^2 + \frac{1}{4}\left|p^{n+1} - p^n\right|^2 \leq \\ \leq |v^n - v^*|^2 + \frac{1}{2}\left|p^n - p^*\right|^2.\end{gathered} \tag{7.18}$$

Если же в процессе (7.1) длина шага α_n выбирается из условия (7.2), то четвертый член в (7.16) оценим с помощью (7.4), тогда

$$\begin{gathered}|v^{n+1} - v^*|^2 + \frac{1}{2}|p^{n+1} - p^*|^2 + (1 - (\alpha_n^2/2)|g|^2)|v^{n+1} - v^n|^2 + \\ + \quad \frac{1}{4}|p^{n+1} - p^n|^2 \leq |v^n - v^*|^2 + \frac{1}{2}|p^n - p^*|^2.\end{gathered}$$

Так как $1 - (\alpha_n^2/2)|g|^2 \geq \varepsilon$, то полученное неравенство имеет вид (7.18). Таким образом, независимо от способа выбора длины шага α_n мы в любом случае приходим к неравенству (7.18), которое является полным аналогом (6.12), поэтому доказательство теоремы может быть завершено по схеме теоремы 1. Теорема доказана.

Приведенное доказательство можно также обобщить, если метод рассматривается в условиях помех.

8. Градиентный метод прогнозного типа по прямым и двойственным переменным

В предыдущих разделах рассматривались так называемые неявные итеративные схемы, т.е. схемы, когда переменные, относительно которых решались вспомогательные вариационные неравенства на каждой итерации процесса, входили как в правые, так и в левые части этих неравенств. Как следствие этого факта на каждой итерации методов приходилось решать регуляризованные промежуточные вариационные неравенства или системы вариационных неравенств, но уже без связанных ограничений. Однако это тоже непростые задачи, поэтому всегда возникает вопрос: можно ли ситуацию упростить так, чтобы на каждой итерации процесса необходимо было решать одну или две вспомогательные задачи оптимизации сильно выпуклой функции на простом множестве (задачи проектирования) вместо решения достаточно трудной задачи вариационного неравенства? Ответ на этот вопрос утвердительный. Рассмотрим одну из возможных градиентных итеративных схем с прогнозным шагом как по прямым так и по двойственным переменным. Действительно, пусть v^0, p^0 — начальное приближение, тогда следующее вычислим по рекуррентным формулам [22]

$$\begin{array}{lcl} \bar{p}^n &=& \pi_+(p^n + \alpha_n g(v^n, v^n)), \\ \bar{v}^n &=& \pi_{\Omega_0}(v^n - \alpha_n(F(v^n) + \nabla_w^\top g(v^n, v^n)\bar{p}^n)), \\ p^{n+1} &=& pi_+(p^n + \alpha_n g(\bar{v}^n, \bar{v}^n)), \\ v^{n+1} &=& \pi_{\Omega_0}(v^n - \alpha_n(F(\bar{v}^n) + \nabla_w^\top g(\bar{v}^n, \bar{v}^n)\bar{p}^n)). \end{array} \tag{8.1}$$

Длина шага α_n в процессе (8.1) определяется либо из условия

$$0 < \varepsilon \le \alpha_n < 1/\sqrt{2(|F|^2 + C^2|\nabla|^2) + \frac{1}{2}|g|^2}, \quad \varepsilon > 0, \tag{8.2}$$

где константы $|F|$, $|\nabla|$, C, $|g|$ определены в (8.4), (8.6) либо из условия

$$\begin{array}{rcl} \alpha_n^2(|F(\bar{v}^n) - F(v^n) &+& (\nabla_w^\top g(\bar{v}^n, \bar{v}^n) - \nabla_w^\top g(v^n, v^n))\bar{p}^n|^2 + \\ &+& (1/2)|g(\bar{v}^n, \bar{v}^n) - g(v^n, v^n)|^2) \le (1-\varepsilon)|\bar{v}^n - v^n|^2. \end{array} \tag{8.3}$$

Длина шага в условиях (8.2) и (8.3) выбирается по той же схеме, что и в (7.2), (7.3).

Получим оценку отклонения векторов $\bar{v}^n$ и v^{n+1}, а также $\bar{p}^n$ и p^{n+1} из (8.1)

$$\begin{array}{l} |\bar{p}^n - p^{n+1}| \le \alpha_n |g(v^n, v^n) - g(\bar{v}^n, \bar{v}^n)|, \\ |\bar{v}^n - v^{n+1}| \le \alpha_n |F(v^n) - F(\bar{v}^n) + (\nabla_w^\top g(v^n, v^n) - \nabla_w^\top g(\bar{v}^n, \bar{v}^n))\bar{p}^n|. \end{array} \tag{8.4}$$

Обоснуем корректность способов выбора параметра α_n из условий (8.2) и (8.3). Будем предполагать, что функции $g(v, w)$ и $F(v)$, $\nabla_w^\top g(v, v)$ удовлетворяют условиям Липшица

$$|g(v+h, v+h) - g(v, v)| \le |g||h| \tag{8.5}$$

для всех $v \in \Omega$ и $h \in R^n$, где $|g|$ — константа и

$$|F(v+h) - F(v)| \le |F|\,|h|\,,$$

$$|\nabla_w^\top g(v+h,v+h)-\nabla_w^\top g(v,v))|\le|\nabla||h|, \tag{8.6}$$

для всех $v\in\Omega$ и $h\in R^n$, где $|F|$, $|\nabla|$ — константы; кроме того $|\bar p^n|\le C$.

В силу (8.5) и (8.6) имеем

$$|F(\bar v^n)-F(v^n)+(\nabla_w^\top g(\bar v^n,\bar v^n)-\nabla_w^\top g(v^n,v^n))\bar p^n|\le(|F|+|\bar p^n||\nabla|)|\bar v^n-v^n|,$$

$$|g(\bar v^n,\bar v^n)-g(v^n,v^n)|\le|g||\bar v^n-v^n|.$$

Так как $|\bar p^n|\le C$, то

$$\begin{aligned}&|F(\bar v^n)-F(v^n)+(\nabla_w^\top g(\bar v^n,\bar v^n)-\nabla_w^\top g(v^n,v^n))\bar p^n|^2+\\&+(1/2)|g(\bar v^n,\bar v^n)-g(v^n,v^n)|^2\le\{|F|+|\nabla|)^2+(1/2)|g|^2\}|\bar v^n-v^n|^2.\end{aligned} \tag{8.7}$$

Отсюда очевидно, что если выполнено условие $(|F|+|\nabla|)^2+(1/2)|g|^2\le(1-\varepsilon)/\alpha_n^2$, т.е.

$$\alpha_n^2\le\frac{1-\varepsilon}{(|F|+C|\nabla|)^2+(1/2)|g|^2},$$

то всегда существует α_n, удовлетворяющее оценки (8.3).

Представим этот процесс в форме вариационных неравенств. Первое и третье уравнение из (8.1) в соответствии с определением оператора проектирования запишем в виде

$$\langle\bar p^n-p^n-\alpha_n g(v^n,v^n),p-\bar p^n\rangle\ge0\quad\forall p\ge0, \tag{8.8}$$

и

$$\langle p^{n+1}-p^n-\alpha_n g(\bar u^n,\bar u^n),p-p^{n+1}\rangle\ge0\quad\forall p\ge0. \tag{8.9}$$

Второе и четвертое уравнения представим в форме

$$\langle\bar v^n-v^n+\alpha_n(F(v^n)+\nabla_w^\top g(v^n,v^n)\bar p^n),w-\bar v^n\rangle\ge0\quad\forall w\in\Omega_0, \tag{8.10}$$

и

$$\langle v^{n+1}-v^n+\alpha_n(F(\bar v^n)+\nabla_w^\top g(\bar v^n,\bar v^n)\bar p^n),w-v^{n+1}\rangle\ge0\quad\forall w\in\Omega_0, \tag{8.11}$$

Покажем, что процесс (8.1) сходится монотонно по норме к одному из равновесных решений.

Т е о р е м а 3 . *Если множество решений задачи (1.1) непусто, оператор $F(v)$ монотонный, вектор-функция $g(v,w)$ симметричная, дифференцируемая и выпуклая по w для любого v, $|p^n|\le C$ для всех n, кроме того ее сужение $g(v,w)|_{v=w}$ на диагонали квадрата — выпуклая функция, $\Omega\subseteq I\!R^n$ — выпуклое замкнутое множество, то последовательность v^n, порожденная методом (8.1) с выбором параметра α_n способом (8.2) или (8.3) сходится монотонно по норме к одному из равновесных решений, т.е. $v^n\to v^*\in\Omega^*$ при $n\to\infty$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Положим $w=v^*$ в (8.11), тогда

$$\langle v^{n+1}-v^n,v^*-v^{n+1}\rangle+\alpha_n\langle F(\bar v^n),v^*-v^{n+1}\rangle+\alpha_n\langle\nabla_w^\top g(\bar v^n,\bar v^n)\bar p^n,v^*-v^{n+1}\rangle\ge0. \tag{8.12}$$

Положим $w = v^{n+1}$ в (8.10)

$$\langle \bar{v}^n - v^n + \alpha_n(F(v^n) + \nabla_w^\top g(v^n, v^n)\bar{p}^n), v^{n+1} - \bar{v}^n\rangle \geq 0.$$

Отсюда

$$\begin{gathered}\langle \bar{v}^n - v^n, v^{n+1} - \bar{v}^n\rangle + \alpha_n\langle F(\bar{v}^n), v^{n+1} - \bar{v}^n\rangle - \\ -\alpha_n\langle F(\bar{v}^n) - F(v^n), v^{n+1} - \bar{v}^n\rangle + \alpha_n\langle \nabla_w^\top g(\bar{v}^n, \bar{v}^n)\bar{p}^n, v^{n+1} - \bar{v}^n\rangle - \\ -\alpha_n\langle (\nabla_w^\top g(\bar{v}^n, \bar{v}^n) - \nabla_w^\top g(v^n, v^n))\bar{p}^n, v^{n+1} - \bar{v}^n\rangle \geq 0,\end{gathered}$$

или с учетом (8.4)

$$\begin{gathered}\langle \bar{v}^n - v^n, v^{n+1} - \bar{v}^n\rangle + \alpha_n\langle F(\bar{v}^n), v^{n+1} - \bar{v}^n\rangle + \\ +\alpha_n\langle \nabla_w^\top g(\bar{v}^n, \bar{v}^n)\bar{p}^n, v^{n+1} - \bar{v}^n\rangle + \\ +\alpha_n^2|F(\bar{v}^n) - F(v^n) + (\nabla_w^\top g(\bar{v}^n, \bar{v}^n) - \nabla_w^\top g(v^n, v^n))\bar{p}^n|^2 \geq 0.\end{gathered} \tag{8.13}$$

Сложим неравенства (8.12) и (8.13)

$$\begin{gathered}\langle v^{n+1} - v^n, v^* - v^{n+1}\rangle + \langle \bar{v}^n - v^n, v^{n+1} - \bar{v}^n\rangle + \alpha_n\langle F(\bar{v}^n), v^* - \bar{v}^n\rangle + \\ +\alpha_n\langle \bar{p}^n, \nabla_w g(\bar{v}^n, \bar{v}^n)(v^* - \bar{v}^n)\rangle + \alpha_n^2|F(\bar{v}^n) - F(v^n) + \\ +(\nabla_w^\top g(\bar{v}^n, \bar{v}^n) - \nabla_w^\top g(v^n, v^n))\bar{p}^n|^2 \geq 0.\end{gathered} \tag{8.14}$$

По схеме (6.6) отдельно преобразуем четвертый член из (8.14)

$$\langle \bar{p}^n, \nabla_w g(\bar{v}^n, \bar{v}^n)(v^* - \bar{v}^n)\rangle = \frac{1}{2}\langle \bar{p}^n, \nabla g(\bar{v}^n, \bar{v}^n)(v^* - \bar{v}^n)\rangle \leq \frac{1}{2}\langle \bar{p}^n, g(v^*, v^*) - g(\bar{v}^n, \bar{v}^n)\rangle,$$

тогда

$$\begin{gathered}\langle v^{n+1} - v^n, v^* - v^{n+1}\rangle + \langle \bar{v}^n - v^n, v^{n+1} - \bar{v}^n\rangle + \alpha_n\langle F(\bar{v}^n), v^* - \bar{v}^n\rangle + \\ +(\alpha_n/2)\langle \bar{p}^n, g(v^*, v^*) - g(\bar{v}^n, \bar{v}^n)\rangle + \\ +\alpha_n^2|F(\bar{v}^n) - F(v^n) + (\nabla_w^\top g(\bar{v}^n, \bar{v}^n) - \nabla_w^\top g(v^n, v^n))\bar{p}^n|^2 \geq 0.\end{gathered}$$

Положим $w = \bar{v}^n$ в первом неравенстве (5.5), тогда

$$\langle F(v^*), \bar{v}^n - v^*\rangle + \frac{1}{2}\langle p^*, g(\bar{v}^n, \bar{v}^n) - g(v^*, v^*)\rangle \geq 0.$$

Сложим два последних неравенства

$$\begin{gathered}\langle v^{n+1} - v^n, v^* - v^{n+1}\rangle + \langle \bar{v}^n - v^n, v^{n+1} - \bar{v}^n\rangle + \alpha_n\langle F(\bar{v}^n) - F(v^*), v^* - \bar{v}^n\rangle + \\ +\frac{\alpha_n}{2}\langle \bar{p}^n - p^*, g(v^*, v^*) - g(\bar{v}^n, \bar{v}^n)\rangle + \alpha_n^2|F(\bar{v}^n) - F(v^n) + \\ +(\nabla_w^\top g(\bar{v}^n, \bar{v}^n) - \nabla_w^\top g(v^n, v^n))\bar{p}^n|^2 \geq 0.\end{gathered} \tag{8.15}$$

Рассмотрим неравенства (8.8) и (8.9). Положим $p = p^*$ в (8.9)

$$\langle p^{n+1} - p^n, p^* - p^{n+1}\rangle - \alpha\langle g(\bar{v}^n, \bar{v}^n), p^* - p^{n+1}\rangle \geq 0 \tag{8.16}$$

и $p = p^{n+1}$ в (8.8)

$$\begin{aligned}&\langle \bar p^n - p^n, p^{n+1} - \bar p^n\rangle + \alpha_n \langle g(\bar v^n, \bar v^n) - g(v^n, v^n), p^{n+1} - \bar p^n\rangle - \\ -&\alpha_n \langle g(\bar v^n, \bar v^n), p^{n+1} - \bar p^n\rangle \ge 0.\end{aligned} \tag{8.17}$$

Второе слагаемое в этом неравенстве оценим с помощью (8.4), а затем сложим неравенства (8.16) и (8.17)

$$\begin{aligned}&\langle p^{n+1} - p^n, p^* - p^{n+1}\rangle + \langle \bar p^n - p^n, p^{n+1} - \bar p^n\rangle + \\ +&\alpha_n^2 |g(\bar v^n, \bar v^n) - g(v^n, v^n)|^2 - \alpha_n \langle g(\bar v^n, \bar v^n), p^* - \bar p^n\rangle \ge 0.\end{aligned}$$

Используя соотношения $\langle \bar p^n, g(v^*, v^*)\rangle \le 0$, $\langle p^*, g(v^*, v^*)\rangle = 0$, перепишем последнее неравенство в виде

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\langle p^{n+1} - p^n, p^* - p^{n+1}\rangle + \frac{1}{2}\langle \bar p^n - p^n, p^{n+1} - \bar p^n\rangle + \\ +&\frac{\alpha_n^2}{2}|g(\bar v^n, \bar v^n) - g(v^n, v^n)|^2 + \frac{\alpha_n}{2}\langle g(v^*, v^*) - g(\bar v^n, \bar v^n), p^* - \bar p^n\rangle \ge 0.\end{aligned} \tag{8.18}$$

Сложим неравенства (8.15) и (8.18), учитывая монотонность оператора $F(v)$

$$\begin{aligned}&\langle v^{n+1} - v^n, v^* - v^{n+1}\rangle + \langle \bar v^n - v^n, v^{n+1} - \bar v^n\rangle + \\ +&(1/2)\langle p^{n+1} - p^n, p^* - p^{n+1}\rangle + (1/2)\langle \bar p^n - p^n, p^{n+1} - \bar p^n\rangle + \\ +&\alpha_n^2(|F(\bar v^n) - F(v^n) + (\nabla_w^\top g(\bar v^n, \bar v^n) - \nabla_w^\top g(v^n, v^n))\bar p^n|^2 + \\ +&(1/2)|g(\bar v^n, \bar v^n) - g(v^n, v^n)|^2) \ge 0.\end{aligned}$$

С помощью тождества (6.11) разложим четыре первых скалярных произведения в сумму квадратов

$$\begin{aligned}&|v^{n+1} - v^*|^2 + (1/2)|p^{n+1} - p^*|^2 + |v^{n+1} - \bar v^n|^2 + |\bar v^n - v^n|^2 + \\ +&(1/2)|p^{n+1} - \bar p^n|^2 + (1/2)|\bar p^n - p^n|^2 + \\ +&\alpha_n^2(|F(\bar v^n) - F(v^n) + (\nabla_w^\top g(\bar v^n, \bar v^n) - \nabla_w^\top g(v^n, v^n))\bar p^n|^2 + \\ +&(1/2)|g(\bar v^n, \bar v^n) - g(v^n, v^n)|^2) \le |v^n - v^*|^2 + (1/2)|p^n - p^*|^2.\end{aligned}$$

В силу (7.17) последнее неравенство можно представить в форме

$$\begin{aligned}&|v^{n+1} - v^*|^2 + (1/2)|p^{n+1} - p^*|^2 + (1/4)|p^{n+1} - p^n|^2 + |v^{n+1} - \bar v^n|^2 + \\ +&|\bar v^n - v^n|^2 - \alpha_n^2(|F(\bar v^n) - F(v^n) + (\nabla_w^\top g(\bar v^n, \bar v^n) - \nabla_w^\top g(v^n, v^n))\bar p^n|^2 + \\ +&(1/2)|g(\bar v^n, \bar v^n) - g(v^n, v^n)|^2) \le |v^n - v^*|^2 + (1/2)|p^n - p^*|^2.\end{aligned} \tag{8.19}$$

В полученном неравенстве сумму пятого и шестого слагаемых оценим с помощью (8.3), тогда

$$\begin{aligned}|v^{n+1} - v^*|^2 \;&+\; \tfrac{1}{2}|p^{n+1} - p^*|^2 + \tfrac{1}{4}|p^{n+1} - p^n|^2 + |v^{n+1} - \bar v^n|^2 + \varepsilon|\bar v^n - v^n|^2 \le \\ &\le\; |v^n - v^*|^2 + \tfrac{1}{2}|p^n - p^*|^2.\end{aligned} \tag{8.20}$$

Если же в процессе (8.1) длина шага α_n выбирается из условия (8.2), то шестой член в (8.19) оценим с помощью (8.5) и (8.6), а также используя оценку $\langle x, y\rangle \le$ $\le |x|^2 + |y|^2$, тогда

$$\begin{aligned}&|v^{n+1} - v^*|^2 + \frac{1}{2}|p^{n+1} - p^*|^2 + \frac{1}{4}|p^{n+1} - p^n|^2 + |v^{n+1} - \bar v^n|^2 + \\ +&(1 - \alpha_n^2(2(|F|^2 + C^2|\nabla|^2) + \frac{1}{2}|g|^2)|\bar v^n - v^n|^2 \le |v^n - v^*|^2 + \frac{1}{2}|p^n - p^*|^2.\end{aligned} \tag{8.21}$$

Так как $1 - \alpha_n^2(2(|F|^2 + C^2|\nabla|^2) + (1/2)|g|^2) \geq \varepsilon$, то полученное неравенство имеет вид (8.20). Таким образом, независимо от способа выбора длины шага α_n мы в любом случае приходим к неравенству (8.20), которое является полным аналогом (6.12), поэтому доказательство теоремы может быть завершено по схеме теоремы 1. Теорема доказана.

Приведенное доказательство можно также обобщить, если метод рассматривается в условиях помех.

References.

[1] *Rosen J.B.* Existence and uniqueness of equilibrium points for concave n-person games. *Econometrica*. 1965. V.33. No.3. P. 520–534.

[2] *Harker P.T., Pang J.S.* Finite Dimensional Variational Inequality and Nonlinear Complementarity Problems: A Survey of Theory, Algorithms and Applications. *Mathematical Programming*. 1990. V.48. P. 161–220.

[3] *Левин М.И., Макаров В.Л., Рубинов А.М.* Математические модели экономического взаимодействия. Москва: Физматлит, 1993.

[4] *Garcia C.B., Zangwill W.I.* Pathways to Solutions, Fixed Points, and Equilibria. Prentice-Hall, Inc., N.J. 1981.

[5] *Антипин А.С.* О сходимости и оценках скорости сходимости проксимальных методов к неподвижным точкам экстремальных отображений. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1995. Т. 35. No.5. С. 688–704.

[6] *Migdalas A., Pardalos P.M.* Editorial: Hierarchical and Bilevel Programming. *J. of Global Optimization*. 1996. No.8. P. 209–215.

[7] *Байокки К., Капело А.* Вариационные и квазивариационные неравенства. Москва. Наука, 1988.

[8] *Nash J.F Jr.* Equilibrium points in n-person games, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 36 (1950). P. 48–49.

[9] *Nikaido H., Isoda K.* Note on noncooperative convex games, Pacific J. Math. 1955. V.5. Suppl.1. P. 807–815.

[10] *Полтерович В.М.* Экономическое равновесие и хозяйственный механизм. Москва: Наука, 1990.

[11] *Карманов В.Г., Федоров В.В.* Моделирование в исследовании операций. Москва, Твема, 1996.

[12] *Моисеев Н.Н.* Математические задачи системного анализа. Москва, Наука, 1981.

[13] *Cavazzuti E., Flam S.D.* Evolution to selected Nash equilibria. In E. Giannessi (ed.) *Nonsmooth Optimization Method and Application*. 1992. P. 30–41.

[14] *Крутов Б.П., Новикова Н.М.* Специфика игровых задач со связанными ограничениями. В кн. Кибернетика и вычислительная техника. Вып.3. Москва. Наука, 1987. С. 122–139.

[15] *Антипин А.С.* Вычисление неподвижных точек симметричных экстремальных отображений. // Известия ВУЗов. Математика. 1997. No.12. С. 3–15.

[16] *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. Москва. Наука. 1988.

[17] *Антипин А.С.* Расщепление градиентного подхода для решения экстремальных включений. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т.38. No.7. С. 1118–1132.

[18] *Шикин Е.В.* Линейные пространства и отображения. Москва. МГУ. 1987.

[19] *Антипин А.С.* Седловые градиентные процессы, управляемые с помощью обратных связей. // Автоматика и телемеханика. 1994. No.3. С. 12–23.

[20] *Antipin A.C.* Equilibrium Programming Problems: Prox-Regularization and Prox-Methods. In book: Recent Advances in Optimization. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Berlin. Springer, 1997. P. 1–18.

[21] *Антипин А.С.* Равновесное программирование: проксимальные методы. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1997. Т.37. No.11. С. 1327–1339.

[22] *Антипин А.С.* Равновесное программирование: методы градиентного типа. // Автоматика и телемехан. 1997. No.8. С. 125–137.